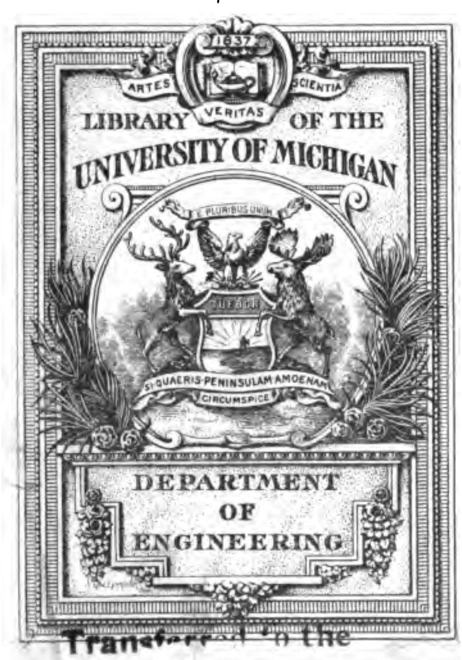

1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
E PLURIBUS UNUM
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING



Lehrbuch der Mechanik

in elementarer Darstellung

für technische Mittelschulen und höhere Lehranstalten,

insbesondere zum

Selbstunterrichte

mit Rücksicht auf die Zwecke des praktischen Lebens.

Als fünfte Auflage der Einleitung in die Mechanik

von **H. B. Lübsen**

bearbeitet von

Prof. Dr. A. Donadt.

Mit 227 Figuren im Text.

Leipzig.
Friedrich Brandstetter.
1905.

Druck von August Pries in Leipzig.

Vorwort.

Auf Wunsch der Verlagsbuchhandlung übernahm der Unterzeichnete die Bearbeitung der fünften Auflage der Einleitung in die Mechanik von H. B. Lübsen. Infolge dieses Auftrages ist das vorliegende Lehrbuch der Mechanik in elementarer Darstellung entstanden. Von dem Lübsenschen Buche unterscheidet es sich nicht nur äußerlich durch den Umfang, der fast doppelt so groß ist, sondern namentlich durch die Anordnung des Stoffes. Während Lübsen der Reihe nach in scharfer Trennung Statik und Dynamik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper behandelt, sind in der neuen Auflage zunächst die phoronomischen Grundgesetze entwickelt, woran sich die Mechanik des materiellen Punktes und die des starren Körpers anschließen. Als Anwendung der letzteren wird in einem besonderen Abschnitte die Lehre von den einfachen Maschinen behandelt. Zuletzt folgen Hydromechanik und Aeromechanik. Die scharfe Trennung zwischen Statik und Dynamik ist also nicht beibehalten, sondern die Statik als Grenzfall der Dynamik behandelt worden.

Bei der Bearbeitung des Stoffes kam es dem Unterzeichneten wesentlich darauf an, überall viel schärfer als bei Lübsen die Prinzipien der Mechanik hervorzuheben und, da das Buch namentlich für den Selbstunterricht bestimmt ist, diese Prinzipien möglichst klar und verständlich auszusprechen. In dieser Beziehung mußte die Darstellung etwas breiter und eingehender als zu kurz und nur andeutend sein. Auch erschien es wünschenswert, diese Prinzipien möglichst als Ausgangspunkt der Darstellung zu wählen, so z. B. das wichtige Prinzip von der Erhaltung der Energie, das bei Lübsen nur eine ganz nebensächliche Rolle spielt.

Bei dieser Stellung der Aufgabe konnte freilich von dem Lübsenschen Buche nicht viel ohne weiteres in das vorlie-

gende Buch übernommen werden; nur sehr wenige Paragraphen sind ungeändert geblieben; bei weitem die meisten haben eine vollständige Neubearbeitung erfahren, außerdem wurde vieles ergänzt und neu hinzugefügt.

Alle Figuren sind nach Art der Tafelzeichnungen neu entworfen; um heillose Verwirrung zu vermeiden, sind die Abkürzungen für die Maße und Gewichte nicht kursiv gedruckt, so daß nicht m (Meter) mit *m* (Masse) und g (Gramm) mit *g* (Beschleunigung der Schwere) verwechselt werden können.

Als Anwendungen der vorgetragenen Sätze und als Beispiele dazu wurden Aufgaben in größerer Anzahl ausführlich behandelt, die in Übereinstimmung mit Lübsen aus dem praktischen Leben genommen sind; hierbei wurde aber darauf geachtet, daß die Zahlenbeispiele auch möglichst in der Praxis vorkommen.

Im Gegensatze zu Lübsen, der die Trigonometrie zumeist in Anmerkungen verweist, wird von ihr, wo nötig, Gebrauch gemacht; sonst wird aber nichts vorausgesetzt, was über die in den Schulen gelehrte Elementarmathematik hinausginge.

Einem der Verlagsbuchhandlung gegenüber öfters ausgesprochenen Wunsche nach einer sich an die weitverbreiteten Lübsenschen Bücher anschließenden Aufgabensammlung ist insofern Rechnung getragen worden, als jedem Buche, soweit es anging, in kleinerem Drucke eine Anzahl zugehöriger Übungsaufgaben — im ganzen 360 — mit den Resultaten beigefügt sind; bei einigen der schwierigeren dieser Aufgaben ist der Weg zur Lösung angedeutet.

Der Unterzeichnete hofft, daß auch Lehrer an höheren Schulen bei dem heutigen Bestreben, die Mathematik mehr mit Berücksichtigung ihrer Anwendungen zu lehren, nach dieser Seite hin mancherlei Anregungen in dem Buche finden können.

Leipzig, im Mai 1905.

Prof. Dr. A. Donadt.

Inhaltsverzeichnis.

V. Abschnitt. Hydromechanik.

VI. Abschnitt. Aeromechanik.

Berichtigung.

S. 32. 6. Z. v. u. lies $s = 2160$ m statt $s = 160$ m.

Sachregister.

(Die Ziffern geben die Seiten an.)

Einleitung.

1.

Eine große Zahl der Veränderungen, die in der uns umgebenden Natur geschehen, und die wir Naturerscheinungen nennen, erkennen wir unmittelbar durch unsere Sinne als Bewegungen. Die Wissenschaft, die sich mit den Gesetzen dieser Bewegungen beschäftigt, ist die **Mechanik.**

Wie dieses aus der griechischen Sprache (ἡ μηχανή das Werkzeug) stammende Wort selbst andeutet, bezeichnete es in den frühesten Zeiten die Anfänge der in unserer Zeit so gewaltig entwickelten technischen Wissenschaften, obgleich bereits Archimedes sagt, die Mechanik sei „nur ein Spiel der Mathematik".

Aus dem Begriffe Bewegung und der Frage nach der Ursache der Bewegung entspringt nämlich eine neue mathematische Wissenschaft, die im weitesten Sinne Mechanik genannt wird, sich aber von der Arithmetik und der Geometrie darin unterscheidet, daß in ihr die genannten Erfahrungsbegriffe vorkommen, weshalb sie mit Recht zur angewandten Mathematik gerechnet wird.

Bei einer jeden Bewegung kommt aber zunächst zweierlei in Betracht: Raumänderungen, indem sich bei jeder Bewegung eines Körpers seine Lage zu andern Körpern ändert, und Zeitänderungen, insofern zu jeder Bewegung eines Körpers eine gewisse Zeit erforderlich ist. Sollen daher die Bewegungen mathematisch behandelt werden, so müssen Festsetzungen getroffen werden, wie Raum und Zeit gemessen werden sollen, und das soll neben der genauen Feststellung des Begriffes Bewegung unsere erste Aufgabe sein.

2.

Der Raum und das Messen des Raumes. Jeder Gegenstand der uns umgebenden Außenwelt, d. h. jeder physische

Körper, befindet sich im Raume und nimmt einen Teil des Raumes ein. Was der Raum selbst sei, wird in der Mechanik nicht untersucht, vielmehr wird der Raumbegriff als durch die sinnliche Wahrnehmung der Dinge bekannt vorausgesetzt.

Den Raum, den ein physischer Körper einnimmt, nennt man seinen geometrischen Körper; der physische Körper wird daher wie der geometrische Körper nach den drei Hauptrichtungen (Dimensionen) Länge, Breite und Höhe (oder Tiefe) gemessen, unterscheidet sich aber vom geometrischen Körper wesentlich dadurch, daß er ein von Stoff (Materie) ausgefüllter Raum ist.

Wie alles Messen nur ein Vergleichen mit einer bestimmten Größe ist, so ist auch für das Messen der Raumgrößen (Linien, Flächen und Körper) die Wahl ganz bestimmter Einheiten nötig, doch sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß eine solche Einheit ganz willkürlich gewählt werden kann, wenn sie nur unveränderlich, jedermann zugänglich und stets wieder sicher herstellbar ist, falls sie durch irgend einen Zufall verloren gegangen wäre. Wegen ihrer Bedeutung insbesondere auch für das bürgerliche Leben sind daher von jeher die Maßeinheiten durch den Staat gesetzlich fest bestimmt worden.

Als Längeneinheit wird in der Mechanik allgemein das Meter mit seinen auf dem Dezimalsystem beruhenden Unterabteilungen benutzt (zuerst in Frankreich 1799, im Deutschen Reiche 1872 eingeführt), dessen Länge fast genau den zehnmillionten Teil der Länge eines Meridianquadranten der Erde beträgt.* Von dem in Paris befindlichen Urmeter sind für die verschiedenen Staaten, in denen das Meter gesetzliche Einheit ist, durch das eigens zu diesem Zwecke ins Leben gerufene „Internationale Bureau für Maß und Gewicht“ aus Platin-Iridium Kopien („Prototype“) hergestellt worden. Die dem Deutschen Reiche durch das Los zuerteilte Kopie stellt das deutsche Urmeter dar.

Die Einheiten der Flächen- und Körpermaße werden aus der Längeneinheit abgeleitet. Als Einheit des Flächenmaßes dient das Quadrat, dessen Seite der Längeneinheit gleich

---

* Anm. Nach neueren Messungen ist die Länge eines Meridianquadranten 10000857,5 m.

ist, also je nach der Wahl dieser Längeneinheit das Quadratmeter, das Quadratzentimeter u. s. w. Die Einheit des Körpermaßes ist der Würfel (cubus), dessen Kante gleich der Längeneinheit ist, mit seinen Unterabteilungen.

Die Einteilung und Benennung der Raummaße ist zwar bekannt, doch möge sie wegen der von uns stets gebrauchten Abkürzungen hier angeführt sein:

I. Längenmaße:

1 m = 10 dm = 100 cm = 1000 mm;
1 km = 1000 m;

II. Flächenmaße:

1 qm = 100 qdm = 10000 qcm = 1000000 qmm;
1 a = 100 qm; 1 ha = 100 a = 10000 qm;
1 qkm = 100 ha;

III. Körpermaße:

1 cbm = 1000 cdm = 1000000 ccm;
1 l = 1 cdm = 1000 ccm; 1 hl = 100 l.

Diese Abkürzungen sind (mit Ausnahme der in der Mechanik zuweilen gebrauchten und deshalb mit angeführten dm, qdm, cdm) im Deutschen Reiche behördlich vorgeschrieben.

3.

Ruhe und Bewegung. Ein Körper ist in Ruhe, wenn jeder Teil desselben seine Lage im Raume beibehält; er ist in Bewegung, wenn seine sämtlichen Teile oder auch nur einige derselben ihre Lage im Raume verändern.

Da „Lage“ ein relativer Begriff ist, weil man nur von Lage sprechen kann, wenn man hinzufügt, worauf sich eine Lagenbestimmung bezieht, so können wir die Ruhe oder die Bewegung eines Körpers nur danach beurteilen, ob er seine Lage gegen andere Körper seiner Umgebung beibehält oder ändert.

Absolute Ruhe, wobei ein Körper an derselben Stelle des ruhend gedachten unendlichen Raumes bleiben würde, kennen wir nicht, da alle irdischen Körper außer an der Achsendrehung der Erde und der Bewegung der Erde um die Sonne auch an der von der Astronomie festgestellten, übrigens noch sehr unbekannten Bewegung des Sonnensystems im Weltraume teilnehmen. Ebensowenig können

wir die absolute Bewegung eines Körpers im Weltraume näher bestimmen.

Die meisten Bewegungen betrachten wir in der Mechanik von unserem Standpunkte, der Erde, aus, die dabei als in Ruhe befindlich angesehen wird; der Bequemlichkeit wegen nennt man deshalb in den meisten Anwendungen der Mechanik die Bewegungen relativ zur Erde absolute und versteht dann unter der relativen Bewegung eines irdischen Körpers in Bezug auf einen zweiten selbst in Bewegung befindlichen Körper die scheinbare Bewegung des ersteren Körpers, wie sie vom zweiten Körper aus beobachtet wird.

So ist ein in einem fahrenden Eisenbahnwagen sitzender Mann in relativer Ruhe zum Wagen, während die Bewegung des Wagens und die mit ihm erfolgende des Mannes gegen die Erde als absolute bezeichnet werden kann; geht der Mann im Wagen auf und ab, so ist er in relativer Bewegung zum Wagen.

Übrigens sind wir bei der Beobachtung von Bewegungen vielfachen Sinnestäuschungen unterworfen, infolge deren wir den sich bewegenden Körper für den ruhenden und umgekehrt halten. Fahren wir z. B. in einem Eisenbahnzuge oder auf einem Schiffe, so glauben wir selbst in Ruhe zu sein, während die Gegenstände außerhalb des Zuges, die Bäume am Ufer sich an uns vorüber zu bewegen scheinen. Der Mond am Himmel jagt scheinbar durch die Wolken, während diese an ihm vorüberziehen. Durch Jahrtausende hindurch hat sich die Täuschung erhalten, daß die Erde mit den auf ihr befindlichen Körpern ruhe und der Fixsternhimmel sich drehe, bis erst astronomische Forschungen das Umgekehrte als richtig bewiesen haben.

Obwohl im vorstehenden Ruhe und Bewegung als entgegengesetzte Begriffe erscheinen, faßt die Mechanik, veranlaßt durch die Übergänge aus der Ruhe in die Bewegung und umgekehrt aus der Bewegung in die Ruhe, die Ruhe als einen Grenzfall der Bewegung auf.

Aus der Erfahrung wissen wir noch, daß jede Bewegung eines Körpers nur eine stetige sein kann, d. h., daß der Körper aus einer Lage in eine andere nur gelangen kann, wenn er alle dazwischen liegenden Lagen in zusammenhängender Aufeinanderfolge durchläuft. Dies kann aber auch nur in einer gewissen, wenn auch noch so kleinen

Zeit geschehen, weil ein Körper nicht gleichzeitig an zwei verschiedenen Orten sein kann.

4.

Die Zeit und das Messen der Zeit. Was unter Zeit zu verstehen ist, wird in der Mechanik ebenfalls nicht untersucht, sondern der Zeitbegriff wird wie der Raumbegriff als ein aus der Erfahrung bekannter und geläufiger vorausgesetzt. Wir wissen aus der Erfahrung, daß Änderungen in der Natur einen Anfang und ein Ende haben; vergleicht man ferner zwei solche Änderungen, deren Beginn als ein gleichzeitiger vorausgesetzt werde, miteinander, so kommt man zu dem Begriffe gleicher, längerer oder kürzerer Dauer, woraus dann durch Verallgemeinerung die Vorstellung der Zeit von beliebig langer Dauer, der Zeit ohne Anfang und ohne Ende entsteht, von der eine begrenzte Dauer als ein Teil erscheint. Hieraus entsteht das Bedürfnis der Zeitmessung und Zeitteilung.

Für die Messung der Zeit dient als Grundmaß der Zeitabschnitt, in dem die scheinbare tägliche Umdrehung des Fixsternhimmels in beständiger Wiederholung erfolgt. Man nennt diesen in der Astronomie gebrauchten Zeitabschnitt einen Sterntag und die nach ihm gemessene Zeit Sternzeit. An dieser scheinbaren Umdrehung des Fixsternhimmels nimmt aber auch die Sonne teil, wodurch der Wechsel von Tag und Nacht bedingt ist, an den allein die bürgerliche (praktische) Zeitmessung sich anschließen kann. Die Zeit, die zwischen zwei aufeinander folgenden Durchgängen des Sonnenmittelpunktes durch den Meridian des Beobachtungsortes verfließt, heißt ein wahrer Sonnentag. Stünde die Sonne am Fixsternhimmel fest, so wäre dieser Sonnentag ebensolang wie der Sterntag; da aber die Sonne während ihrer scheinbaren täglichen Bewegung mit dem Fixsternhimmel um die Erde von Osten nach Westen auch ein Stück ihrer scheinbaren, durch die Bewegung der Erde um die Sonne bedingten Bahn am Fixsternhimmel zwischen den Sternen von Westen nach Osten zurücklegt, so ist ein wahrer Sonnentag länger als ein Sterntag. Nun ist aber der wahre Sonnentag veränderlich, weil die scheinbare Bewegung der Sonne am Fixsternhimmel bald schneller bald langsamer erfolgt, so daß die Sonne bald mehr bald weniger hinter den

Sternen zurückbleibt. Da jedoch als Maß nur ein ganz bestimmter, unveränderlicher Zeitabschnitt gebraucht werden kann, hat man den mittleren Sonnentag eingeführt. Die Veränderungen des wahren Sonnentages sind nicht groß und kehren nach Ablauf eines durch die Sonne selbst bestimmten Zeitabschnitts (des Jahres) periodisch wieder; es muß sich daher ein mittlerer Wert des Sonnentages ausrechnen lassen, so daß die Dauer einer bestimmten Anzahl wahrer Sonnentage von der Dauer derselben Anzahl mittlerer Sonnentage nicht verschieden ist; man erhält also die Dauer des mittleren Sonnentages, wenn man die Länge eines Jahres durch die Anzahl der im Jahre enthaltenen wahren Sonnentage dividiert. Diese mittlere Zeit wird durch unsere mechanischen Uhren angegeben, die so reguliert sein sollen, daß, wenn sie z. B. am 21. März eines Jahres bei der Kulmination der Sonne 12 Uhr zeigten, sie auch am 21. März des nächsten Jahres bei der Kulmination der Sonne wieder 12 Uhr anzeigen.

Ein solcher mittlerer Sonnentag wird, was ganz willkürlich ist, in $2 \cdot 12 = 24$ Stunden, die Stunde in 60 Minuten, die Minute in 60 Sekunden eingeteilt.

Als Zeiteinheit gilt in der Mechanik im allgemeinen die Sekunde (sec) mittlerer Zeit; sie ist der $24 \cdot 60 \cdot 60 = 86400$ste Teil des mittleren Sonnentages.

5.

Der starre Körper. Erfahrungsgemäß sind alle physischen Körper sehr veränderlich, indem nicht nur durch äußere Einflüsse die Form und die Grösse der Körper vielerlei Veränderungen erfahren, sondern auch das Innere der Körper, ihre Struktur, mannigfache Wandlungen durchmachen muß. In den meisten Aufgaben der Mechanik kommen jedoch diese Veränderungen gar nicht in Betracht, oder sie sind, wenn sie in Betracht gezogen werden sollen, Gegenstand besonderer Untersuchung. Vielmehr handelt es sich in der Mechanik in der Regel nur um die Bestimmung von Lagenveränderungen der Körper, die nur möglich ist, wenn man von allen andern so vielfach unbestimmten und unbestimmbaren Veränderungen absieht.

Für die Bedürfnisse der Mechanik hat man deshalb den Begriff des starren Körpers eingeführt und versteht dar-

unter einen Körper, dessen einzelne Teilchen so miteinander verbunden sind, daß ihre gegenseitige Entfernung auf keinen Fall geändert werden kann, so daß die einzelnen Teilchen keine relative Bewegung zueinander ausführen können.

Diesem Ideale des starren Körpers kommen von den physischen Körpern die festen Körper am nächsten, aber auch eine ruhende Flüssigkeitsmenge kann, solange sie in Ruhe bleibt, als ein starrer Körper angesehen werden. Im allgemeinen wird man sich daher unter einem starren Körper einen festen Körper vorstellen, der die Eigenschaft der Festigkeit in hohem Grade besitzt, oder der, wie man zu sagen pflegt, absolut fest ist.

6.

Arten der Bewegung eines starren Körpers. Bewegt sich ein starrer Körper, so beschreibt jedes Teilchen desselben eine Linie, die der Weg oder die Bahn des betreffenden Teilchens heißt. Nach der Art der Bahn unterscheidet man geradlinige und krummlinige Bewegungen; im letzteren Falle wird die Richtung der Bewegung durch die jedesmalige Tangente an die Bahnkurve bestimmt.

So mannigfaltig die Bewegungen eines starren Körpers auch sein können, so lassen sie sich doch sämtlich auf zwei einfache Bewegungsarten zurückführen: auf die Verschiebung (Translation) und die Drehung (Rotation).

Beschreiben alle Teilchen eines starren Körpers kongruente und untereinander parallele Bahnen, so heißt die Bewegung des Körpers eine Verschiebung (Translation) oder auch eine fortschreitende Bewegung; bei ihr bleibt die Verbindungslinie irgend zweier Teilchen parallel der Verbindungslinie derselben Teilchen in der Anfangslage.

Beschreiben dagegen die Teilchen verschiedene einander ähnliche Bahnen, so heißt die Bewegung Drehung (Rotation) und zwar speziell Achsendrehung, wenn alle Teilchen auf einer im Körper gedachten oder mit ihm fest verbundenen Geraden in Ruhe bleiben, während die übrigen Teilchen Kreise beschreiben, deren Mittelpunkte auf jener Geraden liegen und deren Radien die Abstände der Teilchen von der festen Geraden sind. Die feste Gerade selbst heißt die Achse.

Doch sei ausdrücklich bemerkt, daß keineswegs jede

Kreisbewegung eine Drehung sein muß; soll aber eine Kreisbewegung eine Verschiebung sein, so müssen die Radien aller von den einzelnen Teilchen des Körpers beschriebenen Kreise gleich groß sein.

Verschiebung und Drehung des starren Körpers sind auch in praktischer Beziehung von besonderem Interesse, weil die in den Anwendungen, an den Maschinen vorkommenden Bewegungen in überwiegender Mehrheit Verschiebungen und Drehungen sind.

Beschreiben die Teilchen oftmals ein und dieselbe Bahn, indem der Körper immer wieder in die ursprüngliche Lage zurückkehrt, so nennt man diese Bewegung Schwingung (Oszillation).

7.

Aus dem Vorigen erhellt sofort, daß man zur Bestimmung der Verschiebung genannten Bewegung eines starren Körpers, bei der alle Teilchen kongruente Bahnen beschreiben, nur die Bewegung eines einzelnen Teilchens zu untersuchen hat. Aber auch bei der Achsendrehung genannten Bewegung lassen sich viele Fragen auf die Bewegung eines einzelnen Teilchens zurückführen.

Zunächst beschreiben alle Teilchen, die gleiche Abstände r von der Achse haben, die also auf dem Mantel eines geraden Kreiszylinders mit dem Radius r liegen, kongruente Bahnen und haben vollständig gleiche Bewegungen.

Zwei Teilchen, die verschiedene Abstände r_1 und r_2 von der Achse haben, haben zwar verschiedene Bewegungen, doch können diese miteinander verglichen und in Beziehung zueinander gesetzt werden. Beschreibt man nämlich um die Achse mit der Längeneinheit als Radius einen Kreiszylinder (Einheitszylinder), so kann man jedem Teilchen des Körpers ein Teilchen auf diesem Einheitszylinder derart zuordnen, daß beide auf demselben senkrecht zur Achse stehenden Radius liegen. Beschreibt nun bei der Achsendrehung ein Teilchen im Abstande r von der Achse einen Bogen seines Kreises, der dem Winkel α entspricht, so beschreibt das zugeordnete Teilchen auf dem Einheitszylinder einen Kreisbogen, der ebenfalls zum Winkel α gehört. Bezeichnet man den letzteren mit $arc\ \alpha$, so ist der Weg, den das Teilchen im Abstande r beschreibt, da sich die zu gleichen Zentriwinkeln gehörigen Bogen zweier Kreise wie die Radien der Kreise

verhalten, gleich $r \cdot arc\ \alpha$. Kennt man daher die Bewegung eines Teilchens auf dem Einheitszylinder, so kennt man die Bewegung jedes beliebigen Teilchens des Körpers im Abstande r von der Achse.

8.

Der materielle Punkt. Da die Untersuchung der Bewegung eines einzelnen Teilchens die Grundlage für die Untersuchung der Bewegung der starren Körper bildet, hat die Mechanik den Begriff des materiellen Punktes eingeführt.

Man versteht darunter zunächst einen möglichst kleinen Teil der Materie eines Körpers, oder einen Körper von so verschwindend kleinen Dimensionen, daß es nicht nötig ist, auf seine räumliche Ausdehnung Rücksicht zu nehmen; man kann also sagen: ein materieller Punkt ist ein geometrischer Punkt, der mit Materie behaftet ist.

Doch ist damit keineswegs gesagt, daß diese Materie von unendlich kleiner Größe sein müsse. Denn unter den Anwendungen der Mechanik kommen viele Aufgaben vor, bei denen gar nicht verlangt wird die Bewegungen eines Körpers bis ins einzelne zu untersuchen, bei denen vielmehr die Bewegung eines Körpers in den Hauptzügen bestimmt werden soll, ohne daß auf die Bewegungsunterschiede der einzelnen Teilchen Rücksicht zu nehmen wäre. In solchen Fällen kann man den ganzen Körper, von welcher Größe und Form er auch sein möge, als einen materiellen Punkt ansehen, in dem die ganze Materie des Körpers vereinigt ist.

So wird z. B. in der Mechanik ein geworfener Stein oder eine aus einem Geschütz abgeschossene Kugel bei der Untersuchung der Wurfbewegung als ein materieller Punkt angesehen. Betrachtet man bei einem fahrenden Eisenbahnzuge oder einem fahrenden Schiffe nur die fortschreitende Hauptbewegung, ohne Rücksicht auf die so mannigfachen und äußerst verwickelten Einzelbewegungen der einzelnen Teile zu nehmen, so ist zur Charakterisierung dieser Bewegung nur die Untersuchung der Bewegung eines einzigen Punktes nötig, dessen Lage in dem Zuge oder Schiffe beliebig gewählt werden kann. Auch die ganze Erde und die Planeten überhaupt werden, wenn man z. B. nur ihre Bewegung um die

Sonne untersucht und von ihrer Achsendrehung und ihrer gegenseitigen Beeinflussung absieht, als materielle Punkte behandelt.

Man muß natürlich diese Anschauungsweise sofort fallen lassen, wenn die Aufgabe ein Eingehen auf die Bewegungen der einzelnen Teilchen verlangt. In diesem Falle hat man den Körper als aus materiellen Punkten zusammengesetzt, als ein „System materieller Punkte" zu betrachten.

9.

Betrachtet man ausschließlich die räumlichen Beziehungen, die bei Bewegungen der Körper in Frage kommen, so gehört das in das Gebiet der reinen Geometrie. Berücksichtigt man zugleich die Zeitänderungen, so bildet das den Gegenstand der **geometrischen Bewegungslehre** oder **Phoronomie** oder **Kinematik,** einer Wissenschaft, die den Übergang von der Geometrie zur Mechanik vermittelt und von Lagrange Geometrie von vier Dimensionen — zu den drei Dimensionen des Raumes kommt die eine der Zeit — genannt wird. Sie sieht von dem Stoffe, aus dem der Körper besteht, ganz ab, betrachtet also den geometrischen Punkt, sieht seine Bewegungen als gegebenes Material an, beschreibt und ordnet sie.

Die eigentliche Mechanik geht einen Schritt weiter: sie fragt nach den Ursachen der Bewegungen und stellt die Bedingungen und Gesetze auf, unter denen die einzelnen Arten der Bewegung entstehen. Werden die Ursachen der Bewegung Kräfte genannt, so kann die eigentliche Mechanik als die Lehre von den Kräften **(Dynamik)** und ihren Wirkungen definiert werden.

10.

Man unterscheidet zwischen reiner (mathematischer) und angewandter (praktischer oder technischer) Mechanik; die erstere sucht die Mechanik zu einem wissenschaftlichen Systeme zu verarbeiten, während die letztere die Aufgaben in den Vordergrund stellt, die den Zwecken der Technik, d. h. der Nutzbarmachung der Naturkräfte dienen.

Nach dem Umfange der zur Behandlung nötigen mathematischen Kenntnisse unterscheidet man **Elementarmechanik,**

die nur der niederen Mathematik bedarf, und höhere oder **analytische Mechanik**, die die höhere Mathematik benutzt.

11.

Wir werden im folgenden zunächst die Elemente der Phoronomie behandeln; daran wird sich als erster Abschnitt der Dynamik die Mechanik des materiellen Punktes schließen, bei der der geometrische Punkt der Phoronomie mit Masse behaftet ist, und die die Verbindung von Phoronomie und Dynamik herstellt.

Entsprechend der Einteilung der Körper nach ihren Aggregatzuständen in feste, flüssige und gasförmige unterscheiden wir Mechanik des starren Körpers, Hydromechanik und Aeromechanik. Dazwischen sind als Anwendung der Mechanik des starren Körpers die Elemente der Maschinenlehre eingeschaltet.

Erster Abschnitt.

Phoronomie des materiellen Punktes.

Erstes Buch.

Die gleichförmige und die gleichförmig veränderte Bewegung.

12.

Die gleichförmige Bewegung. Bewegt sich ein materieller Punkt (in gerader oder krummer Linie) so, daß er in gleichen Zeiten gleiche Wege zurücklegt, so heißt seine Bewegung gleichförmig.

Bei der gleichförmigen Bewegung verhalten sich also die von einem materiellen Punkte zurückgelegten Wege wie die dazu erforderlichen Zeiten, oder das Verhältnis zwischen dem durchlaufenen Wege und der dazu erforderlichen Zeit ist für jeden Zeitpunkt konstant, d. h. die Länge des durchlaufenen Weges ist der Zeit proportional.

Beispiele einer gleichförmigen Bewegung sind die des Schalles in einem gleichartigen Mittel, ferner die des Lichtes, insbesondere aber die Achsendrehung der Erde oder die scheinbare Umdrehung des Fixsternhimmels. Letztere Bewegung nachzuahmen und eine gleichförmige Bewegung zu erzeugen, ist eine besondere Aufgabe der Technik, und hierbei ist das Ideal beinahe erreicht worden: es gibt Chronometer, die in einem Jahre nur eine Sekunde gegen die Achsendrehung der Erde gewinnen oder verlieren.

Das konstante Verhältnis zwischen dem durchlaufenen Wege und der dazu erforderlichen Zeit nennt man die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung.

13.

Bezeichnen wir die Geschwindigkeit eines sich gleichförmig bewegenden materiellen Punktes mit c (celeritas, zu-

gleich an constans erinnernd), die Zeit, während der er sich bewegt, mit t (tempus) und die Länge des in dieser Zeit durchlaufenen Weges mit s (spatium), so ist die Geschwindigkeit definiert durch die Gleichung

$$c = \frac{s}{t}, \tag{1}$$

aus der die zwei weiteren Gleichungen

$$s = c \cdot t \tag{2}$$

$$t = \frac{s}{c} \tag{3}$$

unmittelbar folgen.

Diese drei einfachen Gleichungen, die sich leicht in Worten ausdrücken lassen, reichen zur vollständigen Beurteilung aller Umstände einer gleichförmigen Bewegung hin; zugleich sieht man, daß jede der drei Größen s, t und c bestimmt ist, wenn die beiden andern bekannt sind.

Setzt man in der Gleichung (1) $t = 1$, so wird $c = s$, d. h. die Geschwindigkeit der gleichförmigen Bewegung kann auch definiert werden als der in der Zeiteinheit zurückgelegte Weg.

14.

Dimension der Geschwindigkeit. Da verschiedene Geschwindigkeiten miteinander verglichen, also gemessen werden können, ist es nötig, eine Einheit der Geschwindigkeit festzusetzen; doch ist diese Festsetzung nicht mehr willkürlich. In der Formel

$$c = \frac{s}{t}$$

sind nämlich s und t in bestimmten Einheiten auszudrücken, deren Wahl uns völlig freisteht. (Vergl. Einleitung §§ 2 und 4.) Solche Einheiten heißen Fundamentaleinheiten. Durch die Wahl der Längeneinheit und der Zeiteinheit aber ist wegen der obigen Gleichung die Einheit der Geschwindigkeit völlig bestimmt: sie ist eine abgeleitete Einheit.

Ist s in Metern, t in Sekunden ausgedrückt, und legt ein Punkt z. B. 30 m in 5 sec zurück, so ist seine Geschwindigkeit

$$c = \frac{30\,\text{m}}{5\,\text{sec}} = \frac{30}{5}\,\frac{\text{m}}{\text{sec}} = 6\,\frac{\text{m}}{\text{sec}} = 6\,\text{m} \cdot \text{sec}^{-1},$$

und die entsprechende Einheit der Geschwindigkeit $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ oder $\mathrm{m} \cdot \mathrm{sec}^{-1}$ (gesprochen „Meter in der Sekunde").

Was man hiernach unter den Geschwindigkeitseinheiten

$$\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}} = \mathrm{cm} \cdot \mathrm{sec}^{-1}; \ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}} = \mathrm{km} \cdot \mathrm{min}^{-1}$$

zu verstehen hat, ist ohne weiteres klar.

Ist allgemein L die Längeneinheit, T die Zeiteinheit, so ist $\frac{L}{T} = L \cdot T^{-1}$ die entsprechende Geschwindigkeitseinheit. Man nennt

$$L\,T^{-1}$$

auch die Dimension der Geschwindigkeit.

Anmerkung. Wir werden im folgenden die Schreibart $L\,T^{-1}$ mit negativem Exponenten nur gebrauchen, wenn Längen- und Zeiteinheit durch die allgemeinen Größen L und T gegeben sind; sind dagegen L und T im besondern, z. B. als m und sec gegeben, so wollen wir $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ schreiben.

15.

Analog der Bezeichnung Dimension der Geschwindigkeit bezeichnet man jeden Ausdruck, der den Zusammenhang eines abgeleiteten Begriffes mit den Fundamentaleinheiten darstellt, als die Dimension dieses abgeleiteten Begriffes; so ist

m^2 oder allgemein L^2 die Dimension einer Fläche,

m^3 oder allgemein L^3 die Dimension eines Körpers.

Das Hinzufügen der Dimension zu einem abgeleiteten Begriffe zeigt nicht nur ohne weiteres, aus welchen Fundamentaleinheiten und auf welche Weise er aus diesen abgeleitet ist, sondern bietet noch zwei weitere, wohl zu schätzende Vorteile.

Setzt man nämlich in den Gleichungen (2) und (3) des § 13 den Zahlen ihre Einheiten hinzu, so lauten sie

$$s\,\mathrm{m} = c\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} \cdot t\,\mathrm{sec};$$

$$t\,\mathrm{sec} = s\,\mathrm{m} : c\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

Da auf beiden Seiten dieselben Benennungen vorkommen

müssen, so müssen sich die Benennungen auf den rechten Seiten dieser Gleichungen teilweise heben; man kann also mit den Dimensionszeichen hier wie überall wie mit algebraischen Größen rechnen, wodurch die Rechnung und namentlich die Probe auf ihre Richtigkeit sehr erleichtert wird. Die stets nötige Homogenität der Größengleichungen spielt in der Mechanik eine wichtige Rolle.

Der zweite Vorteil der Dimensionsbezeichnung besteht darin, daß man sehr leicht von einem Maßsysteme zu einem andern übergehen, d. h. alle Angaben in andere Maßsysteme umrechnen kann. Hat man z. B. für die Geschwindigkeit eines sich gleichförmig bewegenden materiellen Punktes den Wert

$$c = 300\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}},$$

so erhält man sofort, wenn man von den Einheiten m und min zu den Einheiten cm und sec übergehen will,

$$c = 300\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{min}} = 300 \cdot \frac{100\,\mathrm{cm}}{60\,\mathrm{sec}} = 300 \cdot \frac{5}{3}\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}}$$

$$= 500\,\frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{sec}},$$

so daß der Umrechnungsfaktor $\frac{5}{3}$ allein und ohne weiteres aus der Dimensionsbezeichnung gewonnen wird.

16.

Gleichförmige Kreisbewegung eines materiellen Punktes. Bewegt sich ein materieller Punkt P gleichförmig auf einem Kreise mit dem Radius r m, und ist T sec die Zeit, während der Punkt die ganze Peripherie $2\pi r$ des Kreises durchläuft, so ist seine Geschwindigkeit c, hier auch Umfangsgeschwindigkeit genannt,

$$c = \frac{2\pi r}{T}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}. \tag{1}$$

Konstruiert man nun (Fig. 1) zu dem Kreise, auf dem sich der Punkt P bewegt, einen konzentrischen mit dem Radius 1 und ordnet dem Punkte P auf diesem Einheitskreise den Punkt E dergestalt zu, daß E diesen Einheitskreis in derselben Zeit T gleichförmig durchläuft, in der P

den Kreis mit dem Radius r durchläuft, so ist die Umfangsgeschwindigkeit γ dieses Punktes E durch die Gleichung

$$(2) \qquad \gamma = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{\sec}$$

bestimmt. Diese Größe γ ist aber der Bogen, den E auf dem Einheitskreise in der Zeiteinheit durchläuft. Gelangt P auf dem Kreise mit dem Radius r in der Zeiteinheit nach P', so ist E nach E' gekommen, also ist γ der Bogen EE'; durch diesen Bogen aber wird der Winkel EME' gemessen (vergl. Anm. 1). Man nennt deshalb γ die Winkelgeschwindigkeit der Punkte E und P, indem man diese als den Winkel definiert, den der Radius in der Zeiteinheit überstreicht oder, was dasselbe ist, als das Verhältnis des vom Radius in einer bestimmten Zeit überstrichenen Winkels zu dieser Zeit. Bezeichnet man den in der Zeit t durchlaufenen Winkelweg mit σ, so gelten die den Gleichungen des § 13 entsprechenden

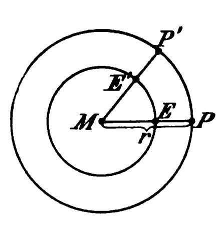


Fig. 1.

$$(3) \qquad \gamma = \frac{\sigma}{t}; \ \sigma = \gamma \cdot t; \ t = \frac{\sigma}{\gamma}.$$

Zwischen der Umfangsgeschwindigkeit aber und der Winkelgeschwindigkeit bestehen die Beziehungen

$$(4) \qquad c = \gamma \cdot r \text{ und } \gamma = \frac{c}{r}.$$

Man erhält also die Winkelgeschwindigkeit eines sich auf einem Kreise mit dem Radius r gleichförmig bewegenden materiellen Punktes, wenn man die Umfangsgeschwindigkeit durch den Radius des Kreises dividiert oder, wie man auch zu sagen pflegt, auf den Einheitskreis reduziert.

Die Dimension der Winkelgeschwindigkeit ist, wie aus (4) folgt,

$$\frac{1}{\sec} \text{ oder allgemein } \frac{L^0}{T} = L^0 T^{-1}.$$

Anmerkung 1. Wie in der Analysis ist es auch in der Mechanik nötig, einen Winkel nicht durch das ganz willkürliche Maß in Graden, sondern durch Bogenmaß zu messen. Darunter versteht man die Länge des zum Winkel gehörenden Bogens des mit dem Radius 1 um den Scheitel ge-

schlagenen Kreises. Ist x das Bogenmaß, φ das Gradmaß eines Winkels, so besteht, da die Peripherie des Einheitskreises die Länge 2π hat, zwischen beiden die Proportion

$$x : 2\pi = \varphi : 360,$$

woraus

$$x = \frac{\pi}{180} \cdot \varphi \text{ und } \varphi = \frac{180^0}{\pi} \cdot x$$

folgt. Nun ist

$$\frac{\pi}{180} = 0{,}01745 \text{ und } \frac{180^0}{\pi} = 57^0{,}29578;$$

also erhält man von einem in Graden ausgedrückten Winkel sein Bogenmaß, wenn man die Anzahl seiner Grade mit 0,01745 multipliziert, und von einem in Bogenmaße ausgedrückten Winkel sein Maß in Graden, wenn man $57^0{,}29578$ mit seinem Bogenmaße multipliziert (vergl. Trigonometrie § 60).

Anm. 2. In der Praxis (Maschinenlehre) gibt man häufig nicht die Winkelgeschwindigkeit eines sich auf einem Kreise gleichförmig bewegenden Punktes, sondern die Anzahl der vollen Umdrehungen (Touren) in einer bestimmten Zeit, meistens in einer Minute, an. Ist γ die Winkelgeschwindigkeit in der Sekunde, n die Tourenzahl in der Minute, so macht der Punkt in einer Sekunde $\frac{n}{60}$ Touren oder der zugehörige Punkt auf dem Einheitskreise legt in der Sekunde den Weg $2\pi \cdot \frac{n}{60}$ zurück, und das ist die Winkelgeschwindigkeit. Es besteht also zwischen Winkelgeschwindigkeit γ in der Sekunde und Tourenzahl n in der Minute die Gleichung

$$\gamma = \frac{2\pi}{60} \cdot n \text{ und umgekehrt } n = \frac{60}{2\pi} \cdot \gamma,$$

d. h. es ist für $\pi = 3{,}1416$

$$\gamma = 0{,}105\, n \text{ und } n = 9{,}549\, \gamma,$$

d. h. die Winkelgeschwindigkeit in der Sekunde ist rund ein Zehntel der Tourenzahl in der Minute und umgekehrt die Tourenzahl in der Minute rund das Zehnfache der Winkelgeschwindigkeit in der Sekunde.

Für die Umfangsgeschwindigkeit erhält man durch Einführung von n ebenso den Wert

$$c = \frac{2\pi r \cdot n}{60} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

In der Maschinentechnik pflegt r in Millimetern, c aber in Metern ausgedrückt zu werden, so daß man die in der Praxis übliche Formel

$$c = \frac{2\pi r \cdot n}{60 \cdot 1000} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$$

erhält.

17.

Die ungleichförmige Bewegung. Bewegt sich ein materieller Punkt so, daß er in gleichen Zeiten ungleiche Wege zurücklegt, so heißt seine Bewegung ungleichförmig. Bei ihr findet also die Proportionalität zwischen Weg und Zeit nicht mehr statt.

Bei einer ungleichförmigen Bewegung muß man zwischen der mittleren Geschwindigkeit während eines bestimmten Zeitabschnitts und der Geschwindigkeit in einem bestimmten Augenblicke (Zeitpunkte) unterscheiden.

Unter der mittleren Geschwindigkeit eines materiellen Punktes während eines bestimmten Zeitraums versteht man den Weg, den der Punkt während dieser Zeit durchschnittlich in der Zeiteinheit zurücklegt oder die Geschwindigkeit, die ein sich gleichförmig bewegender Punkt haben müßte, um die gleiche Strecke s in der gleichen Zeit t, wie der sich ungleichförmig bewegende Punkt zurückzulegen, so daß für die mittlere Geschwindigkeit c_m ebenfalls die Formel (1) des § 13

$$c_m = \frac{s}{t}$$

gilt. Wenn z. B. ein Eisenbahnzug die Strecke von 108 km in 2 Std. zurücklegt, so ist während dieser Zeit seine mittlere Geschwindigkeit

$$\frac{108}{2} \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{Std}} = \frac{108000}{2 \cdot 60 \cdot 60} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} = 15 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}},$$

wobei keine Rücksicht auf die schnellere Fahrt auf den freien Strecken und auf den Aufenthalt auf den Stationen genommen wird.

Dieser Begriff der mittleren Geschwindigkeit ist in der

Regel nur dann ein bestimmter, wenn er sich auf ein ganz bestimmtes Zeitintervall bezieht; sonst werden die Werte der mittleren Geschwindigkeit verschieden sein.

Häufig genügt bei Betrachtung von ungleichförmigen Bewegungen die Angabe dieser mittleren Geschwindigkeit; die in den Lehrbüchern der Physik mitgeteilten Geschwindigkeitstabellen enthalten in der Regel nur mittlere Geschwindigkeiten; wenn z. B. die Geschwindigkeit eines Fußgängers zu $1,5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, die eines Rennpferdes zu $12 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, die eines Schnellzuges zu $14 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ angegeben ist, so ist klar, daß es sich dabei nur um mittlere Geschwindigkeiten handeln kann.

Für die Aufgaben, bei denen die Angabe der mittleren Geschwindigkeit genügt, gelten, wie schon gesagt, die Formeln (1) bis (3) des § 13.

Zur genaueren Untersuchung einer ungleichförmigen Bewegung ist es aber nötig, die Geschwindigkeit in jedem Augenblicke zu beurteilen. Da die Geschwindigkeit sich nicht plötzlich, sondern allmählich ändert, so kann man die ungleichförmige Bewegung für sehr kleine Zeitteilchen als gleichförmig ansehen; bezeichnet τ ein solches kleines Zeitteilchen, in dem die kleine Strecke σ zurückgelegt wird, so ist $c = \frac{\sigma}{\tau}$ die augenblickliche Geschwindigkeit; legt z. B. ein Punkt in $\tau = 0{,}001$ sec den Weg $\sigma = 1$ cm zurück, so ist die Geschwindigkeit in diesem Augenblicke

$$c = \frac{0{,}01}{0{,}001} \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}},$$

d. h. der Punkt würde sich unter Beibehaltung dieser Geschwindigkeit in jeder Sekunde 10 m weit bewegen.

Man kann daher die *momentane Geschwindigkeit* einer ungleichförmigen Bewegung als die *Wegstrecke definieren, die der bewegte Punkt in der Zeiteinheit zurücklegen würde, wenn seine Bewegung in diesem Augenblicke in eine gleichförmige überginge.*

Eine ungleichförmige Bewegung heißt *beschleunigt* oder *verzögert*, je nachdem die momentane Geschwindigkeit fortwährend wächst oder abnimmt.

18.

Graphische Darstellung der Geschwindigkeit und des zurückgelegten Weges. Die Bewegung eines materiellen Punktes kann nach Galilei, dem Begründer der modernen Mechanik, durch eine graphische Darstellung (Diagramm) in folgender Weise veranschaulicht werden.

Nach Wahl einer bestimmten Längeneinheit, etwa 1 mm oder 1 cm, für die Zeiteinheit, trägt man auf einer Geraden, die den Verlauf der Zeit veranschaulichen soll, von einem bestimmten Punkte A, dem zeitlichen Anfangspunkte der Bewegung aus so viele Längeneinheiten ab, als die Zeitdauer der Bewegung Einheiten hat; der Endpunkt, zu dem man so auf der Geraden gelangt, sei B. Dann repräsentiert AB die ganze Dauer der Bewegung, jeder Teil von AB einen Zeitabschnitt und jeder Punkt auf AB einen ganz bestimmten Zeitpunkt. Denkt man sich nun in jedem Punkte X auf AB, A und B eingeschlossen, die Senkrechte (Ordinate) errichtet und auf dieser nach Wahl einer Einheit die Größe der Geschwindigkeit im Zeitpunkte X als Strecke XY abgetragen, so bildet die Gesamtheit der Endpunkte Y eine (gerade oder krumme) Linie, die Geschwindigkeitslinie heißen möge.

Ist zunächst die Bewegung eine gleichförmige, so hat die Geschwindigkeit in jedem Zeitpunkte denselben Wert c; man müßte also in jedem Punkte X auf AB, ebenso in A und B selbst, die Ordinate $XY = c$ machen; die Geschwindigkeitslinie wird daher in diesem Falle eine Gerade, die zur Zeitlinie parallel ist, und die man erhält, wenn man in A und B (Fig. 2) die Lote $AC = BD = c$ errichtet und C und D miteinander verbindet.

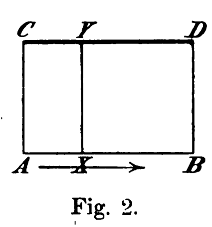


Fig. 2.

Der vom Punkte zurückgelegte Weg wird durch die Formel $s = c \cdot t$ gemessen. Nun wird aber der Inhalt des Rechtecks $ABDC$ durch dieselbe Formel $c \cdot t$ ausgedrückt. Bei dieser graphischen Darstellung wird also der von einem materiellen sich gleichförmig bewegenden Punkte zurückgelegte Weg durch den Inhalt der Figur $ABDC$ dargestellt.

Dieser Satz, daß der Inhalt der von der Zeitlinie, der Geschwindigkeitslinie und den beiden in den Endpunkten der Zeitlinie errichteten Ordinaten begrenzten Figur den von dem materiellen Punkte zurückgelegten Weg darstelle, bleibt auch bei ungleichförmiger Bewegung bestehen; die Geschwindigkeitslinie ist für eine solche Bewegung eine gerade oder krumme Linie, von der kein Teil der Zeitlinie parallel ist (vergl. Fig. 3).

Man denkt sich die ganze Dauer der Bewegung in eine beliebige Anzahl gleicher Teile, jeden von der Größe τ zerlegt und untersucht zunächst die Bewegung während eines solchen Zeitteilchens $\tau = X_1 X_2$; während dieses Zeitteilchens τ habe die Geschwindigkeit von $X_1 Y_1$ bis $X_2 Y_2$ zugenommen. Wäre die Geschwindigkeit innerhalb der Zeit τ die gleiche $X_1 Y_1$ geblieben, so würde das innere Rechteck $X_1 X_2 Y'_2 Y_1$ den in τ zurückgelegten Weg darstellen; hätte aber die Geschwindigkeit während der Zeit τ schon im Anfange die Größe $X_2 Y_2$ gehabt und behalten, so würde das äußere Rechteck $X_1 X_2 Y_2 Y'_1$ den zurückgelegten Weg darstellen. Der wahre zurückgelegte Weg liegt aber zwischen den durch $X_1 X_2 Y'_2 Y_1$ und $X_1 X_2 Y_2 Y'_1$ gegebenen Grenzen. Läßt man τ kleiner und kleiner werden, so nähern sich diese Grenzen immer mehr dem Flächenstücke $X_1 X_2 Y_2 Y_1$; daher gibt die Größe dieses Flächenstücks den Weg während der Zeit τ an. Da sich dieselbe Betrachtung für jedes andere Zeitteilchen τ anstellen läßt, so gilt der obige Satz auch für die ganze Dauer t der Bewegung.

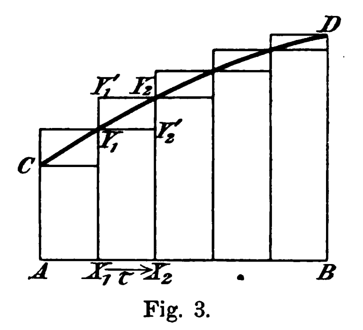


Fig. 3.

Ist die Geschwindigkeitslinie nicht, wie in Fig. 3, steigend, sondern von C nach D fallend, oder erst steigend und dann fallend, so sind die Schlüsse genau dieselben.

Natürlich sind bei der Berechnung des Flächenstücks $ABDC$ die Maßstäbe, nach denen man Zeit und Geschwindigkeit konstruiert hat, zu berücksichtigen.

19.

Die gleichförmig veränderte Bewegung. Die einfachste der unendlich vielen ungleichförmigen Bewegungen ist die (in gerader oder krummer Bahn erfolgende) Bewegung eines materiellen Punktes, bei der sich die Geschwindigkeit proportional der Zeit ändert. Eine solche Bewegung heißt eine gleichförmig veränderte Bewegung, und zwar unterscheidet man eine gleichförmig beschleunigte und eine gleichförmig verzögerte Bewegung, je nachdem die Geschwindigkeit der Zeit proportional zunimmt oder abnimmt.

Den immer gleichbleibenden Geschwindigkeitszuwachs in der Zeiteinheit nennt man die Beschleunigung a (acceleratio). Der Wert der Beschleunigung ist positiv oder negativ zu nehmen, je nachdem die Geschwindigkeit wächst oder abnimmt.

Wird z. B. ein Punkt aus der Ruhe in eine ungleichförmige Bewegung versetzt und ist seine Geschwindigkeit am Ende der ersten Sekunde $3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, am Ende der zweiten Sekunde $6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, am Ende der dritten Sekunde $9 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ usw., so ist diese Bewegung eine gleichförmig beschleunigte und die Beschleunigung in der Sekunde 3 m.

Stellt man die gleichförmig veränderte Bewegung graphisch dar, so wird die Geschwindigkeitslinie, da die Geschwindigkeit, d. i. das in den einzelnen Zeitpunkten zu errichtende Lot in jeder Zeiteinheit um dieselbe Größe a zunimmt, eine gegen die Zeitlinie geneigte gerade Linie, die mit der Zeitlinie einen um so größern Winkel bildet, je größer die Beschleunigung a ist.

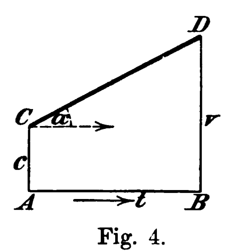


Fig. 4.

Ist AB die Zeitlinie, AC die Anfangs- und BD die Endgeschwindigkeit nach t Zeiteinheiten, so erhält man die Darstellung in Fig. 4, wenn die Bewegung gleichförmig beschleunigt ist, oder die Darstellung in Fig. 5 bei

gleichförmig verzögerter Bewegung. In beiden Fällen ist das durch die Zeitlinie, die Geschwindigkeitslinie und die Ordinaten in den Endpunkten der Zeitlinie begrenzte Flächenstück $ABDC$ ein Trapez, das in ein Dreieck übergeht, wenn im ersteren Falle die Anfangsgeschwindigkeit $AC = 0$ ist oder im letzteren Falle die Endgeschwindigkeit $BD = 0$ wird.

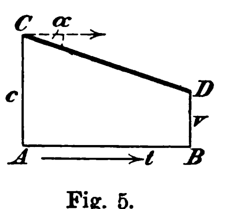


Fig. 5.

20.

Die Grundformeln der gleichförmig veränderten Bewegung. Beginnt eine gleichförmig veränderte Bewegung eines materiellen Punktes mit der Geschwindigkeit c und ist a die Beschleunigung in jeder Sekunde, so ist $+ a t$ oder $- a t$ der Zuwachs oder die Abnahme der Geschwindigkeit in t Sekunden, je nachdem die Bewegung gleichförmig beschleunigt oder verzögert ist. Bezeichnet man daher die Geschwindigkeit zur Zeit t mit v (velocitas zugleich an variabilis erinnernd), so gilt die Gleichung

$$(1) \qquad v = c \pm a t.$$

Hieraus folgt für die Beschleunigung a der Wert

$$(2) \qquad a = + \left(\frac{v - c}{t}\right).$$

In der Figur (vergl. Fig. 4 und 5) erscheint die Beschleunigung als die trigonometrische Tangente des Winkels α, durch den die Steigung der Linie CD bestimmt ist.

Aus dem allgemeinen in § 18 aufgestellten Satze und aus § 19 folgt, daß die Länge des vom Punkte bei einer gleichförmig veränderten Bewegung durchlaufenen Weges durch den Inhalt des Trapezes $ABDC$ angegeben wird; der Inhalt dieses Trapezes aber ist, da $AB = t$, $AC = c$ und $BD = v$,

$$\frac{1}{2}\left(c + v\right) \cdot t.$$

Setzt man hier den Wert von v aus der Formel (1) ein, so erhält man

$$(3) \qquad s = c t \pm \frac{1}{2} a t^2.$$

Erhebt man die Gleichung (1) aufs Quadrat, so erhält man

$$v^2 = c^2 \pm 2\,act + a^2t^2,$$

worin für $\pm 2\,act + a^2t^2 = \pm 2\,as$ aus Gleichung (3) gesetzt werden kann; man erhält so die zwei weiteren Formeln

$$(4) \qquad v^2 = c^2 \pm 2\,as \text{ oder } v = \sqrt{c^2 \pm 2\,as}$$

$$(5) \qquad s = \pm \frac{v^2 - c^2}{2\,a}.$$

21.

Für die überaus wichtige Formel (3) des vorigen Paragraphen seien im folgenden noch zwei weitere Beweise mitgeteilt.

1. Um den Weg s zu finden, den der materielle Punkt, dessen Geschwindigkeit im Anfange der ersten Sekunde c und am Ende der $t$ten Sekunde $c + at$ ist, in diesen t Sekunden durchläuft, denke man sich einen zweiten Punkt, der sich gleichzeitig mit der gleichförmigen Verzögerung a bewege und dessen Geschwindigkeit am Anfange der ersten Sekunde $c + at$, an deren Ende $c + at - a$, usw., am Ende der $t$ten Sekunde c sei. Offenbar wird dieser zweite Punkt in diesen t Sekunden denselben Weg zurücklegen, wie der erstere. Denkt man sich nun einen dritten Punkt, dessen Geschwindigkeit in jedem Zeitpunkte gleich der Summe der Geschwindigkeiten der beiden ersten Punkte ist, so wird dieser in t Sekunden auch einen Weg gleich der Summe der Wege der beiden ersten Punkte, also den Weg $2\,s$ zurücklegen. Die Geschwindigkeit dieses dritten Punktes aber ist im Anfange der Bewegung $2\,c + at$, am Ende der ersten Sekunde $2\,c + at$ usw., am Ende der $t$ten Sekunde $2\,c + at$, d. h. dieser dritte Punkt bewegt sich gleichförmig, sein Weg in t Sekunden ist also durch die Gleichung $2\,s = (2\,c + at)\,t$ bestimmt, woraus

$$s = ct + \frac{1}{2}\,at^2$$

folgt.

2. Im Anfange der Bewegung ist die Geschwindigkeit c, am Ende der ersten Sekunde $c + a$; da die Geschwindigkeit in dieser Zeit gleichmäßig zunimmt, also in der ersten Hälfte

um gerade soviel als in der zweiten, so beträgt die mittlere Geschwindigkeit in der ersten Sekunde $c + \frac{1}{2} a$; ebenso ergibt sich die mittlere Geschwindigkeit in der zweiten Sekunde zu $c + \frac{3}{2} a$, in der dritten zu $c + \frac{5}{2} a$ usw., in der t ten Sekunde zu $c + \frac{2t-1}{2} a$.

Somit ist die Länge s des in t Sekunden zurückgelegten Weges

$$s = \left(c + \frac{1}{2} a\right) + \left(c + \frac{3}{2} a\right) + \left(c + \frac{5}{2} a\right) + \ldots + \left(c + \frac{2t-1}{2} a\right) = c \cdot t + \frac{a}{2}\left(1 + 3 + 5 + \ldots + (2t-1)\right).$$

Der Ausdruck in der Klammer aber ist eine arithmetische Reihe erster Ordnung, deren Anfangsglied 1, deren letztes Glied $2t - 1$ ist und die aus t Gliedern besteht; deren Summe ist (vergl. Arithmetik § 244)

$$(1 + 2t - 1) \cdot \frac{t}{2} = t^2,$$

so daß sich ergibt

$$s = ct + \frac{1}{2} a t^2.$$

22.

Besondere Fälle der gleichförmig veränderten Bewegung. Beginnt die gleichförmig beschleunigte Bewegung eines materiellen Punktes aus der Ruhelage, so gehen die Formeln des § 20 über in

(1) $$v = at;$$

(2) $$a = \frac{v}{t};$$

(3) $$s = \frac{1}{2} a t^2;$$

(4) $$v = \sqrt{2as};$$

(5) $$s = \frac{v^2}{2a};$$

in diesem Falle gelten also die folgenden Gesetze:

1. die Geschwindigkeit ist der Zeit proportional;

2. der durchlaufene Weg ist proportional dem Quadrate der Zeit und proportional dem Quadrate der erlangten Endgeschwindigkeit;

3. die Endgeschwindigkeit ist proportional der Quadratwurzel aus dem durchlaufenen Wege.

Endigt ferner eine gleichförmig verzögerte Bewegung mit der Ruhelage, so wird $v = 0$ und aus der Formel (1) des § 20 folgt $0 = c - a\,t$ oder

$$c = a\,t;\; t = \frac{c}{a}, \tag{6}$$

woraus bestimmt werden kann, nach welcher Zeit ein sich in gleichförmig verzögerter Bewegung befindlicher materieller Punkt zur Ruhe kommt. Für die Länge des durchlaufenen Weges erhält man aus Formel (3) § 20 sofort

$$s = \frac{1}{2}\,a\,t^2 = \frac{1}{2}\,\frac{c^2}{a}. \tag{7}$$

23.

Dimension der Beschleunigung. Da verschiedene Beschleunigungen ihrer Größe nach verglichen, also gemessen werden können, muß eine Einheit für die Beschleunigung festgesetzt werden. Diese Einheit der Beschleunigung ist wie die Einheit der Geschwindigkeit ebenfalls durch die Längeneinheit und die Zeiteinheit bestimmt; sie ist gleichfalls eine abgeleitete Einheit.

Die Formel (2) des § 20 $a = \frac{v - c}{t}$ sagt aus, daß die Beschleunigung das Verhältnis der Zunahme der Geschwindigkeit zu der Länge der Zeit ist, in der diese Zunahme erfolgt. Setzt man der Geschwindigkeit und der Zeit ihre Benennungen hinzu, so ergibt sich die Benennung der Beschleunigung:

$$a = (v - c)\,\frac{\text{m}}{\text{sec}} : t\,\text{sec} = \frac{v - c}{t}\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$$

Sind also m die Längen- und sec die Zeiteinheit, so ist $\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ die entsprechende Einheit der Beschleunigung.

Ist allgemein L die Längeneinheit, T die Zeiteinheit, so ist $\frac{L}{T^2} = L\,T^{-2}$ die Beschleunigungseinheit.

$$L\,T^{-2}$$

heißt die **Dimension der Beschleunigung.**

Das Umrechnen von einem Maßsysteme in ein anderes ist entsprechend wie bei der Geschwindigkeit (§ 15). Ist z. B. für die Bewegung eines materiellen Punktes die Beschleunigung in der Sekunde 2 m, so ist die Beschleunigung in km und min

$$a = 2\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2} = 2 \cdot \frac{0{,}001\ \mathrm{km}}{\left(\frac{1}{60}\ \mathrm{min}\right)^2} = 2 \cdot 3{,}6\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}^2} = 7{,}2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}^2}.$$

24.

Ungleichförmige Kreisbewegung eines materiellen Punktes. Bewegt sich ein materieller Punkt ungleichförmig auf einem Kreise und wird diese Bewegung auf den Einheitskreis reduziert, so erhält man analog dem Begriffe der Winkelgeschwindigkeit (§ 16) den Begriff der **Winkelbeschleunigung.** Bei der gleichförmig beschleunigten Kreisbewegung versteht man darunter den immer gleichbleibenden Zuwachs, den die Winkelgeschwindigkeit in der Sekunde erfährt.

Für einen Punkt des Einheitskreises gelten dann die nämlichen Gleichungen, wie für die gleichförmig beschleunigte Bewegung eines Punktes überhaupt; bezeichnet also ω die veränderliche Winkelgeschwindigkeit, γ die am Anfange der Bewegung vorhandene Winkelgeschwindigkeit, α die Größe der Winkelbeschleunigung in der Sekunde, endlich σ den von einem Punkte des Einheitskreises durchlaufenen Winkelweg, so gelten die den Gleichungen (1) und (3) des § 20 entsprechenden Grundgleichungen für die gleichförmig beschleunigte Kreisbewegung

$$(1) \qquad \omega = \gamma \pm \alpha t$$

$$(2) \qquad \sigma = \gamma t \pm \frac{1}{2}\,\alpha t^2,$$

aus denen die den Gleichungen (2), (4) und (5) des § 20 entsprechenden in derselben Weise wie dort folgen.

Für den Radius r erhält man die entsprechenden Formeln für die **Umfangsbewegung** durch die Formeln

$$v = r \cdot \omega; \quad s = r \cdot \sigma.$$

Als **Dimension der Winkelbeschleunigung** ergibt sich leicht

$$L^0 \, T^{-2}.$$

25.

Die im vorstehenden Buche abgeleiteten Formeln sind als die Fundamentalformeln der ganzen Mechanik anzusehen, und ist es deshalb nötig, sie wohl dem Gedächtnis einzuprägen. Wegen ihrer Wichtigkeit mögen sie im Zusammenhange nochmals aufgeführt werden.

Für die **gleichförmige** Bewegung ergaben sich die Formeln

$$(1) \quad c = \frac{s}{t}; \qquad (2) \quad s = c \cdot t; \qquad (3) \quad t = \frac{s}{c}.$$

Für die **gleichförmig beschleunigte** Bewegung waren die Formeln abgeleitet

$$(4) \quad v = c \pm a\,t; \qquad (5) \quad a = \frac{v - c}{t};$$

$$(6) \quad s = c\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2;$$

$$(7) \quad v = \sqrt{c^2 \pm 2\,a\,s}; \qquad (8) \quad s = \frac{v^2 - c^2}{2\,a}.$$

War die Bewegung eine gleichförmig beschleunigte aus der Ruhelage, so waren die Formeln

$$(9) \quad v = a\,t; \qquad (10) \quad a = \frac{v}{t};$$

$$(11) \quad s = \frac{1}{2}\,a\,t^2; \qquad (12) \quad v = \sqrt{2\,a\,s}; \qquad (13) \quad s = \frac{v^2}{2a}.$$

Endete eine gleichförmig verzögerte Bewegung mit der Ruhelage, so war

$$(14) \quad t = \frac{c}{a}; \qquad (15) \quad s = \frac{c^2}{2\,a}.$$

Aufgaben.

1. Welchen Weg s legt ein Radfahrer a) in $t = 25$ sec; b) in $t = 1$ min; c) in $t = 3$ min 45 sec zurück, wenn er sich mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $c = 8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ bewegt?

Antw.: $s = c\,t$; a) 200 m; b) 480 m; c) 1,800 km.

2. Welchen Weg s legt ein Eisenbahnzug in 1 Std. zurück, wenn er die mittlere Geschwindigkeit $c = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ hat?

Antw.: $s = c \cdot t = 72$ km.

3. Ein Körper hat die Geschwindigkeit $c = 85 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$; wieviel m beträgt seine Geschwindigkeit in der Minute?

Antw.: $51 \frac{\text{m}}{\text{min}}$.

4. Die Erde dreht sich in $T = 86\,164$ sec um ihre Achse; wie groß ist die Geschwindigkeit c eines Punktes am Äquator, dessen Umfang $u = 5400$ Meilen ist? (1 Meile = 7420,4 m).

Antw.: $c = \frac{u}{T} \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 465 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

5. Wie groß ist die Geschwindigkeit c eines Punktes auf der Erdoberfläche, der die geographische Breite φ hat? a) $\varphi = 30^0$; b) $\varphi = 51^0 20'$.

Antw.: $c = \frac{u \cdot \cos\varphi}{T}$; a) $403 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; b) $291 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

6. Wieviel km ist eine Gewitterwolke entfernt, wenn zwischen Blitz und Donner eine Zeitdauer von $t = 8$ sec beobachtet wurde und die Geschwindigkeit des Schalles in der Luft $c = 330 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ beträgt?

Antw.: $s = c \cdot t = 2{,}640$ km.

7. In welcher Zeit t legt eine Brieftaube, deren Geschwindigkeit $c = 38 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ist, die Strecke $s = 15$ km zurück?

Antw.: $t = \frac{s}{c} = \frac{15\,000}{38}$ sec $= 395$ sec $= 6$ min 35 sec.

8. Ein Punkt am Umfange eines sich gleichförmig drehenden Schwungrades, dessen Durchmesser $d = 2\,r = 2400$ mm ist, hat die Geschwindigkeit $c = 6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; a) wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit γ? b) welcher Winkel φ in Gradmaß entspricht dieser Winkelgeschwindig-

keit? c) wieviele Touren macht das Rad in $t = 5$ min? d) wieviele **Touren** in $t = 1$ Std.? ($\pi = 3\,{}^1/_7$).

Antw.: a) $\gamma = \frac{c}{r} = \frac{6}{1,2}\,\frac{1}{\text{sec}} = 5\,\frac{1}{\text{sec}}$; b) $\varphi = 286^0{,}48$;

c) $n = \frac{c\,t\,.\,60\,.\,1000}{2\,\pi\,r} = 238{,}64$ Touren; d) 2864 Umdrehungen.

9. Ein Punkt am Umfange eines Schwungrades, dessen **Höhe** $d = 2\,r = 4000$ mm ist, hat die Geschwindigkeit $c = 9\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$; a) wie groß ist seine Winkelgeschwindigkeit? in wieviel Minuten b) in rundem Überschlag c) genau macht das Rad 1000 Touren?

Antw.: a) $\gamma = \frac{9}{2}\,\frac{1}{\text{sec}} = 4{,}5\,\frac{1}{\text{sec}}$; b) 22 min;

c) $t = \frac{2\,\pi\,r}{c\,.\,1000} \cdot \frac{n}{60}$ min $= 23{,}28$ min.

10. Welchen Durchmesser muß man einer Riemenscheibe geben, damit sie bei einer Umfangsgeschwindigkeit von $c = 8\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ in der Minute 250 Touren macht?

Antw.: $d = 2\,r = \frac{c\,.\,60\,.\,1000}{\pi\,.\,n}$ mm $= 611$ mm.

11. Eine Lokomotive erlangt beim Anlaufe in jeder Sekunde eine Beschleunigung $a = 30\,\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$; in welcher Zeit t hat sie die Geschwindigkeit $v = 12\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erreicht, und welchen Weg hat sie bis dahin zurückgelegt?

Antw.: $t = \frac{v}{a}$ sec $= 40$ sec; $s = \frac{v^2}{2\,a} = 240$ m.

12. In welcher Zeit hat ein Körper, der sich von der Ruhelage aus mit der Beschleunigung $a = 5\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ bewegt, die Strecke $s = 1000$ m zurückgelegt, und wie groß ist seine Endgeschwindigkeit?

Antw.: $t = \sqrt{\frac{2\,s}{a}} = 20$ sec; $v = \sqrt{2\,a\,s} = 100$ m.

13. Ein sich gleichförmig beschleunigt bewegender Punkt legt in $t = 25$ sec die Strecke $s = 5$ km zurück; wie groß ist seine Beschleunigung, wie groß seine Endgeschwindigkeit?

Antw.: $a = \frac{2\,s}{t^2} = 16\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$; $v = \frac{2\,s}{t} = 400\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

14. Ein Körper, der sich aus der Ruhe gleichförmig beschleunigt bewegt, hat die Endgeschwindigkeit $v = 15 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erreicht und im ganzen den Weg $s = 0{,}450$ km zurückgelegt; wie groß war seine Beschleunigung und wie lange war er in Bewegung?

Antw.: $a = \frac{v^2}{2\,s} = 25 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$; $t = \frac{2\,s}{v} = 60$ sec $= 1$ min.

15. Ein Eisenbahnzug von $15 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ mittlerer Geschwindigkeit verliert durch Bremsen in jeder Sekunde $\frac{1}{2}$ m; a) nach wieviel sec kommt er zur Ruhe und welchen Weg legt er bis dahin noch zurück? b) wieviel müßte er durch Bremsen in der sec an Geschwindigkeit verlieren, wenn er nur noch 100 m laufen sollte?

Antw.: a) $t = \frac{c}{a} = 30$ sec; $s = \frac{c^2}{2\,a} = 225$ m;

b) $a = \frac{c^2}{2\,s} = 1{,}125 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

16. Ein Körper, der die Geschwindigkeit $c = 3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ hat, erhält die Beschleunigung $a = 2 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$; in welcher Zeit t erlangt er die Geschwindigkeit $v = 15 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, und welche Strecke s hat er bis dahin zurückgelegt?

Antw.: $t = \frac{v - c}{a} = 600$ sec $= 10$ min; $s = \frac{v^2 - c^2}{2\,a} = 5400$ m.

17. Ein Körper besitzt die Geschwindigkeit $c = 4 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und wird in eine gleichförmig beschleunigte Bewegung versetzt, deren Beschleunigung $a = 5 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ ist; in welcher Zeit legt er den Weg $s = 6{,}050$ km zurück?

Antw.: $t = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 2\,a\,s}}{a} = 48{,}4$ sec.

18. Wie groß ist die Anfangs- und die Endgeschwindigkeit eines sich gleichförmig verzögert bewegenden Körpers, der in $t = 25$ sec die Strecke $s = 3125$ m zurücklegt, und dessen Verzögerung $a = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ beträgt?

Antw.: $c = \frac{s + \frac{1}{2}\,a\,t^2}{t} = 250 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; $v = \frac{s - \frac{1}{2}\,a\,t^2}{t} = 0$.

19. Welche Anfangsgeschwindigkeit und welche Beschleunigung muß ein Körper haben, der bei gleichförmig beschleunigter Bewegung in $t = 20$ sec die Strecke $s = 44$ m zurücklegt und die Endgeschwindigkeit $v = 4 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erreicht hat?

Antw.: $c = \frac{2s - vt}{2} = 0{,}4 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; $a = \frac{v - c}{t} = 0{,}18 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

20. In welcher Zeit legt ein Körper, der die Geschwindigkeit $c = 300 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ hat und in jeder Sekunde die Verzögerung $a = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ erleidet, die Strecke $s = 1250$ m zurück?

Antw.: $t = \frac{c - \sqrt{c^2 - 2as}}{a} = 5$ sec.

21. Von einem Orte aus bewegen sich, ihre Bewegung gleichzeitig beginnend, zwei Körper a) in derselben; b) in entgegengesetzter Richtung gleichförmig beschleunigt; der eine hat die Beschleunigung $a_1 = 20 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$, der andere die Beschleunigung $a_2 = 15 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$; wie groß ist ihre Entfernung e nach $t = 10$ sec?

Antw.: a) $e = s_1 - s_2 = 250$ cm; b) $e = s_1 + s_2 = 1750$ cm.

22. Von demselben Orte aus bewegen sich zwei Körper gleichförmig beschleunigt mit der Beschleunigung $a = 3{,}4 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$; wie groß ist ihre Entfernung e nach $t = 25$ sec, wenn der eine seine Bewegung 3 sec später als der andere beginnt?

Antw.: $e = 239{,}7$ m.

23. In welcher Zeit legt ein sich gleichförmig beschleunigt bewegender Körper, dessen Anfangsgeschwindigkeit $c = 3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und dessen Endgeschwindigkeit $v = 15 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ist, den Weg $s = 160$ m zurück?

Antw.: $t = 240$ sec $= 4$ min.

24. Die Geschwindigkeit eines Körpers, die $c = 24 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ beträgt, soll in 1 min auf die Hälfte durch gleichmäßige Verzögerung gebracht werden; wie groß muß diese Verzögerung sein?

Antw.: $a = 20 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$.

Zweites Buch.

Zusammensetzung und Zerlegung von Bewegungen.

26.

Erklärungen. Befindet sich die Bahn eines materiellen Punktes an einem festen Körper, der selbst in Bewegung ist, so sagt man, der Punkt führe zwei Bewegungen aus, nämlich die Bewegung in seiner Bahn relativ zu dem Körper und die Bewegung, die er mit dem festen Körper ausführt. Ein Beispiel einer solchen doppelten Bewegung bietet ein Gegenstand, der sich auf dem Verdecke eines fahrenden Schiffes von einem Orte nach einem andern bewegt. Obgleich der materielle Punkt in Wirklichkeit nur eine einzige Bewegung ausführt, so pflegt man doch zu sagen, er führe zugleich zwei Bewegungen aus, um damit hervorzuheben, wie seine wirkliche Bewegung entstanden ist.

Die Bewegung, die der Punkt wirklich ausführt, heißt die resultierende Bewegung oder die Mittelbewegung; die beiden Bewegungen, aus denen die resultierende entsteht, heißen die Komponenten oder die Seitenbewegungen.

Die Lösung der Aufgabe, aus den beiden Seitenbewegungen die resultierende Bewegung zu bestimmen, nennt man die Zusammensetzung der Bewegungen.

27.

Das Parallelogramm der Bewegungen. Kennt man die Bahnen und die übrigen Gesetze zweier Seitenbewegungen, so kann man den Ort des materiellen Punktes zu einer bestimmten Zeit t in folgender Weise angeben.

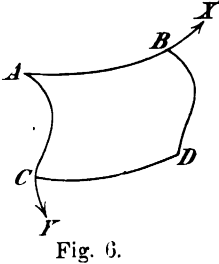


Fig. 6.

Es sei (Fig. 6) A der Ort des materiellen Punktes zur Zeit 0, AX seine Bahn an dem festen Körper, AY die Bahn, die der feste Körper selbst beschreibt. Man bestimme zunächst aus beiden Bewegungsgesetzen die Länge der

beiden Wege für die Zeit t; wenn nun in dieser Zeit der materielle Punkt auf seiner Bahn von A nach B, der Körper aber auf der seinigen von A nach C gelangt wäre, so erhält man offenbar den Ort des materiellen Punktes zur Zeit t, wenn man in C die Bahnstrecke $A\,B$ sich selbst parallel als $C\,D$ anträgt: der Endpunkt D dieser Strecke ist der Ort des materiellen Punktes zur Zeit t. Zu genau demselben Resultate gelangt man aber, wenn man die Bahnstrecke $A\,C$ sich selbst parallel in B als $B\,D$ anträgt.

Hierbei betrachtet man also die beiden Bewegungen ganz unabhängig voneinander und nimmt an, daß ein materieller Punkt, der **gleichzeitig** mehrere Bewegungen ausführt, an denselben Ort gelangt, an den er gelangt wäre, wenn er die einzelnen Bewegungen **nacheinander** in beliebiger Reihenfolge einzeln ausgeführt hätte.

Diese Grundannahme der Unabhängigkeit der Bewegungen — man nennt sie auch das Prinzip der Superposition der Bewegungen — kann freilich nicht bewiesen werden (alle Versuche, dies zu tun, sind nur Scheinbeweise), doch hat sie sich durch alle Erfahrungen, so streng und genau diese auch geprüft wurden, bestätigt gezeigt.

Sind insbesondere die Bahnen $A\,X$ und $A\,Y$ geradlinig, so ist D der vierte Eckpunkt des aus den Strecken AB und $A\,C$ und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel α gebildeten Parallelogramms (Fig. 7). Da die Elemente jeder krummlinigen Bahn als geradlinig angesehen werden können, gilt die Konstruktion des Parallelogramms auch für die einzelnen Elemente der krummlinigen Bahnen.

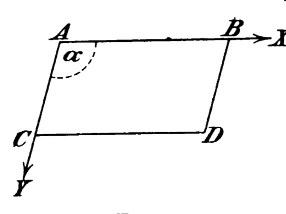


Fig. 7.

Man nennt daher das Prinzip, das der Konstruktion der Lage des materiellen Punktes zur Zeit t zugrunde liegt, auch das Prinzip des Parallelogramms der Bewegungen.

Übrigens sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß dieses Prinzip nur Gültigkeit hat, wenn es sich um fortschreitende Bewegungen handelt.

Welches die Bahn des materiellen Punktes sei, auf der er von A nach D gelangt, läßt sich allgemein nicht entscheiden: das hängt wesentlich von der Beschaffenheit der Seitenbewegungen ab.

28.

Lehrsatz. Sind die beiden Seitenbewegungen geradlinig und gleichförmig, so ist auch die resultierende Bewegung geradlinig und gleichförmig und ihre Bahn die Diagonale des aus den Seitenbewegungen gebildeten Parallelogramms.

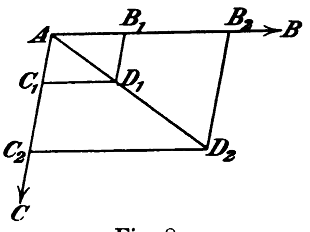


Fig. 8.

Beweis. Sind AB und AC (Fig. 8) die unter dem Winkel $BAC = \alpha$ gegeneinander geneigten Richtungen der Seitenbewegungen, ist c_1 die Geschwindigkeit in der ersteren, c_2 die in der zweiten Richtung und konstruiert man, wie in § 27 gelehrt, die Orte D_1 und D_2 des materiellen Punktes zu den Zeiten t_1 und t_2, so sind die entstehenden Parallelogramme $AB_1D_1C_1$ und $AB_2D_2C_2$ ähnliche Figuren, da ihre Winkel gleich und die Verhältnisse der gleiche Winkel einschließenden Seiten gleich sind; es ist nämlich

$$AB_1 = C_1D_1 = c_1 t_1; \quad AC_1 = B_1D_1 = c_2 t_1;$$
$$AB_2 = C_2D_2 = c_1 t_2; \quad AC_2 = B_2D_2 = c_2 t_2$$

und daher

$$\frac{AB_1}{AC_1} = \frac{AB_2}{AC_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Da die Parallelogramme auch ähnlich liegen und A ihr Ähnlichkeitspunkt ist, geht die Verbindungslinie von D_1 und D_2 durch A, d. h. die Punkte A, D_1 und D_2 liegen auf einer geraden Linie.

Derselbe Beweis gilt für zwei beliebige andere Zeitpunkte; es fallen daher alle Punkte der Bahn des materiellen Punktes in die Diagonale AD_2, also ist diese Diagonale die

geradlinige Bahn des materiellen Punktes und $A D_1$ und $A D_2$ sind die in den Zeiten t_1 und t_2 durchlaufenen Wege. Nun ist

$$\frac{A D_1}{A D_2} = \frac{A B_1}{A B_2} = \frac{c_1 t_1}{c_1 t_2} = \frac{t_1}{t_2},$$

oder es verhalten sich die vom Punkte durchlaufenen Wege wie die zu ihnen erforderlichen Zeiten; also ist die Bewegung des Punktes auf der Diagonale gleichförmig.

29.

Die Geschwindigkeit der resultierenden Bewegung erhält man, wenn man das Parallelogramm der Bewegungen für $t = 1$ sec konstruiert, also auf den Bahnen $A B$ und $A C$ die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 der Seitenbewegungen abträgt, aus ihnen und dem Winkel α das Parallelogramm (Parallelogramm der Geschwindigkeiten) konstruiert (Fig. 9): die Diagonale dieses Parallelogramms gibt die Größe c und die Richtung der resultierenden Geschwindigkeit an.

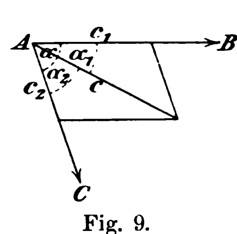


Fig. 9.

Hieraus folgt, daß die Geschwindigkeit der resultierenden Bewegung gleich der Summe der Geschwindigkeiten der Seitenbewegungen wird, wenn $\alpha = 0$ ist, wenn also die beiden Seitenbewegungen gleich gerichtet sind.

Ist aber $\alpha = 180^0$, sind also die beiden Seitenbewegungen entgegengesetzt gerichtet, so ist die Geschwindigkeit der resultierenden Bewegung gleich der Differenz der Geschwindigkeiten der Seitenbewegungen: sind insbesondere in diesem Falle die letzteren Geschwindigkeiten gleich, so ist die resultierende Geschwindigkeit Null, oder der materielle Punkt bleibt in Ruhe.

Für jeden andern Winkel α ist die Geschwindigkeit der resultierenden Bewegung kleiner als die Summe, aber größer als die Differenz der Geschwindigkeiten der Seitenbewegungen.

Anm. Sind α_1 und α_2 die Winkel, die die Richt-

ung von c mit den Richtungen von c_1 und c_2 bildet, so ist die Größe und die Richtung von c durch die Gleichungen

$$c^2 = c_1^{\,2} + c_2^{\,2} + 2\, c_1\, c_2 \cdot \cos \alpha;$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{c_2 \cdot \sin \alpha}{c}; \quad \sin \alpha_2 = \frac{c_1 \cdot \sin \alpha}{c}$$

bestimmt.

Ist insbesondere $\alpha = 90^0$, so gehen diese Gleichungen über in

$$c = \sqrt{c_1^{\,2} + c_2^{\,2}};$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{c_2}{c} = \cos \alpha_2; \quad \sin \alpha_2 = \frac{c_1}{c} = \cos \alpha_1.$$

30.

Zerlegung einer Bewegung. Dem Verfahren, aus zwei Seitenbewegungen eine resultierende Bewegung zusammenzusetzen, entspricht als Umkehrung die Zerlegung einer Bewegung in zwei Komponenten.

Aus dem Vorigen folgt, daß man insbesondere die Geschwindigkeit c einer geradlinigen und gleichförmigen Bewegung aus den Geschwindigkeiten zweier geradlinigen und gleichförmigen Bewegungen entstanden, also auch wieder in diese Seitengeschwindigkeiten zerlegt denken kann. Die Ausführung dieses Verfahrens geschieht dadurch, daß man ein beliebiges Parallelogramm mit c als Diagonale konstruiert; zwei zusammenstoßende Seiten dieses Parallelogramms sind dann die Seitengeschwindigkeiten, aus denen die Mittelgeschwindigkeit entstehen konnte.

Hieraus folgt, daß die Zerlegung einer Geschwindigkeit c in zwei Komponenten auf beliebig vielfache Weise geschehen kann, daß also, soll die Zerlegung in bestimmter Weise erfolgen, noch genauere Bestimmungen gegeben sein müssen. Sind z. B. die Winkel α_1 und α_2 gegeben, die die beiden zu konstruierenden Seitengeschwindigkeiten c_1 und c_2 mit der gegebenen Mittelgeschwindigkeit c bilden sollen, so ist nunmehr die Aufgabe vollständig bestimmt und in eindeutiger Weise konstruierbar. So kann namentlich eine Geschwindigkeit c in zwei aufeinander senkrechte Seitengeschwindigkeiten zerlegt werden, indem man aus dem Endpunkte von c auf die beiden Richtungen der Seitengeschwindigkeiten die Lote fällt.

Anm. Für die Rechnung gelten die Formeln des § 29. Aus ihnen ergeben sich, unter Beibehaltung der Bezeichnungen in Fig. 9, für die Seitengeschwindigkeiten die Werte

$$c_1 = \frac{c \cdot \sin \alpha_2}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}; \quad c_2 = \frac{c \cdot \sin \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}.$$

Ist $\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$, so ist

$$\sin(\alpha_1 + \alpha_2) = 1; \ \sin \alpha_2 = \cos \alpha_1, \ \sin \alpha_1 = \cos \alpha_2,$$

also erhält man in diesem besonderen Falle

$$c_1 = c \cdot \cos \alpha_1; \quad c_2 = c \cdot \cos \alpha_2.$$

Sind außer c die Größen der Seitengeschwindigkeiten c_1 und c_2 gegeben, so sind die Winkel α_1 und α_2 ebenfalls vollständig bestimmt und zwar durch die Gleichungen

$$\cos \alpha_1 = \frac{c^2 + c_1{}^2 - c_2{}^2}{2\, c\, c_1};$$

$$\cos \alpha_2 = \frac{c^2 + c_2{}^2 - c_1{}^2}{2\, c\, c_2}.$$

31.

Lehrsatz. Sind die beiden Seitenbewegungen geradlinig und gleichförmig beschleunigt und ihre Anfangsgeschwindigkeiten gleich Null, so ist auch die resultierende Bewegung geradlinig und gleichförmig beschleunigt.

Beweis. Derselbe ist analog dem Beweise des Lehrsatzes in § 28.

Bestimmt man nach dem Parallelogramm der Bewegungen den Ort D_1, wo sich der Punkt zur Zeit t_1, und den Ort D_2, wo er sich zur Zeit t_2 befindet (Fig. 10), und sind a_1 und a_2 die Beschleunigungen in den Bewegungsrichtungen AB und AC, so sind die Seiten des ersteren Parallelogramms

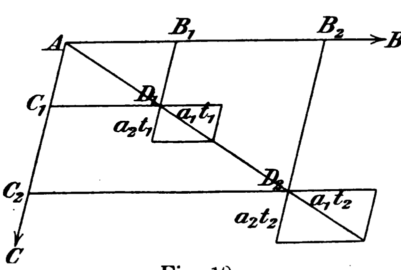


Fig. 10.

$$A\, B_1 = \frac{1}{2}\, a_1\, t_1{}^2;$$

$$A C_1 = \frac{1}{2} a_2 t_1^2$$

und die des zweiten Parallelogramms

$$A B_2 = \frac{1}{2} a_1 t_2^2; \qquad A C_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2,$$

also die Seitenverhältnisse

$$\frac{A B_1}{A C_1} = \frac{A B_2}{A C_2} = \frac{a_1}{a_2}.$$

Darum sind die beiden Parallelogramme wieder ähnlich und ähnlich liegend, so daß die drei Punkte A, D_1 und D_2 in gerader Linie liegen. So überzeugt man sich, daß die Bahn der resultierenden Bewegung die Diagonale $A D_2$, also geradlinig ist.

Konstruiert man nun in dem Punkte D_1 das Geschwindigkeitsparallelogramm aus den Seiten $a_1 t_1$ und $a_2 t_1$, in dem Punkte D_2 das aus den Seiten $a_1 t_2$ und $a_2 t_2$, so verhalten sich in diesen Geschwindigkeitsparallelogrammen die Diagonalen, die die Geschwindigkeiten in D_1 und D_2 darstellen, ebenfalls wie die Zeiten t_1 und t_2. Die Geschwindigkeit der resultierenden Bewegung ist also der Zeit proportional, diese Bewegung ist also gleichförmig beschleunigt.

Die Beschleunigung a dieser resultierenden Bewegung wird durch die am Ende der ersten Sekunde erlangte Geschwindigkeit dargestellt. Diese aber wird als Diagonale des aus den Geschwindigkeiten $a_1 \cdot 1$ und $a_2 \cdot 1$ und dem Winkel α der Bahnrichtungen der Seitenbewegungen gebildeten Parallelogramms erhalten.

Also wird die resultierende Beschleunigung a der Größe und Richtung nach durch die Diagonale des aus den Beschleunigungen a_1 und a_2 der Seitenbewegungen und dem Winkel α der ursprünglichen Bahnrichtungen gebildeten Parallelogramms dargestellt. (Fig. 11.) (Parallelogramm der Beschleunigungen.)

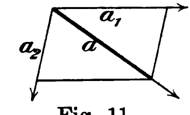


Fig. 11.

Über die Zerlegung einer gleichförmig beschleunigten Bewegung und über die Zerlegung ihrer Beschleunigung gilt entsprechend dasselbe, was in § 30 auseinandergesetzt wurde.

Anm. Auch die Rechnung bei Zusammensetzung und Zerlegung der Beschleunigungen ist genau dieselbe, wie die Rechnung in den Anmerkungen der §§ 29 und 30.

Aufgaben.

25. Wie groß ist die Geschwindigkeit c eines materiellen Punktes, dessen Bewegung aus zwei aufeinander senkrechten gleichförmigen geradlinigen Seitenbewegungen entsteht, deren Geschwindigkeiten c_1 und c_2 sind? a) $c_1 = 13{,}2 \frac{m}{sec}$; $c_2 = 8{,}5 \frac{m}{sec}$; b) $c_1 = 1{,}56 \frac{m}{sec}$; $c_2 = 1{,}33 \frac{m}{sec}$.

Antw.: $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$; a) $c = 15{,}7 \frac{m}{sec}$; b) $c = 2{,}05 \frac{m}{sec}$.

26. Die gleichförmige Bewegung eines materiellen Punktes, dessen Geschwindigkeit c ist, resultiert aus zwei gleichförmigen zueinander senkrechten geradlinigen Seitenbewegungen, von denen die eine die Geschwindigkeit c_1 hat; wie groß ist die Geschwindigkeit c_2 der zweiten Seitenbewegung? a) $c = 18{,}5 \frac{m}{sec}$; $c_1 = 10{,}4 \frac{m}{sec}$; b) $c = 317 \frac{cm}{sec}$; $c_1 = 308 \frac{cm}{sec}$.

Antw.: $c_2 = \sqrt{c^2 - c_1^2}$; a) $c_2 = 15{,}3 \frac{m}{sec}$; b) $c_2 = 75 \frac{cm}{sec}$.

27. Welche Winkel bildet in der Aufgabe 25 die Richtung der resultierenden Bewegung mit den Seitenbewegungen?

Antw.: $\cos \alpha_1 = \frac{c_1}{c}$; $\cos \alpha_2 = \frac{c_2}{c}$; ($\alpha_1 + \alpha_2 = 90^0$).

a) $\alpha_1 = 32^0\, 46'\, 45''$; $\alpha_2 = 57^0\, 13'\, 15''$;

b) $\alpha_1 = 40^0\, 26'\, 59''$; $\alpha_2 = 49^0\, 33'\, 1''$.

28. Ein sich in gerader Linie gleichförmig bewegender materieller Punkt hat die Geschwindigkeit c; seine Bewegung soll in zwei gleichförmige Bewegungen zerlegt werden, die aufeinander senkrecht stehen, und von denen die eine mit der gegebenen Bewegung den Winkel γ bildet. Wie groß sind die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 dieser beiden Seitenbewegungen? a) $c = 15 \frac{m}{sec}$; $\gamma = 30^0$; b) $c = 436 \frac{cm}{sec}$; $\gamma = 40^0$.

Antw.: $c_1 = c \,.\, \cos \gamma$; $c_2 = c \,.\, \sin \gamma$.

a) $c_1 = 12{,}99 \frac{m}{sec}$; $c_2 = 7{,}50 \frac{m}{sec}$;

b) $c_1 = 334 \frac{cm}{sec}$; $c_2 = 280 \frac{cm}{sec}$.

29. Aus zwei unter dem Winkel α gegeneinander geneigten gleichrmigen geradlinigen Bewegungen mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 setzt sich eine Mittelbewegung zusammen; es sollen a) durch Konstruktion (indem man cm für m annimmt); b) durch Rechnung die Geschwindigkeit c der Mittelbewegung und die Winkel α_1 und α_2, die ihre Richtung mit den Richtungen der Seitenbewegungen bildet, gefunden werden.

$$c_1 = 15 \frac{\text{m}}{\text{sec}}; \qquad c_2 = 8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}; \qquad \alpha = 70^0.$$

Antw.: b) $c = 19{,}26 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; $\alpha_1 = 22^0\,58'$; $\alpha_2 = 47^0\,2'$.

(Vergl. hiermit die durch die Konstruktion gewonnenen Ergebnisse!)

30. Die gleichförmige geradlinige Bewegung eines materiellen Punktes soll in zwei Seitenbewegungen zerlegt werden, deren Richtungen mit der Richtung der ersteren die Winkel α_1 und α_2 bilden; wie groß sind die Geschwindigkeiten c_1 und c_2 der Seitenbewegungen, wenn die Geschwindigkeit der ersteren Bewegung c ist?

$$c = 245 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}; \; \alpha_1 = 63^0\,40'; \; \alpha_2 = 72^0\,50'.$$

Antw.: $c_1 = 340 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$; $\quad c_2 = 319 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

31. Die geradlinige gleichförmige Bewegung eines materiellen Punktes mit der Geschwindigkeit c setzt sich aus zwei Seitenbewegungen mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 zusammen. a) Durch Konstruktion; b) durch Rechnung sollen die Winkel α_1 und α_2 angegeben werden, die die Mittelbewegung mit den Richtungen der Seitenbewegungen bildet.

$$c = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}; \qquad c_1 = 16 \frac{\text{m}}{\text{sec}}; \qquad c_2 = 9 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Antw.: b) $\alpha_1 = 26^0\,3'$; $\alpha_2 = 51^0\,19'$.

32. Aus zwei geradlinigen, gleichförmig beschleunigten Bewegungen mit den Anfangsgeschwindigkeiten Null entsteht eine Mittelbewegung; die Beschleunigungen der ersteren sind $a_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ und $a_2 = 3 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ der Winkel der Bahnrichtungen ist $\alpha = 120^0$. Es soll die Geschwindigkeit der resultierenden Bewegung zu den Zeiten $t_1 = 3$ sec und $t_2 = 5$ sec konstruiert und gemessen werden; auch soll die resultierende Beschleunigung a konstruiert und gemessen werden. [In der Zeichnung wähle man cm für m.]

33. Für die Aufg. 32 soll die Größe der Beschleunigung a berechnet werden.

Antw.: $a = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2\, a_1\, a_2 \cos \alpha} = 2{,}65\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$.

32.

Aus den Formeln (1) und (3) des § 20 für eine gleichförmig beschleunigte Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit c und der Beschleunigung $\pm a$ folgt, daß jede gleichförmig beschleunigte Bewegung, deren Anfangsgeschwindigkeit nicht Null ist, aus zwei gleichgerichteten Bewegungen zusammengesetzt gedacht werden kann, von denen die eine gleichförmig ist und die Geschwindigkeit c hat, die andere aber gleichförmig beschleunigt ist, die Anfangsgeschwindigkeit Null und die Beschleunigung $+ a$ hat.

Es kann also jede gleichförmig beschleunigte Bewegung mit von Null verschiedener Anfangsgeschwindigkeit in diese zwei eben geschilderten Einzelbewegungen zerlegt werden.

Sollen nunmehr zwei geradlinige gleichförmig beschleunigte Bewegungen eines materiellen Punktes, die die Anfangsgeschwindigkeiten c_1 und c_2 und die Beschleunigungen a_1 und a_2 haben, zusammengesetzt werden, so zerlege man jede in ihre Einzelbewegungen, vereinige zunächst die beiden gleichförmigen Bewegungen zu einer gleichförmigen, deren Geschwindigkeit c die Resultierende aus c_1 und c_2 ist, und vereinige dann die beiden gleichförmig beschleunigten zu einer gleichförmig beschleunigten mit der Anfangsgeschwindigkeit Null und der Beschleunigung a, die aus a_1 und a_2 resultiert.

Die Aufgabe ist auf diese Weise darauf zurückgeführt, eine geradlinige gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit c und eine geradlinige, gleichförmig beschleunigte Bewegung, deren Anfangsgeschwindigkeit Null und deren Beschleunigung a ist, und deren Richtung mit der der ersteren Bewegung den Winkel α bildet, zu einer resultierenden Bewegung zusammenzusetzen.

Es ist leicht einzusehen, daß diese Aufgabe die allgemeinste ist, die bei der Zusammensetzung von gleichförmigen und gleichförmig beschleunigten geradlinigen Bewegungen auftreten kann.

33.

Es sei AX (Fig. 12) die Richtung der gleichförmig beschleunigten Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit Null und der Beschleunigung a, AB die Richtung der gleichförmigen Bewegung mit der Geschwindigkeit c und der $\sphericalangle BAX$, den beide Richtungen miteinander bilden, gleich α.

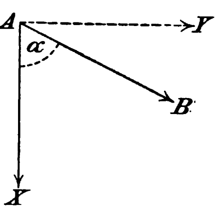


Fig. 12.

Zerlegt man die letztere Bewegung in zwei Seitenbewegungen, von denen die eine die Richtung AX, die andere die darauf senkrechte Richtung AY hat, so ist die Geschwindigkeit der ersteren $c \cdot \cos\alpha$, die der letzteren $c \cdot \sin\alpha$ und die Aufgabe ist damit auf die Aufgabe zurückgeführt:

Es sollen eine geradlinige gleichförmige Bewegung mit der Geschwindigkeit $c \cdot \sin\alpha$ und eine geradlinige gleichförmig beschleunigte mit der Anfangsgeschwindigkeit $c \cdot \cos\alpha$ und der Beschleunigung a, deren Richtungen aufeinander **senkrecht** stehen, zusammengesetzt werden.

Bezeichnen v_y und v_x die Geschwindigkeiten der beiden Bewegungen in den Richtungen AY und AX, y und x die in der Zeit t in diesen Richtungen zurückgelegten Wege, so gelten nach der Zeit t für die gleichförmige Bewegung die Formeln

$$(1)\quad v_y = c \cdot \sin\alpha; \qquad (2)\quad y = c \cdot \sin\alpha \cdot t$$

und für die gleichförmig beschleunigte Bewegung die Formeln

$$(3)\quad v_x = c \cdot \cos\alpha + a\,t; \quad (4)\quad x = c \cdot \cos\alpha \cdot t + \frac{1}{2}\,a\,t^2.$$

Diese vier Gleichungen bestimmen nunmehr in Verbindung mit dem Parallelogrammgesetze vollständig die Bewegung des materiellen Punktes.

34.

Um den Ort des Punktes zu einer bestimmten Zeit t zu bestimmen, berechnet man aus den Gleichungen (2) und (4) die Wege y und x, trägt (Fig. 13) auf der Richtung AY die

Strecke $y = AC$, auf der Richtung AX die Strecke $x = AB$ ab: die vierte Ecke D des aus AB und AC gebildeten Rechtecks ist der Ort des Punktes zur Zeit t.

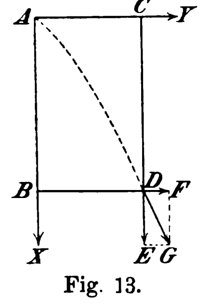


Fig. 13.

So können beliebig viele Punkte der Bahn des materiellen Punktes konstruiert werden.

Die Geschwindigkeit zur Zeit t erhält man dadurch, daß man v_y und v_x aus den Gleichungen (1) und (3) berechnet und in D aus $DE = v_x$ und $DF = v_y$ das Rechteck $DEGF$ konstruiert; die Diagonale DG dieses Rechtecks gibt die Größe

$$v = \sqrt{v^2_x + v^2_y}$$

und die Richtung der Geschwindigkeit zur Zeit t an.

Eliminiert man t aus den beiden Gleichungen (2) und (4), so erhält man in der zwischen x und y bestehenden Gleichung

$$x = y \cdot cot\, \alpha + \frac{a}{2\, c^2 \cdot sin^2\, \alpha} \cdot y^2 \tag{5}$$

die Gleichung der Bahnkurve.

Diese Gleichung aber zeigt, daß die Bahn eine Parabel ist (Höhere Geometrie § 89), deren Achse parallel der Geraden AX, also parallel der Richtung der Beschleunigung ist.

35.

Sind x_0 und y_0 die Koordinaten des Scheitels S der Parabel in bezug auf die Koordinatenachsen AX und AY, verlegt man den Anfang eines neuen Koordinatensystems durch Parallelverschiebung in den Scheitelpunkt S, bezeichnet diese neuen Koordinaten mit ξ und η, setzt also

$$\xi = x - x_0\,,\; \eta = y - y_0\,, \tag{6}$$

so muß die Gleichung (5) durch Einführen dieser Werte für x und y in die Scheitelgleichung $\eta^2 = 2\,p\,\xi$ der Parabel übergehen. Durch Substitution der Werte (6) in (5) erhält man aber

$$\xi + x_0 = (\eta + y_0)\, cot\, \alpha + \frac{a}{2\, c^2 \cdot sin^2\, \alpha}\, (\eta + y_0)^2 \tag{7}$$

oder

(7′) $$\xi + x_0 = \eta \cot \alpha + y_0 \cot \alpha + \frac{a}{2\,c^2 \cdot \sin^2 \alpha} \cdot \eta^2$$
$$+ \frac{a}{c^2 \cdot \sin^2 \alpha} \cdot y_0 \cdot \eta + \frac{a}{2\,c^2 \cdot \sin^2 \alpha} \cdot y_0^2.$$

In dieser Gleichung müssen die Glieder, die η als Faktor haben, Null werden; es muß also

$$\eta \cdot \cot \alpha + \frac{a}{c^2 \cdot \sin^2 \alpha} \cdot y_0 \cdot \eta = 0$$

sein, was durch

$$y_0 = - \frac{c^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot \cot \alpha}{a} \quad \text{oder}$$

$$y_0 = - \frac{c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{a}$$

erfüllt wird. Setzt man diesen Wert in (7′) ein, so lautet sie nach einigen leichten Reduktionen

(7″) $$\xi + x_0 = \frac{a}{2\,c^2 \cdot \sin^2 \alpha} \cdot \eta^2 - \frac{c^2 \cdot \cos^2 \alpha}{2\,a},$$

woraus

$$x_0 = - \frac{c^2 \cdot \cos^2 \alpha}{2\,a}$$

folgt.

Dadurch sind die Koordinaten des Scheitels S der Parabel bestimmt, und die Gleichung der Parabel lautet nunmehr

(8) $$\eta^2 = \frac{2\,c^2 \cdot \sin^2 \alpha}{a} \cdot \xi.$$

Ist $\alpha = 90^0$, so werden $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$, d. h. A ist der Scheitel der Parabel; ihr Parameter

$$2\,p = \frac{2\,c^2}{a},$$

ihre Gestalt die in Fig. 14 angedeutete.

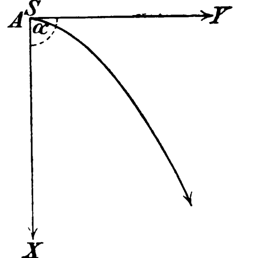


Fig. 14.

Ist α ein spitzer Winkel, so sind x_0 und y_0 beide negativ; der Scheitel S der Parabel liegt rückwärts von A; die Bewegung kann als die Fortsetzung einer in S beginnenden Bewegung angesehen werden, wie in Fig. 15 angedeutet ist.

Ist endlich α ein stumpfer Winkel, so ist x_0 negativ, y_0 aber positiv; der Scheitel S der Parabel wird alsdann vom Punkte P erst im Laufe seiner Bewegung erreicht. Die Bahnkurve für diesen Fall ist in Fig. 16 dargestellt.

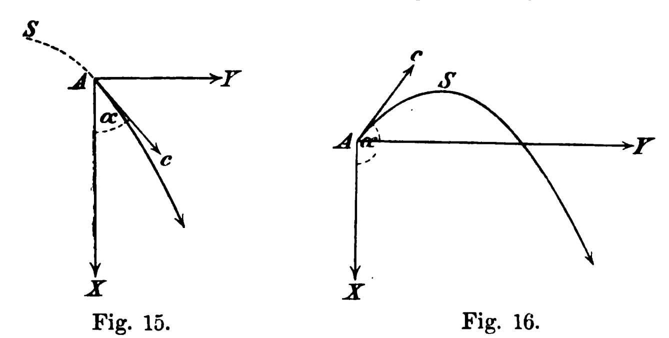


Fig. 15. Fig. 16.

Alle drei Fälle haben die Parabel als Bahnkurve gemeinsam. Die Gestalt der Parabel aber ist durch ihren Parameter

$$\frac{2\,c^2 \cdot sin^2\,\alpha}{a}$$

bestimmt.

36.

Wäre die Aufgabe gestellt, die Bahn des materiellen Punktes unter der Voraussetzung zu zeichnen, daß die Beschleunigung der gleichförmig beschleunigten Bewegung in der Richtung $A\,X$ gleich $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$, die Geschwindigkeitskomponenten der gleichförmigen Bewegung in den Richtungen $A\,X$ und $A\,Y$ gleich $-3\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ und $1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ wären (was einem Winkel $\alpha = 161^0\,34'$ entspräche), so hätte man für die Wege in den Richtungen $A\,X$ und $A\,Y$ die Gleichungen

$$x = -3\,t + \frac{1}{2}\,t^2;\; y = t,$$

aus denen sich die folgenden zusammengehörigen Werte von t, x und y ergeben:

$t =$	1;	2;	3;	4;	5;	6;	7;	8 sec
$x =$	$-2^1/_2$;	-4;	$-4^1/_2$;	-4;	$-2^1/_2$;	0;	$3^1/_2$;	8 m
$y =$	1;	2;	3;	4;	5;	6;	7;	8 m.

Wählt man nun für die Ausführung der Konstruktion die Längeneinheit nach einem beliebigen verjüngten Maßstabe, so ist es leicht, die Bahnkurve zu zeichnen. Fig. 17 zeigt die Ausführung dieser Konstruktion, wobei als Längeneinheit 3 mm gewählt worden ist.

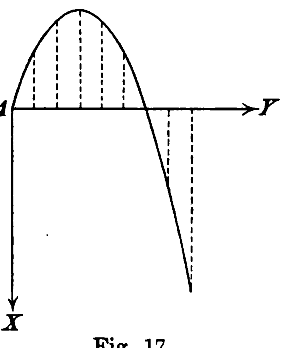


Fig. 17.

37.

Wenn die Ebene, in der ein materieller Punkt gleichzeitig zwei Bewegungen nach den Richtungen *A B* und *A C* ausführt, selbst wieder eine Bewegung ausführt, etwa nach einer Richtung *A E*, so setzt sich die Bewegung des Punktes aus drei Bewegungen zu einer einzigen zusammen, die durch wiederholte Anwendung des Prinzips des Parallelogramms in folgender Weise bestimmt werden kann: zunächst bestimmt man die Bewegung des Punktes, die aus den beiden ersten in den Richtungen *A B* und *A C* erfolgenden Bewegungen resultieren würde, und dann die Bewegung, die aus dieser resultierenden *A D* und der dritten in der Richtung *A E* geschehenden Bewegung durch Zusammensetzung hervorgeht. Die so aus den Bewegungen *A D* und *A E* erhaltene Bewegung ist die aus den drei ursprünglichen Bewegungen sich zusammensetzende resultierende Bewegung.

In analoger Weise ist bei mehr als drei Einzelbewegungen zu verfahren. Vorläufig mögen hier diese Andeutungen genügen, da wir später (§ 73 u. 75) ausführlicher hierauf zurückkommen müssen.

Zweiter Abschnitt.

Mechanik des materiellen Punktes.

Drittes Buch.

Kraft und Masse.

38.

Beharrungsvermögen. Wie wir aus der Erfahrung wissen, daß der Materie die Eigenschaft der Beweglichkeit zukommt, daß also alle Körper beweglich sind, so wissen wir ebenso aus der Erfahrung, daß kein Körper, der sich im Zustande der Ruhe befindet, aus sich selbst heraus, also ohne eine äußere Einwirkung diesen Zustand der Ruhe verläßt. Aus der Erfahrung wissen wir aber auch weiter, daß ein Körper, der einmal in Bewegung ist, keinen Einfluß auf seinen eigenen Bewegungszustand hat, daß er vielmehr diesen Bewegungszustand beibehält, bis er durch äußere Veranlassungen gezwungen wird, seinen Bewegungszustand zu ändern. Freilich scheint der letztere Satz der oberflächlichen Beobachtung nicht zu entsprechen, denn wir sehen auf der Erde jede Bewegung nach und nach zur Ruhe kommen. Untersuchen wir aber dieses Zurruhekommen genauer, so finden wir, daß dasselbe eine Folge von Bewegungshindernissen ist, die bei jeder auf der Erde stattfindenden Bewegung auftreten. Die hauptsächlichsten Bewegungshindernisse sind die Reibung, die auftritt, wenn sich ein Körper auf einem andern bewegt, und der Widerstand des Mittels (Luft, Wasser usw.), in dem sich der Körper bewegt.

Eine über eine Kiesfläche gerollte Kugel kommt früher zur Ruhe, als wenn sie über eine glatte Eisfläche gerollt worden wäre, weil im ersteren Falle die Reibung viel größer ist als im letzteren.

Je mehr also die Bewegungshindernisse beseitigt werden, um so weniger wird die Bewegung gestört, um so längere Zeit dauert sie. So schließen wir aus den Beobachtungen, daß, wenn es uns gelänge, alle Bewegungshindernisse zu beseitigen, ein einmal in Bewegung befindlicher Körper, wenn nichts auf ihn einwirkte, sich mit konstanter Geschwindigkeit in gerader Linie bis ins Unendliche fortbewegen würde.

Dieses Erfahrungsgesetz, das zuerst von Galilei (1600) aufgestellt wurde, pflegt meistens in der Form ausgesprochen zu werden, die ihm von Newton (1687) gegeben worden ist:

Jeder Körper beharrt so lange in seinem Zustande der Ruhe oder der geradlinigen gleichförmigen Bewegung, als er nicht durch äußere Ursachen gezwungen wird, diesen Zustand zu ändern.

Das in diesen Worten ausgesprochene Grundgesetz der Mechanik nennt man das Gesetz (Prinzip) der Trägheit oder des Beharrungsvermögens.

39.

Dieses Prinzip der Beharrlichkeit ist eins der wichtigsten Grundgesetze der Naturwissenschaft. Seine absolute Richtigkeit läßt sich durch Beobachtungen und Experimente allein nicht beweisen, aber da alle aus ihm gezogenen Schlußfolgerungen sich vollständig im Einklang mit der Erfahrung gezeigt haben, so sind wir zur Annahme seiner allgemeinen Gültigkeit berechtigt. „Vorzüglich merkwürdig ist die Beharrlichkeit der Materie, sagt Laplace (système du monde p. 138), bei den himmlischen Bewegungen, welche seit Jahrtausenden keine wahrnehmbaren Störungen zeigen. Wir betrachten die Beharrlichkeit als ein Gesetz der Natur, und wenn wir Störung in der Bewegung eines Körpers finden, so schreiben wir sie einer fremden Ursache zu.“

Die Eigenschaft, die der Materie durch dieses Gesetz zugeschrieben wird, kann von einem doppelten Gesichtspunkte aus betrachtet werden: man kann sie als Beharrungsvermögen auffassen, wonach die Materie in ihrem Zustande der Ruhe oder der Bewegung zu beharren strebt, oder als Trägheit, ver-

möge der ein Körper jeder Änderung seines Zustandes der Ruhe oder der Bewegung widerstrebt, welches Widerstreben aber erst entsteht, wenn auf den Zustand der Bewegung oder der Ruhe von außen eingewirkt wird.

40.

Die Gültigkeit des Trägheitsgesetzes zu beobachten, dafür bietet die Natur und das Leben Beispiele genug.

Daß es einer äußeren Ursache bedarf, wenn ein Körper aus der Ruhe sich bewegt, ist uns sofort einleuchtend; im Gegenteil, wir würden uns wundern und nach der Ursache fragen, wenn ein Körper, z. B. ein Buch, das wir auf den Tisch legen, plötzlich sich allein bewegen würde. Besonders auffallend zeigt sich das Trägheitsgesetz, wenn eine Bewegungsursache nur auf einen Teil eines Körpers wirkt; alsdann wird dieser Teil des Körpers in Bewegung gesetzt, während die andern Teile des Körpers im Zustande der Ruhe verharren, weil sich die Wirkung der Bewegungsursache nicht in einem Augenblicke auf alle Teilchen des Körpers ausdehnen kann, vielmehr eine endliche, wenn auch noch so kleine Zeit vorübergehen muß, ehe sich die Wirkung der Bewegungsursache dem ganzen Körper von Teilchen zu Teilchen mitteilt. Steht man in einem ruhenden Bote oder auf einem ruhenden Brette und wird dasselbe rasch fortgestoßen, so fällt man nach hinten, weil die Mitteilung der Bewegung von den Füßen nach dem Kopfe nicht so schnell stattfinden kann. Legt man ein Kartenblatt auf ein Glas, und auf das Blatt eine Münze, so fällt die Münze in das Glas, wenn die Karte rasch fortgezogen wird. Aus einer Säule aus Damenbrettsteinen kann man einen herausschlagen, ohne daß die Säule umfällt. Durch ein Brett, das durch einen Stoß mit dem Finger umgeworfen werden könnte, kann man eine Kugel schießen, ohne daß das Brett umfällt.

Auch die folgenden Beobachtungen gehören hierher. Ein Faden, der bei ruhigem Heben einen Körper tragen kann, reißt, wenn man mit einem plötzlichen Ruck zieht, während der Körper sich nicht bewegt. Ebenso reißen die Stränge an einem Wagen, wenn die Pferde nicht allmählich, sondern mit einem plötzlichen Rucke anziehen. Zu schnell explodierende Sprengstoffe können zum Schießen nicht verwendet

werden, weil nicht Zeit genug vorhanden ist, ihre Bewegung der Kugel mitzuteilen und infolgedessen die Geschütze zersprengt werden.

Würde sich eine Bewegung auf den ganzen Körper auf einmal fortpflanzen, so würde das Einschlagen eines Nagels, das Einrammen eines Pfahles durch einen Rammbär unmöglich sein, da der Nagel nur infolge des Trägheitswiderstandes der Wand, der Pfahl infolge des Trägheitswiderstandes der Erde eindringt.

41.

Noch häufiger kann man das Beharren eines Körpers in der Bewegung beobachten. Sitzt oder steht man in einem fahrenden Kahne oder Wagen nach vorwärts, so bewegt sich der Oberkörper beim plötzlichen Anhalten des Fahrzeuges nach vorn, so daß man sogar hinfallen kann. Springt jemand von einem fahrenden Wagen plötzlich ab, so muß er in der Fahrrichtung abspringen, um nicht zu Boden zu fallen. Hat der Wagen aber eine recht große Geschwindigkeit, etwa die eines Eisenbahnzuges, so fällt man mit großer Heftigkeit in der Fahrrichtung zu Boden. Um einen lose gewordenen Hammer zu befestigen, stößt man rasch mit dem Stiele auf einen festen Gegenstand; dabei kommt der Stiel plötzlich zur Ruhe, der Hammer aber fährt in seiner Bewegung fort und schiebt sich fester auf den Stiel auf. Ein aus dem Mastkorbe eines fahrenden Schiffes fallender Stein fällt am Fuße des Mastes nieder, weil er die Bewegung des Schiffes seines Beharrungsvermögens wegen beibehält. Dasselbe ist mit jedem Körper auf der Erdoberfläche der Fall; wenn das Gesetz der Beharrung in der Bewegung nicht wäre, würde unter einem in die Höhe springenden Menschen die Erde sich fortbewegen, sodaß man mit einem tüchtigen Sprunge eine große Reise machen könnte. Als zuerst die Drehung der Erde gelehrt wurde, wurde das gerade von den Gegnern dieser Lehre [Tycho de Brahe (1585) und Riccioli (1640)] angeführt: wenn sich die Erde von Westen nach Osten drehte, müßte ein von einem Turme fallender Stein westlich vom Fuße des Turmes niederfallen, während Newton gerade das Gegenteil behauptete, daß, nachdem Galilei das Trägheitsgesetz aufgestellt hatte, ein von einem Turme fallender Stein, weil

er einen größeren Abstand von der Drehungsachse der Erde und deshalb eine größere Umfangsgeschwindigkeit als der Fuß des Turmes habe, östlich vom Turme fallen müßte. Versuche von Benzenberg (1802) am Michaelisturme in Hamburg bei 76 m (235 Fuß) Fallhöhe und von Reich (1834) im Dreibrüderschachte in Freiberg bei 159 m (488 Fuß) Fallhöhe haben die Behauptung Newtons auch der Größe nach, wie sie die Theorie erforderte, bestätigt.

Vom Beharrungsvermögen eines bewegten Körpers macht man in der Praxis vielfache Anwendung; es sei hier nur an die Schwungräder erinnert, die durch ihr Beharrungsvermögen den Maschinen über die sogenannten toten Punkte hinweghelfen.

Könnte man eine sich nach ihrer Längsrichtung sehr rasch bewegende Stange in ihrer Mitte anfassend plötzlich aufhalten, so würde vermöge des Beharrungsvermögens das hintere Ende sich verdichten, das vordere Ende sich ausdehnen, wenn nicht gar abreißen.

42.

Kraft. Jede Ursache für die Änderung des Bewegungszustandes eines materiellen Punktes nennt man eine Kraft.

Eine Änderung des Bewegungszustandes eines materiellen Punktes kann entweder in der Änderung der Geschwindigkeit oder in der Änderung der Richtung der Bewegung oder in der Änderung der Geschwindigkeit und der Bewegungsrichtung zugleich bestehen. Ist also die Bewegung eines materiellen Punktes nicht geradlinig und gleichförmig, so muß das der Wirkung von Kräften zugeschrieben werden. Wenn man daher die Kraft als die Ursache einer Bewegung definiert, so versteht man unter Bewegung den Übergang aus der Ruhe in die Bewegung.

Übrigens ist das Wort „Kraft" nur der Name für ein unbekanntes Etwas. Zunächst denkt man bei dem Worte Kraft an die Muskelkraft (animalische Kraft) der Menschen und Tiere. Wenn wir aber durch unsere eigene Körperkraft Änderungen in den Bewegungszuständen anderer Körper hervorbringen, so nehmen wir nicht nur die hervorgebrachten

Wirkungen wahr, sondern können auch in der von uns dazu anzuwendenden Anstrengung die Größe der ausgeübten Kraft beurteilen. Diese Empfindungen sind die Grundlage, auf der sich der Kraftbegriff entwickelt hat. Was die Kräfte an sich sind, wissen wir nicht, da sie sich unserer sinnlichen Wahrnehmung entziehen. Wir kennen das eigentliche Wesen der Kräfte nicht, ja in vielen Fällen nicht einmal die eigentliche Art und Weise, wie sie wirken. Wir kennen z. B. von dem das Eisen bewegenden Magneten weder die mystische Natur seiner Kraft noch die Art und Weise, wie er das Eisen bewegt, ob er es mit unsichtbaren Fäden an sich zieht, ob er es an sich lockt, oder wie?

43.

Da nach dem Gesetze der Trägheit kein materieller Punkt oder Körper seinen Bewegungszustand von selbst ändern kann, so ist die Ursache der Änderung seines Bewegungszustandes, d. h. der Sitz einer Kraft stets in einem andern materiellen Punkte oder Körper zu suchen. Alle Kräfte wirken daher zwischen räumlich getrennten materiellen Punkten. Der eine von ihnen heißt der Ausgangspunkt, der andere der Angriffspunkt der Kraft; die gerade Verbindungslinie beider heißt die Richtung der Kraft.

Wie aber eine Kraft zwischen zwei materiellen Punkten wirkt, wissen wir nicht. Daß unser eigener Körper auf den Bewegungszustand anderer Körper nur dann Einfluß haben kann, wenn er mit diesen Körpern in Berührung ist, das ist ein alter Erfahrungssatz. Auf Grund desselben hat man angenommen, daß alle Kräfteübertragung nur durch unmittelbare Berührung von Körpern, nötigenfalls unter Zuhilfenahme von Zwischengliedern, geschehen könnte. Auch Newton selbst war bei Aufstellung seines Gravitationsgesetzes keineswegs von einer unmittelbaren Fernwirkung überzeugt, während nach ihm gerade umgekehrt der Versuch gemacht wurde, alle Naturerscheinungen auf Fernwirkungen zurückzuführen. Auch heute noch gehen die Meinungen darüber auseinander, ob die Kräfte nur durch Berührung oder unmittelbar in die Ferne wirken können.

Für die Mechanik selbst hat aber diese Meinungsverschiedenheit keinen Einfluß, da es für sie nur darauf ankommt, daß Kräfte übertragen werden können, wobei freilich noch die Annahme gemacht wird, daß Fern- und Nahewirkungen identisch sind, also mit demselben Maße gemessen werden können.

44.

Einteilung der Kräfte. I. Nach der Dauer der Wirkung teilt man die Kräfte ein in momentane und in kontinuierliche. Die ersteren wirken eine kaum meßbare kleine Zeit, wie z. B. ein Stoß, eine Explosion, ein elektrischer Schlag: die letzteren wirken entweder fortwährend oder doch eine längere Zeit hindurch, wie z. B. die Anziehung der Erde, die Kraft eines Magnetes, ein elektrischer Strom. Die Wirkung der ersteren müßte, falls nicht andere Kräfte entgegenwirkten, eine geradlinig gleichförmige Bewegung sein, die der letzteren eine ungleichförmige Bewegung. Aus der Definition der Kraft folgt nämlich, daß eine Kraft so lange als wirkend anzusehen ist, als die von ihr verursachte Änderung des Bewegungszustandes eines materiellen Punktes andauert.

II. Nach der Art der Wirkung unterscheidet man bewegende und widerstehende (hindernde) Kräfte; zu den bewegenden Kräften gehört z. B. die Dampfkraft der Lokomotive, die einen Zug in Bewegung setzt, zu den widerstehenden die Reibung, die den Zug, nachdem die Dampfkraft der Lokomotive zu wirken aufgehört hat, zum Stillstande bringt.

Wird eine Kraft, die eine Bewegung hervorbringen würde, daran durch einen Widerstand gehindert, so besteht ihre Wirkung in einem Zuge oder Drucke, den sie auf den Widerstand ausübt.

Im allgemeinen beobachtet man daher zwei Wirkungen der Kräfte: den Druck oder Zug auf einen Widerstand und die Bewegung. Erstere nennt man wohl auch die statische, letztere die dynamische Wirkung der Kräfte. Die reine Mechanik unterscheidet hiernach Druck- und Zugkräfte und bewegende Kräfte; doch sei nochmals hervorgehoben, daß Druck oder Zug nichts anderes als gehemmte Bewegung ist.

Anm. In den Anwendungen der Mechanik unterscheidet man vielerlei Arten von Kräften oder eigentlich deren Träger; z. B. die Kraft des Wassers, des Windes, des Dampfes, des Pulvers, Muskelkraft, Federkraft, magnetische und elektrische Kräfte, usw. Alle diese besonderen Kräfte faßt aber die reine Mechanik unter den erwähnten Arten der Kräfte zusammen, indem jede Kraft, welchen Namen sie auch haben mag, sich entweder als Zug oder Druck oder als Bewegung erzeugend äußern muß.

45.

Das Messen der Kräfte. Da wir die Kräfte selbst nicht wahrnehmen können, sondern sie nur an ihren Wirkungen erkennen, also an dem Zuge oder Drucke, den sie ausüben, oder an den Änderungen des Bewegungszustandes materieller Punkte, so können wir zwei Kräfte hinsichtlich ihrer Größe nur dadurch vergleichen, daß wir die durch sie hervorgebrachten Wirkungen vergleichen.

Um also ein Maß für die Kräfte zu erhalten, müssen wir eine bestimmte Kraftwirkung als Einheit wählen. Beide Arten der Kraftwirkung, der Zug oder Druck und die Bewegung, können zur Aufstellung einer solchen Krafteinheit gewählt werden. Allein durch die Erfahrung ist ausnahmslos das Gesetz bestätigt worden, daß, wenn zwei Kräfte gleichen Druck oder Zug ausüben, sie auch gleiche Bewegung erzeugen, oder daß die dynamischen Wirkungen zweier Kräfte gleich sind, wenn ihre statischen Wirkungen es sind. Dieses Gesetz ist übrigens oben schon angedeutet worden, wo hervorgehoben wurde, daß die statische Kraftwirkung nichts anderes als gehemmte dynamische Kraftwirkung sei.

Diejenige Kraft aber, mit der andere Kräfte am leichtesten verglichen werden können, ist die Schwerkraft. Bevor wir jedoch zu einer genaueren Betrachtung derselben übergehen, sei hervorgehoben, daß unabhängig von der Aufstellung eines Kraftmaßes die Definition der Gleichheit zweier Kräfte ist. Zwei Kräfte sind nämlich als gleich anzusehen, wenn sie an einem und demselben Körper (materiellen Punkte) gleiche Wirkungen hervorbringen. Ferner schließen wir, daß, wenn ein und die-

selbe Kraft an zwei verschiedenen Körpern (materiellen Punkten) verschiedene Wirkungen hervorbringt, dies nur durch die Verschiedenheit der beiden Körper bedingt sein kann. Wir suchen diese Verschiedenheit in der Masse der beiden Körper.

46.

Masse. Die physischen Körper stimmen mit den geometrischen Körpern darin überein, daß sie einen bestimmten Raum einnehmen und eine bestimmte, wenn auch von Augenblick zu Augenblick veränderliche Form haben, unterscheiden sich aber wesentlich darin von den geometrischen Körpern, daß der von ihnen eingenommene Raum von Stoff oder Materie ausgefüllt ist, so daß nicht gleichzeitig zwei physische Körper denselben Raum einnehmen können. Dem Stoffe kommen hiernach drei wesentliche Eigenschaften zu: die Ausdehnung, die Form und die Undurchdringlichkeit.

Das innere Wesen des Stoffes, der Substanz, ist uns unbekannt, doch können wir aus seinen physikalischen und chemischen Eigenschaften Rückschlüsse auf seine innere Bildung machen.

Alle Körper sind teilbar, doch zwingen uns physikalische Eigenschaften zu der Annahme, daß diese Teilbarkeit eine Grenze hat. Die kleinsten nicht mehr zerlegbaren Teilchen der Körper nennen wir Moleküle. Diese Moleküle aber lassen sich durch chemische Mittel in Einzelbestandteile zerlegen, die nicht weiter zerlegbar sind und deshalb Atome (ἄτομος unteilbar) heißen.

Die Menge des in einem Körper vorhandenen Stoffes nennen wir seine Masse; da eine wesentliche Eigenschaft des Stoffes seine Trägheit ist, kann man die Masse eines Körpers auch als die Menge des Trägen definieren.

Zwei Körpern aus demselben Stoffe werden wir gleichviel Masse zuschreiben müssen, wenn sie gleichviel Atome haben; wären daher alle Körper von gleichem Stoffe, so würde einfach die Anzahl der in ihnen enthaltenen Atome ein Maß für ihre Masse sein. Da wir aber verschiedene Stoffe kennen, deren Atome auch verschieden sind, da wir jedoch vor allem die Zahl der Atome nicht anzugeben vermögen, so kann uns die obige Definition der Masse kein Maß für die Masse geben, vielmehr müssen wir ein solches anderweit suchen und werden es in dem Ver-

halten der Körper finden, das sie unter dem Einflusse von Kräften auf ihre Masse zeigen. Gleich wird man die Masse zweier Körper nennen, wenn ein und dieselbe Kraft in bezug auf beide Körper gleiche Wirkungen erzeugt.

47.

Gesetz der Wechselwirkung. Im § 43 ist hervorgehoben worden, daß sich an einem materiellen Punkte A keine Bewegungsänderung, also auch keine Kraft zeigen könnte, daß vielmehr eine Bewegungsänderung in der Wirkung eines zweiten materiellen Punktes B zu suchen sei; daß also eine Kraft nur zwischen zwei materiellen Punkten wirken könne. Dabei zeigt sich aber die Eigentümlichkeit, daß der Punkt A mit derselben Kraft auf den Punkt B wirkt, wie B auf A, und daß diese beiden auftretenden Kräfte einander entgegengesetzt gerichtet sind. Mit jeder Kraft ist eine Gegenkraft von gleicher Größe, aber entgegengesetzter Richtung verbunden; die Kräfte treten in der Natur stets paarweise auf; Kräftewirkungen sind nur Wechselwirkungen. Newton sprach dieses Gesetz der Wechselwirkung der Kräfte zuerst in der Form aus, daß bei jeder Wirkung stets eine gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Wechselwirkung vorhanden sei (actioni contrariam semper aequalem esse reactionem).

Beispiele für dieses Gesetz der Wechselwirkung der Kräfte lassen sich vielerlei anführen. Der Magnet zieht nicht nur das Eisen an, sondern wird mit derselben Kraft vom Eisen angezogen. Zwei gleichnamig elektrisierte Körper stoßen einander mit gleichen Kräften ab. Der Druck der bei der Explosion des Pulvers entstehenden Gase teilt sich sowohl dem Geschosse wie dem Geschütze mit gleicher Stärke mit; der Schütze spürt die Reaktion am sogenannten Rückschlage, der Artillerist am Rückwärtslaufe des Geschützes. Drückt ein Körper eine elastische Matratzenfeder nieder, so wird diese Feder nur so weit zusammengedrückt, bis ihre elastische Kraft gerade gleich der drückenden Kraft des Körpers ist. Drücken wir mit der Hand gegen einen festen Gegenstand, so spüren wir den Gegendruck. Von einem von uns oder dem Winde ausgeübten Drucke kann überhaupt

erst dann die Rede sein, wenn ein Hindernis vorhanden ist, das einen Gegendruck ausübt. Setzen wir uns auf einen Stuhl, so drücken wir diesen nach abwärts, der Stuhl selbst aber drückt nach aufwärts; die erstere Kraft bewirkt ein stärkeres Aufpressen des Stuhles auf den Boden, die letztere Kraft aber bewirkt, daß wir nicht fallen.

Zieht man in einem Boote stehend an einem Taue, das an einem zweiten Boote befestigt ist, so werden beide Boote gegeneinander gezogen; ebenso geht, wenn man in einem Boote stehend gegen ein anderes drückt, das erstere ebensoviel zurück, wie das letztere vorwärts geht. Wird ein wagerechter Balken, den vertikale Kräfte belasten, an seinen Endpunkten unterstützt, so übt er auf diese Stützpunkte einen vertikal abwärts gerichteten Druck, den sogenannten Auflagerdruck aus; umgekehrt erfährt aber der Balken von den Stützpunkten den gleichen entgegengesetzten, also vertikal aufwärts gerichteten Druck, den sogenannten Stützdruck.

Hängt man vermittels eines Bindfadens an einem Gummischlauche ein Gewicht auf, so wird der Gummischlauch so weit ausgedehnt, bis die elastische Spannkraft gleich dem Gewichtsstücke ist; brennt man jetzt den Bindfaden durch, so fällt das Gewichtsstück zur Erde, der Gummischlauch dagegen schnellt aufwärts; die beiden auftretenden Gegenkräfte lassen sich so in dynamischer Form zeigen.

Man benutzt die Reaktion zur Erzeugung von Bewegungen, wie beim Abbrennen von Raketen; die nach unten plötzlich austretenden Pulvergase treiben durch die Reaktion die Raketen in die Höhe.

So zeigt sich die Paarwirkung der Kräfte in allen Fällen, wo wir genauer auf das Auftreten beider Kräfte achten. In der Mehrzahl der Fälle untersuchen wir jedoch nur die eine Seite des Vorganges und auf diesem Umstande beruht die Ursache dafür, daß wir überhaupt von einer auf einen Körper wirkenden Kraft sprechen und in dieser den Grund für die Änderung des Bewegungszustandes des Körpers erblicken, während wir stets von dem wirkenden Paare der Kräfte reden müßten.

Viertes Buch.

Von der Schwerkraft.

48.

Die Schwerkraft. Die Erfahrung lehrt, daß jeder nicht unterstützte Körper zur Erde fällt. Die Richtung dieser Bewegung wird durch einen Faden, an dem eine kleine Bleikugel befestigt ist, angegeben; sie steht senkrecht zur Erdoberfläche und ist an jeder Stelle derselben nach dem Erdmittelpunkte gerichtet. Man nennt diese Richtung des Bleilotes vertikal, jede zu ihr senkrechte Richtung horizontal.

Als Ursache dieser Fallbewegung nehmen wir, da sie nicht im Körper selbst liegen kann, eine der Erde innewohnende, ihrem Wesen nach aber völlig unbekannte Anziehungskraft an, die man Schwerkraft nennt. Die Eigenschaft aller physischen Körper, dieser Schwerkraft unterworfen zu sein, nennt man Schwere.

Doch sei ausdrücklich hervorgehoben, daß die Anziehung der Erde und der Körper an ihrer Oberfläche eine gegenseitige ist; die Erde wird von jedem Körper ebenso angezogen, wie sie ihn anzieht. Wie der Stein zur Erde fällt, so fällt die Erde zum Steine hin, nur ist diese Fallbewegung wegen der Größe der Erde im Vergleiche zu der des Steines eine unendlich kleine. Da man also nur die Fallbewegung der Körper beobachten kann, spricht man in der Regel nicht von der gegenseitigen Anziehung der Erde und der materiellen Körper, sondern nur von der Anziehung der Körper durch die Erde.

49.

Gewicht. Wird ein Körper an der Fallbewegung, die die Schwerkraft an ihm zu erzeugen bestrebt ist, verhindert, dadurch, daß er auf eine feste Unterlage gelegt wird, oder dadurch, daß er an einem hinreichend festen, am einen Ende

befestigten Faden aufgehängt wird, so übt er auf seine Unterlage einen Druck, auf den Faden einen Zug aus.

Die Größe dieses Druckes, den ein Körper auf eine horizontale Unterlage ausübt, oder dieses Zuges, den ein Faden von einem an ihm hängenden Körper erfährt, nennt man das Gewicht dieses Körpers.

Als Einheit des Gewichtes ist das Gramm festgesetzt; man versteht darunter den Druck, den 1 ccm Wasser im Zustande seiner größten Dichtigkeit (bei 4° C) im luftleeren Raume in Paris auf seine Unterlage ausübt.

Die Einteilung des Gewichtes geschieht, wie die der Längenmaße, nach dem Dezimalsystem; 1 Gramm hat 10 Dezigramm oder 100 Zentigramm oder 1000 Milligramm; 1000 Gramm heißen ein Kilogramm, 100 Kilogramm ein Doppelzentner, 1000 Kilogramm eine Tonne. Durch Ministerialverordnungen sind im Deutschen Reiche die folgenden Abkürzungen vorgeschrieben:

1 t = 10 dz = 1000 kg; 1 dz = 100 kg;
1 kg = 1000 g; 1 g = 1000 mg.

Die Definition des Gramms lehrt in Verbindung mit § 2, daß folgende Beziehungen gelten: Ist das Wasser im Zustande seiner größten Dichtigkeit, so wiegen im luftleeren Raume in Paris

1 cbm Wasser 1 t,
1 hl „ 1 dz,
1 l „ 1 kg,
1 cmm „ 1 mg.

50.

Das Messen d. h. die Vergleichung der Gewichte geschieht durch die **Wage.** Am bekanntesten und geläufigsten ist die **gleicharmige Wage**; sie besteht aus einem in der Mitte unterstützten Wagebalken, an dessen Enden zwei gleich schwere Wageschalen befestigt sind. Vergl. jedoch über Wägungen mit dieser Wage die Anmerkung zum § 52.

Anderer Art ist die **Federwage**, deren Wirkung auf der

Elastizität der Metallfedern beruht, die entweder, wie bei der in Fig. 18 schematisch dargestellten, durch darauf gelegte Körper zusammengedrückt oder durch angehängte Körper ausgedehnt werden.

Legt man 1 g auf eine solche Federwage, so wird die Feder bis zu einem gewissen Punkte zusammengedrückt; legt man 2 g, 3 g usw. auf die Wage, so wird die Feder immer mehr und mehr zusammengedrückt. Die verschiedenen Stellungen eines mit der Feder verbundenen Zeigers werden nun an der Wage markiert und so wird eine Skala erhalten, aus der man das Gewicht des aufgelegten Körpers ablesen kann.

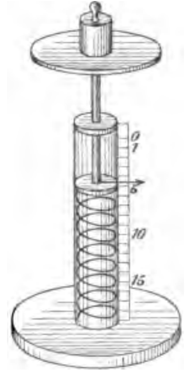


Fig. 18.

Dabei zeigen sich nun die folgenden zwei Tatsachen:

1. das durch eine Federwage angegebene Gewicht desselben Körpers ist an derselben Stelle der Erde immer dasselbe;

2. das durch die Federwage angegebene Gewicht eines und desselben Körpers ist an verschiedenen Stellen der Erde verschieden; es wird vom Äquator nach den Polen zu immer größer und nimmt beim Übergange von höher gelegenen Orten nach tiefer gelegenen zu.

Das Gewicht ist im Meeresniveau in unsern Breiten um $^1/_{300}$, an den Polen etwa um $^1/_{200}$ größer als am Äquator, d. h. eine genaue Federwage, die am Äquator als Gewicht eines Körpers genau 1 kg zeigte, würde als Gewicht desselben Körpers in unsern Breiten 1,003 kg, am Pole 1,005 kg anzeigen.

Aus der ersteren dieser Erfahrungstatsachen folgt, daß die Schwerkraft an demselben Orte der Erde unveränderlich bleibt und stets dieselbe Intensität hat. Aus der zweiten folgt, daß man, um bestimmte Gewichte zu haben, einen Ort auf der Erde von bestimmter geographischer Breite und bestimmter Höhe über dem Meeresniveau als Normal-Stelle annehmen muß; als solche ist die Sternwarte von Paris gewählt. Da die in § 49 angegebenen Gewichtseinheiten unhandlich sind, werden aus Metall ihnen gewichtsgleiche Körper, sogenannte Gewichtssätze, angefertigt.

Als Normalkilogramm gilt ein in Paris befindliches aus Platin hergestelltes Kilogrammstück.

51.

Die Schwerkraft als bewegende Kraft. Wird ein Körper nicht unterstützt, so fällt er zur Erde. Ohne hier auf diese Bewegung, den sogenannten freien Fall (vergl. das VIII. Buch) näher einzugehen, wollen wir die folgenden Beobachtungstatsachen vorausnehmen, aus denen wichtige Schlüsse folgen.

Die Fallbewegung der Körper ist eine gleichförmig beschleunigte Bewegung; wenn keine Gegenkraft, wie z. B. der Widerstand der Luft eine solche ist, der Schwerkraft entgegenwirkt, fallen alle Körper gleich schnell, d. h. sie erhalten eine ganz bestimmte Beschleunigung, die für immer mit g (gravitas) bezeichnet werden soll, und die die Beschleunigung der Schwere heißt. Diese Beschleunigung ist aber an verschiedenen Orten der Erde verschieden; am Äquator und auf Bergen ist sie etwas kleiner als an den Polen und im Tieflande. Ihr Wert in unsern Breiten ist rund

$$g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2},$$

$\left(\text{genauer auf der Pariser Sternwarte } g = 9{,}808 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}\right)$.

Über die genaue Bestimmung von g vergl. § 352.

52.

Da jedes materielle Teilchen eines Körpers, jedes Atom mit der gleichen Kraft von der Erde angezogen wird, so muß der Druck, den ein unterstützter Körper auf seine Unterlage ausübt, um so größer sein, je mehr Atome der Körper hat, oder das Gewicht eines Körpers ist seiner Masse proportional. Während aber das Gewicht, wie wir gesehen haben, an verschiedenen Stellen der Erde verschieden ist, ist die Masse eines Körpers unter allen Umständen unveränderlich, wohin auf der Erde oder im Weltraume man den Körper auch gebracht denkt.

In derselben Weise aber, in der sich das Gewicht P eines Körpers an verschiedenen Stellen der Erde ändert, ändert sich auch die Beschleunigung der Schwere g, denn beides sind die Wirkungen einer und derselben Kraft, das Gewicht P die statische, die Beschleunigung g die dynamische Wirkung. Daher muß der Quotient $\frac{P}{g}$ für einen bestimmten Körper an jedem Orte der Erde denselben Wert haben; dieser Wert hängt also nur von der in dem Körper enthaltenen Masse ab und kann deshalb der Einfachheit der Beziehungen wegen geradezu als Maß für die Masse eines Körpers angesehen werden.

Bezeichnet daher P (pondus) das Gewicht eines Körpers, g die Beschleunigung der Schwere, m die Masse des Körpers, so besteht zwischen diesen drei Größen die Gleichung

$$m = \frac{P}{g}, \tag{1}$$

woraus die weiteren Gleichungen

$$P = m \cdot g \tag{2}$$

und

$$g = \frac{P}{m} \tag{3}$$

folgen. Durch die Gleichung (2) ist das veränderliche Gewicht eines Körpers in einen unveränderlichen Teil (die Masse) und einen veränderlichen Teil (die Beschleunigung der Schwere) aufgelöst.

Anm. Da durch die zweiarmige Wage die Gewichte zweier Körper verglichen werden, diese Gewichte sich aber, wenn sie an andere und andere Stellen der Erde gebracht werden, in dem gleichen Verhältnis ändern, also an jeder Stelle der Erde gleich sind, wenn sie an irgend einer gleich waren, so kann diese Wage nicht die Verschiedenheit des Gewichtes eines Körpers an verschiedenen Stellen der Erde angeben; eigentlich werden daher mit einer zweiarmigen Wage nicht die Gewichte, sondern die Massen der Körper verglichen.

53.

Mit dem Begriffe der Masse eines Körpers ist eng der Begriff der **Dichtigkeit** verbunden. Haben zwei Körper



gleiches Volumen (Rauminhalt), ist aber das Gewicht (die Masse) des einen 2, 3, 4, . . . mal so groß als das Gewicht des andern, so sagt man, ersterer habe 2, 3, 4, . . . mal so große Dichtigkeit als der andere. Die in der Volumeneinheit enthaltene Masse dient als Maß der (absoluten) Dichtigkeit; man hat also für diese die Definition: Dichtigkeit ist das Verhältnis der Masse eines Körpers zu seinem Volumen. Bezeichnet V das Volumen, m die Masse und d die Dichtigkeit eines Körpers, so bestehen zwischen diesen drei Größen die Gleichungen

$$d = \frac{m}{V}, \quad V = \frac{m}{d}; \quad m = V \cdot d.$$

Unter relativer Dichtigkeit versteht man das Verhältnis der absoluten Dichtigkeit eines Stoffes zur absoluten Dichtigkeit eines Vergleichsstoffes, als welcher gewöhnlich das Wasser bei 4^0 C gewählt wird.

Da die Masse eines Körpers durch sein Gewicht bestimmt wird, so bestimmt man die Dichtigkeit auch durch das Gewicht der Volumeneinheit und nennt diese Zahl das Eigengewicht des betreffenden Körpers. Zwischen dem Volumen V, dem Gewichte P und dem Eigengewichte s eines Körpers bestehen daher die Gleichungen

$$s = \frac{P}{V}; \quad V = \frac{P}{s}; \quad P = V \cdot s.$$

Nun ist aber das Gewicht der Volumeneinheit Wasser als Gewichtseinheit gewählt worden, daher kann man in diesen Gleichungen für das Volumen V das Gewicht der das Volumen V einnehmenden Wassermenge einsetzen und nennt die so erhaltene Größe s' das spezifische Gewicht des betreffenden Körpers.

Das Eigengewicht eines Körpers ist also das Gewicht der Volumeneinheit des Körpers, während das spezifische Gewicht das Verhältnis des Gewichtes eines beliebigen Volumens des Körpers zu dem Gewichte eines gleichen Volumens Wasser ist.

Eigengewicht und spezifisches Gewicht sind numerisch gleich, unterscheiden sich aber durch die Dimensionen. Die Dimension des Eigengewichtes ist $P L^{-3}$, wenn P Gewicht ist; das spezifische Gewicht aber ist eine unbenannte



Zahl. Auch die relative Dichtigkeit ist eine unbenannte Zahl, gleich der des spezifischen Gewichtes. Die Dimension der absoluten Dichtigkeit ist ML^{-3}, wenn M Masse bedeutet; aus der absoluten Dichtigkeit erhält man das Eigengewicht, wenn man ihre Maßzahl mit der Beschleunigung des freien Falles multipliziert. (Vergl. § 52).

Da 1 ccm Wasser 1 g wiegt, die Eigengewichte von Gold 19,3 $\frac{g}{cm^3}$ und von Blei 11,4 $\frac{g}{cm^3}$ sind, so ist Gold 19,3, Blei 11,4 mal so dicht als Wasser, und es wiegt ein Stück Gold 19,3 mal, ein Stück Blei 11,4 mal soviel als das gleiche Volumen Wasser.

Die spezifischen Gewichte luftförmiger Körper, die viel geringer sind als die der festen und flüssigen Körper, bezieht man entweder auf Luft oder auf Wasserstoffgas, das leichteste aller Gase.

54.

Tabelle der spezifischen Gewichte einiger Körper bei 0° C.

A. Feste Körper.

Platin	21,3	Aluminium	2,8
Gold	19,3	Diamant	3,5
Blei	11,4	Marmor	2,8
Silber	10,5	Gips	2,3
Kupfer	8,9	Schwefel	2,0
Stahl	7,8	Ebenholz	1,2
Schmiedeeisen	7,8	Buchenholz	0,8
Gußeisen	7,2	Lindenholz	0,5
Zinn	7,3	Kork	0,24
Zink	7,2		

B. Flüssige Körper.		C. Gasförmige Körper.	
Quecksilber	13,6	Luft*	1,000
Schwefelsäure	1,9	Sauerstoff	1,108
Salpetersäure	1,5	Stickstoff	0,973
Olivenöl	0,9	Wasserstoff	0,069
Petroleum	0,8	Wasserdampf	0,626
Alkohol	0,8	Leuchtgas	0,5—0,6

* Auf Wasser bezogen 0,001 293.

Aufgaben.

34. Ein Silberbarren von 120 ccm Rauminhalt wiegt 1,300 kg; wie groß ist das Eigengewicht des Silbers?

Antw.: 10,833 $\frac{g}{cm^3}$.

35. Eine Bleikugel, deren Radius $r = 1$ cm groß ist, wiegt 47,750 g; wie groß ist das spezifische Gewicht des Bleies?

Antw.: 11,4.

36. Wieviel wiegt ein rechtwinkliger Marmorblock mit quadratischer Grundfläche, deren Seite $a = 80$ cm ist, und der Höhe $h = 2$ m?

Antw.: 3584 kg = 35,84 dz.

37. Wieviel wiegt eine gußeiserne Kugel, deren Halbmesser $r = 7{,}5$ cm ist?

Antw.: 12,723 kg.

38. Eine kupferne Hohlkugel hat einen äußeren Durchmesser $D = 60$ cm und einen inneren $d = 58$ cm; wieviel wiegt sie?

Antw.: 97,340 kg.

39. Welchen Rauminhalt nehmen 308,8 g Gold ein?

Antw.: 16 ccm.

40. Wie groß ist der Radius einer gußeisernen Kugel, die 1 kg wiegt?

Antw.: 3,2 cm.

41. Wieviel wiegt die Luft in einem Zimmer von 6,5 m Länge, 5,6 m Breite und 3,4 m Höhe?

Antw.: 160 kg.

42. Eine Glasflasche wiegt leer 120 g, mit Quecksilber gefüllt 2568 g; wieviel ccm faßt die Flasche?

Antw.: 180 ccm.

43. Wieviel wiegt eine Welle aus Schmiedeeisen von 1,50 m Länge und 4 cm Radius?

Antw.: 58,810 kg.

44. Wieviel kostet eine gußeiserne Röhrenleitung von 2,465 km Länge, deren Rohre im Lichten 40 cm weit sind und die Wandstärke 0,8 cm haben, wenn für 1 kg Gußeisen 20 Pf bezahlt werden?

Antw.: 36400 M.

Fünftes Buch.

Maßbeziehungen zwischen Kraft und Masse.

55.

In dem Werke Philosophiae naturalis principia mathematica hat Newton außer den beiden bereits ausgesprochenen Grundgesetzen der Mechanik, dem Prinzipe der Trägheit (§ 38) und dem der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung (§ 47), die er als erstes und drittes Grundgesetz bezeichnet, noch ein weiteres, von ihm als zweites Bewegungsgesetz bezeichnetes aufgestellt, daß nämlich jede Änderung einer Bewegung der einwirkenden bewegenden Kraft proportional sei und in der Richtung der Geraden stattfinde, in der die Kraft einwirkt.

Aus diesem Grundgesetze folgt, daß die durch eine Kraft erzeugte Änderung der Bewegung eines materiellen Punktes ganz unabhängig ist von dem Bewegungszustande, in dem sich der materielle Punkt befindet, mag er sich also in Ruhe oder bereits in Bewegung befinden. In der Tat gehen alle Bewegungen, wie der freie Fall, der Wurf usw., in einem fahrenden Wagen oder auf einem fahrenden Schiffe genau so vor sich wie im ruhenden Raume.

Wenn nun (ein ruhender oder sich bereits in Bewegung befindlicher) materieller Punkt der Einwirkung einer in seiner Bewegungsrichtung wirkenden kontinuierlichen Kraft ausgesetzt ist, so wird sein Bewegungszustand geändert, und zwar wird seine Geschwindigkeit immer größer werden, weil er die einmal erlangte Geschwindigkeit infolge des Trägheitsgesetzes beibehält, aber immer wieder von neuem unter dem Einflusse der bewegenden Kraft steht. Seine Bewegung wird also eine beschleunigte sein. Wirkt die Kraft aber umgekehrt der Bewegungsrichtung entgegen, so wird die Geschwindigkeit des materiellen Punktes immer kleiner, die Bewegung wird eine verzögerte.

Ist insbesondere die Kraft konstant, sowohl der Größe wie der Richtung nach, so ist ihre Wirkung auf einen materiellen Punkt die, daß seine Geschwindigkeit in gleichen

Zeiten um die gleiche Größe zunimmt, oder die Wirkung einer konstanten Kraft ist eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, für die, wenn sie aus der Ruhelage erfolgt, die wichtigen Gleichungen [(9), (11) und (13) des § 25]

$$(1)\quad v = a \cdot t; \qquad (2)\quad s = \frac{1}{2} a t^2; \qquad (3)\quad s = \frac{v^2}{2a}$$

gelten.

Anm. Im folgenden soll, wenn von einer Kraft schlechtweg die Rede ist, damit stets eine konstante Kraft gemeint sein, im andern Falle wird das Gegenteil jedesmal ausdrücklich hinzugefügt werden.

56.

Die Beschleunigung, die eine Kraft einem materiellen Punkte erteilt, wird um so größer sein, je größer die Kraft ist. Wenn die Beschleunigung, die ein materieller Punkt durch eine Kraft erfährt, gerade so groß ist, wie die Beschleunigung, die derselbe materielle Punkt ein anderes Mal durch eine andere Kraft erfährt, so sind die Intensitäten beider Kräfte oder kurz beide Kräfte gleich (§ 45). Ist dagegen die Beschleunigung, die ein materieller Punkt durch eine Kraft erhält, n mal so groß als die Beschleunigung, die derselbe materielle Punkt durch eine zweite Kraft erhält, so ist die erstere Kraft n mal so groß als die zweite. Daher gilt das Gesetz: die Kräfte verhalten sich wie die Beschleunigungen, die sie an einem und demselben materiellen Punkte erzeugen.

Werden die Kräfte mit k_1 und k_2, die von ihnen an demselben materiellen Punkte erzeugten Beschleunigungen mit a_1 und a_2 bezeichnet, so gilt also die Proportion

$$(1)\qquad k_1 : k_2 = a_1 : a_2.$$

Handelte es sich daher nur um diesen einen materiellen Punkt, so könnten die Kräfte direkt durch die von ihnen erzeugten Beschleunigungen gemessen werden.

Wirken nun zwei Kräfte k_1 und k_2 an zwei verschiedenen materiellen Punkten mit verschiedenen Massen m_1 und m_2 und erteilen sie beiden gleiche Beschleunigungen, so ist offenbar diejenige Kraft die größere, die die größere Masse

in Bewegung setzt; ist die Masse m_1 2, 3, 4, . . mal so groß als die Masse m_2, so ist auch die Kraft k_1 2, 3, 4, . . . mal so groß als die Kraft k_2, daher verhalten sich bei gleichen Beschleunigungen die Kräfte wie die bewegten Massen, d. h. es gilt die Proportion

(2) $$k_1 : k_2 = m_1 : m_2.$$

Um nun zwei Kräfte k_1 und k_2 zu vergleichen, von denen k_1 der Masse m_1 die Beschleunigung a_1, k_2 der Masse m_2 die Beschleunigung a_2 erteilt, denken wir uns eine Kraft k, die der Masse m_1 die Beschleunigung a_2 erteilte; dann würde zwischen k_1 und k nach (1) die Proportion

$$k_1 : k = a_1 : a_2$$

und zwischen k und k_2 nach (2) die Proportion

$$k : k_2 = m_1 : m_2$$

bestehen. Durch Multiplikation dieser beiden Proportionen folgt (nach Wegheben des gleichen Faktors k im ersten und zweiten Gliede) die Proportion

(3) $$k_1 : k_2 = m_1\, a_1 : m_2\, a_2\,,$$

d. h. zwei bewegende Kräfte verhalten sich wie die Produkte aus den bewegten Massen und den an ihnen erzeugten Beschleunigungen.

Die Proportion (3) kann auch in der Form

(4) $$a_1 : a_2 = \frac{k_1}{m_1} : \frac{k_2}{m_2}$$

geschrieben und dieses Gesetz ausgesprochen werden: die durch zwei Kräfte an zwei Massen erzeugten Beschleunigungen sind den einwirkenden Kräften direkt, den in Bewegung gesetzten Massen aber umgekehrt proportional.

Setzt man nun fest, daß die Einheit der Kraft und die Einheit der Masse so gewählt werden, daß die Einheit der Kraft der Einheit der Masse die Einheit der Beschleunigung erteilt, so erhält man aus (3) für eine Kraft k die Gleichung

(5) $$k = m \cdot a.$$

Eine bewegende Kraft wird hiernach gemessen durch das Produkt aus der bewegten Masse und der an ihr erzeugten Beschleunigung.

Man nennt dieses Kraftmaß das dynamische (kinetische) Kraftmaß (Gauß 1833) und die Gleichung (5), durch die der Begriff „Kraft“ erst eigentlich definiert wird, die **dynamische Grundgleichung.**

57.

Folgerungen. Aus der Gleichung (5) des vorigen Paragraphen folgt

$$(1) \qquad a = \frac{k}{m}$$

oder kurz in Worten:

$$\text{Beschleunigung} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Masse}};$$

man nennt das hierin ausgesprochene Gesetz das Prinzip der Beschleunigung. In ihm ist das Prinzip der Trägheit als spezieller Fall enthalten; denn wird $k = 0$, so ist auch $a = 0$, d. h. wenn keine Kraft wirkt, so tritt auch keine Änderung im Bewegungszustande der Masse, also keine Änderung in ihrer Geschwindigkeit ein.

Ersetzt man in der Gleichung (5) des vorigen Paragraphen die Beschleunigung a durch $\frac{v}{t}$ [Gleichung (2) § 22], so erhält man für die Kraft, die einer Masse m während der Zeit t die Geschwindigkeit v erteilt, die Newtonsche Gleichung

$$(2) \qquad k = \frac{m\,v}{t}.$$

Aus dieser Form der dynamischen Grundgleichung kann man weitere Gesetze über die Wirkung bewegender Kräfte ablesen:

a) wirken zwei Kräfte k_1 und k_2 auf dieselbe Masse die gleiche Zeit lang ein, so sind die an der Masse erzeugten Geschwindigkeiten v_1 und v_2 den Kräften proportional, $k_1 : k_2 = v_1 : v_2$;

b) wirkt ein und dieselbe Kraft die gleiche Zeit lang auf zwei verschiedene Massen m_1 und m_2 ein, so sind die diesen Massen in dieser Zeit erteilten Geschwindigkeiten v_1 und v_2 umgekehrt proportional den Massen, $v_1 : v_2 = m_2 : m_1$;

c) werden gleichen Massen in verschiedenen Zeiten t_1 und t_2 gleiche Geschwindigkeiten erteilt, so sind die Kräfte k_1 und k_2 umgekehrt proportional den dazu erforderlichen Zeiten, $k_1 : k_2 = t_2 : t_1$.

Ersetzt man in der dynamischen Grundgleichung m durch ihren in Gleichung (1) des § 52 angegebenen Wert, so nimmt sie die Form

$$k = \frac{P}{g} \cdot a = \frac{a}{g} P \tag{3}$$

an, aus der folgt, daß jede Kraft einem Gewichte vergleichbar ist.

Setzt man den aus Gleichung (3) sich ergebenden Wert von a in die Gleichungen (1), (3) und (5) des § 22 ein, so nehmen diese die Form an

$$v = \frac{k}{P} \cdot g\, t \tag{4}$$

$$s = \frac{1}{2} \frac{k}{P} \cdot g\, t^2 \tag{5}$$

$$s = \frac{P v^2}{2 k g}, \tag{6}$$

von denen namentlich die letztere von besonderer Wichtigkeit ist.

Erfolgt die Bewegung des materiellen Punktes nicht aus der Ruhelage, sondern besitzt er bereits in der Richtung der wirkenden Kraft die Geschwindigkeit c, so ist (§ 20)

$$v = c + a\, t, \quad s = c\, t + \frac{1}{2} a\, t^2; \quad s = \frac{v^2 - c^2}{2a}$$

und die abgeleiteten Gleichungen nehmen die Form an

$$k = \frac{m\,(v - c)}{t} \tag{2'}$$

$$v = c + \frac{k}{P} \cdot g\, t \tag{4'}$$

$$s = c\, t + \frac{1}{2} \frac{k}{P} \cdot g\, t^2 \tag{5'}$$

$$s = \frac{1}{2} \frac{P\,(v^2 - c^2)}{k\, g}. \tag{6'}$$

58.

Wenngleich die in den letzten Paragraphen abgeleiteten und ausgesprochenen Gesetze wegen der notwendig auftretenden Beobachtungsfehler experimentell nicht genau nachgewiesen werden können, so lassen sie sich doch angenähert durch Versuche an der **Atwoodschen Bewegungsmaschine** bestätigen.

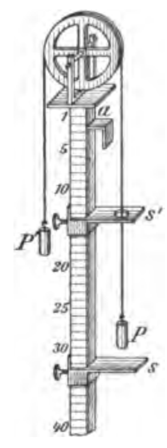
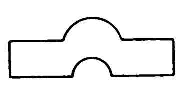


Fig. 19.

Diese besteht (Fig. 19) aus einer etwa 3 m hohen, genau vertikal aufgestellten Stange, die auf der einen Seite mit einer Maßeinteilung (etwa von 5 zu 5 cm) versehen ist und oben eine kleine möglichst leicht bewegliche Rolle trägt. Über dieser Rolle hängen an einer recht biegsamen seidenen Schnur zwei genau gleiche aus Scheiben bestehende Gewichte P und P', die einander das Gleichgewicht halten, also in Ruhe sind. Legt man aber auf das Gewicht P ein kleines Übergewicht p, so setzt dieses die Gewichte in Bewegung, indem die Seite, auf der das Übergewicht aufgelegt wurde, sinkt, die andere aber steigt.

Am obern Ende der Säule befindet sich ein verschiebbares umklappbares Brettchen a, auf dem das mit dem Übergewicht p versehene Gewicht P so aufgestellt werden kann, daß das Übergewicht gerade am Nullpunkte der Skala steht; durch Umklappen dieses Brettchens, was durch Ziehen an einer Schnur geschieht, kann das Übergewicht im gewünschten Augenblicke losgelassen und die Maschine in Bewegung gesetzt werden.

Längs der Stange sind ferner zwei verschiebbare und an einer beliebigen Stelle der Stange durch Klemmschrauben fest zu machende Scheiben s und s' angebracht, von denen die obere s' eine runde Öffnung hat, durch die das sinkende Gewicht P und die Schnur frei hindurchgeht, während das Übergewicht p, dem man die in Fig. 20 abgebildete Form zu geben pflegt, abgehoben wird und auf der Scheibe s' liegen bleibt. Die untere Scheibe s dient zum Auffangen des herabsinkenden Gewichtes P und bringt dadurch die Bewegung zur Ruhe.


Fig. 20.

Mit der Maschine ist ferner ein Sekundenpendel (§ 352) verbunden, das mit einer Anschlagevorrichtung versehen ist, indem z. B. ein auf das Pendel aufgehängter Doppelhammer bei jedem Hin- und Hergange des Pendels an dieses anschlägt.

Das Übergewicht p setzt durch die auf dasselbe wirkende Schwere nicht nur die Gewichte $2P + p$ in Bewegung, sondern muß auch die Reibung auf der Rolle, das Gewicht des Fadens und die Trägheit der Rolle (§ 333) überwinden. Um die Reibung auszugleichen wird vom Mechaniker jeder Maschine ein (durch Vorversuche bestimmtes) besonderes Gewicht Q beigegeben. Bezeichnet Q_1 das Gewicht des Fadens und die (in Gewicht umgerechnete) Trägheit der Rolle [beides ist gewöhnlich so klein, daß es vernachlässigt werden kann], so hat das Übergewicht p das Gewicht $P_0 + p$ in Bewegung zu setzen, worin $P_0 = 2P + Q + Q_1$ ist. Die durch dieses Übergewicht hervorgebrachte Beschleunigung muß nach der Gleichung (3) des § 57 sein

$$a = \frac{p}{P_0 + p} \cdot g = \frac{p}{P_0 + p} \cdot 981 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

Durch passende Wahl von p und P_0 kann man erreichen, daß a einen bestimmten Wert annimmt; macht man z. B. $p = 5$ g, $P_0 = 485$ g, so wird

$$a = \frac{5}{490} \cdot 981 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2} = 10 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

59.

Mit der so vorgerichteten Maschine lassen sich zunächst die Formeln (1) und (3) des § 22 bestätigen.

Nimmt man vorläufig die obere Scheibe s' weg, stellt die untere Scheibe s der Reihe nach auf die Punkte 4, 9, 16, ... der Skala [5 cm mit 1 bezeichnet] und läßt die Bewegung genau bei einem Schlage des Sekundenpendels beginnen, so findet man, daß das sinkende Gewicht genau nach 2, 3, 4, ... Sekunden auf die Scheibe s aufschlägt; oder wenn man die Scheibe s an das untere Ende der Säule schiebt, so passiert das sinkende Gewicht bei jedem Sekundenschlage eine der

Quadratzahlen 1, 4, 9, 16, 25, ... Damit ist die Richtigkeit der Formel

$$s = \frac{1}{2} a t^2$$

bewiesen.

Um das zweite Gesetz $v = a t$ zu bestätigen, stellt man die obere Scheibe s' der Reihe nach auf die Stellen 1, 4, 9 ..., so daß das Übergewicht nach 1, 2, 3, ... Sekunden abgehoben wird; nach diesem Abheben findet man, daß sich die bewegten Gewichte mit den gleichförmigen Geschwindigkeiten $10 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, $20 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, $30 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$, ..., die sie am Ende der 1sten, 2ten, 3ten, ... Sekunde erreicht hatten, weiter bewegen, was durch Aufschlagen auf der untern Scheibe s, die an passenden Stellen angebracht wird, beobachtet werden kann. Steht z. B. die Scheibe s' auf 4, so wird p am Ende der 2ten Sekunde weggenommen, wo die Geschwindigkeit des niedersinkenden Gewichtes $20 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ oder 4 Einheiten der Skala beträgt, und stellt man die Scheibe s auf die Teilstriche 8, 12, 16, ..., so schlägt das sinkende Gewicht nach 3, 4, 5, ... Sekunden, vom Beginne der Bewegung an gerechnet, auf die Scheibe s auf. Stellt man aber s' auf 9, so daß das Übergewicht am Ende der dritten Sekunde weggehoben wird, wo die Geschwindigkeit $30 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ oder 6 Einheiten der Skala beträgt, so passiert das sinkende Gewicht nach 4, 5, 6, ... Sekunden die Teilstriche 15, 21, 27, ... und schlägt nach 7 Sekunden vom Beginne der Bewegung an auf die am Teilstriche 33 stehende Scheibe s auf.

60.

Um die in § 56 aufgestellten Gesetze über die Abhängigkeit der Beschleunigung von der Größe der bewegenden Kraft und der Größe der bewegten Massen zu prüfen, variieren wir das Übergewicht und die bewegten Massen, was dadurch möglich ist, daß, wie oben erwähnt, die Gewichte P und P' aus Scheiben bestehen.

Nehmen wir an, das aufsteigende Gewicht P' bestände

aus Scheiben, die gerade gleich dem Übergewichte p wären. Wird dann von dem aufsteigenden Gewichte P' eine solche Scheibe abgenommen und auf das sinkende Gewicht P noch hinzugelegt, so ist die Gesamtmasse, die in Bewegung gesetzt wird, unverändert geblieben, das Übergewicht der sinkenden Masse gegen die aufsteigende aber $3\,p$; bestimmt man nun die Beschleunigung direkt oder den in einer bestimmten Zeit zurückgelegten Weg, aus dem dann die Beschleunigung berechnet werden kann, in der im vorigen Paragraph angegebenen Weise, so wird man die Beschleunigung $3\,a$ finden.

Nimmt man vom aufsteigenden Gewichte P' ein zweites Scheibchen p und legt es noch auf das sinkende P hinzu, so ist das Übergewicht $5\,p$, während die Gesamtmasse ungeändert bleibt; der Versuch liefert die Beschleunigung $5\,a$; etc. Es ist also das Gesetz bestätigt gefunden, daß sich die Beschleunigungen wie die sie erzeugenden Kräfte, hier die Übergewichte, verhalten.

Ändern wir dagegen das Gesamtgewicht beider Massen, ohne daß das Übergewicht geändert wird, indem wir z. B. das aufsteigende Gewicht

$$P'_1 = \frac{2\,P_0 - Q - Q_1}{2} + \frac{p}{2},$$

das sinkende Gewicht

$$P_1 + p = \frac{2\,P_0 + Q + Q_1}{2} + 3\,\frac{p}{2}$$

machen, so daß das Gesamtgewicht

$$P_1 + P'_1 + p = 2\,P_0 + 2\,p$$

ist, das Übergewicht aber p bleibt, so zeigt der Versuch, daß die Beschleunigung halb so groß ist als früher, sie ist bei gleicher Kraft umgekehrt proportional den Massen. Nehmen wir aber das $\frac{p}{2}$ von dem aufsteigenden Gewichte weg und fügen es dem sinkenden Gewichte hinzu, so ist sowohl das Gesamtgewicht, also auch die Gesamtmasse, aber auch das Übergewicht verdoppelt, und die Beschleunigung ist wieder die ursprüngliche.

Wie die Versuche so weiter abgeändert werden können, ist ohne weiteres klar. Stets finden wir das Gesetz bestätigt,

daß die resultierenden Beschleunigungen den bewegenden Kräften direkt, den bewegten Massen aber umgekehrt proportional sind.

61.

Um die dynamische Grundgleichung

$$k = m \cdot a$$

in dieser einfachen Form zu erhalten, mußten wir eine Beziehung zwischen der Krafteinheit und der Masseneinheit annehmen, daß nämlich durch die Krafteinheit an der Masseneinheit die Einheit der Beschleunigung erzeugt wird. (§ 56.)

Dabei ist es aber gleichgültig, welche von diesen beiden Einheiten als Grundeinheit gewählt wird; hat man sich nur für die Wahl der einen von ihnen als Grundeinheit entschieden, so ist die andere Einheit die abgeleitete.

Man hat also zwei Maßsysteme voneinander zu unterscheiden: in dem einen ist die Einheit der Kraft als Fundamentaleinheit gewählt, die Masseneinheit ist die abgeleitete Einheit; im andern ist die Einheit der Masse die Fundamentaleinheit, die Krafteinheit ist die abgeleitete Einheit.

Das erstere Maßsystem heißt das technische oder irdische Maßsystem, das zweite das absolute oder physikalische Maßsystem. In beiden Maßsystemen kommen außerdem die Fundamentaleinheiten für Länge und Zeit vor.

62.

Das technische Maßsystem. Die Fundamentalgrößen dieses Systems sind

Kraft, Länge und Zeit.

Als Einheit der Kraft dient das Kilogramm, das ist der Druck, den 1000 ccm Wasser im Zustande seiner größten Dichtigkeit bei 4° C unter 45° Breite in Meereshöhe auf eine Unterlage ausüben, und zwar wird als Urmaß das in Paris aufbewahrte Platin-Kilogrammstück betrachtet. (Seltener benutzt man einen dezimalen Teil des Kilogramms als Krafteinheit.)

Alle Kräfte werden also mit dem Drucke (Gewichte) eines Kilogramms auf seine Unterlage verglichen; da dieser oben die statische Wirkung der Schwerkraft genannt wurde, so nennt man das Kilogramm als Kräftemaß auch die statische Krafteinheit.

In der Praxis wird die Größe einer Kraft durch das Dynamometer (Kraftmesser) bestimmt. Dieses besteht im Prinzipe aus einer oder zwei kräftigen Federn und wird zwischen die Kraft (z. B. ziehendes Pferd) und den zu überwindenden Widerstand (Lastwagen) eingeschaltet; die dadurch an den Federn hervorgebrachten Formänderungen werden durch einen Zeiger an einer Skala in Kilogrammen angegeben; die Skala ist natürlich vorher durch angehängte Gewichte geeicht worden.

Anderer Art sind die Dynamometer mit indirekter Messung; sie kommen nur bei drehenden Bewegungen in Anwendung und beruhen auf dem Prinzipe, die durch einen Motor auf eine Welle übertragene Kraft durch Reibung aufzuheben und diese Reibung zu messen. (Pronyscher Zaum, § 394.)

Einheit der Länge ist in der Regel das Meter, seltener ein dezimaler Teil desselben. Einheit der Zeit ist fast stets die Sekunde.

Die Einheit der Masse ist eine abgeleitete Einheit; sie ergibt sich aus der dynamischen Grundgleichung

$$m = \frac{k}{a} = \frac{P}{g};$$

diese Größe wird 1, wenn $P = g$ wird.

Die Einheit der Masse ist hiernach diejenige Masse, deren Gewicht g Krafteinheiten beträgt, so daß bei der Krafteinheit 1 kg die Masse von 9,81 kg, d. h. die Masse von 9,81 l Wasser bei 4° C die Masseneinheit ist. Wiegt daher ein Körper P kg, so enthält er $\frac{P}{9,81}$ technische Masseneinheiten.

Bezeichnet man die Kraft mit K, Länge und Zeit wie früher mit L und T, so ist die Dimension der Masse $K L^{-1} T^2$.

Dieses Maßsystem wird überwiegend von den Technikern (mit Ausnahme der Elektrotechniker) gebraucht; daher sein

Name. Es hat den Nachteil, daß die Krafteinheit als Gewicht sich mit der geographischen Breite und der Erhebung über das Meeresniveau ändert, wie schon öfters hervorgehoben; allein diese Änderungen sind so gering, daß sie bei technischen Anwendungen kaum in Betracht kommen können, so daß in der Technik dieses Maßsystem sich wohl noch längere Zeit in Gebrauch halten wird.

63.

Das absolute Maßsystem. Die zuletzt angegebenen Übelstände fallen weg, wenn man nicht von der Kraft, sondern von der Masse als Fundamentalgröße ausgeht, da die Masse unabhängig vom Orte ist. Wegen dieser Unabhängigkeit nennt man jedes auf die Masse als Fundamentalgröße gegründete Maßsystem ein absolutes.

Die Fundamentalgrößen dieses Maßsystems sind

Masse, Länge und Zeit.

Je nach der Wahl der Größe der Einheiten gab es verschiedene Systeme. Der 1881 in Paris tagende internationale Elektriker-Kongreß hat sich für das Zentimeter-Gramm-Sekunden-System (C G S-System) entschieden. In ihm ist die Längeneinheit 1 cm, die Zeiteinheit 1 sec. Die Masseneinheit ist die Masse von 1 g.

Danach ist ein Unterschied zu machen zwischen 1 g als Kraft (Kraftgramm) und 1 g als Masse (Massengramm).

Die Einheit der Kraft als abgeleitete Größe ergibt sich aus der Gleichung $k = m\,a$ als diejenige Kraft, die der Masseneinheit 1 g in 1 sec die Beschleunigung 1 cm erteilt; man nennt diese Krafteinheit 1 Dyn oder die dynamische Krafteinheit; sie ist durch die Gleichung bestimmt

$$1 \text{ Dyn} = 1 \text{ g - Masse} \cdot 1 \, \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}.$$

Eine Million Dyn heißt Megadyn.

Das absolute Maßsystem heißt auch das physikalische, weil es heute von den Physikern fast aller Länder angenommen worden ist.

Bezeichnet man die Masse mit M, so ist die Dimension der Kraft $M\,L\,T^{-2}$.

Anm. Kilogramm und Gramm bedeuten also im technischen Maßsystem eine Kraft, im absoluten eine Masse. Um das in der Bezeichnung leicht zu unterscheiden, vereinbarte man auf dem Elektrotechniker-Kongresse zu Chicago (1888), daß das Kilogramm- und Gramm-Gewicht mit kg* und gr* (gr zum Unterschiede von der Beschleunigung g der Schwere), die Kilogramm- und Gramm-Masse mit kg und gr bezeichnet werden sollte.

Wäre im technischen Maßsysteme für die abgeleitete Masseneinheit ein besonderer Name festgesetzt wie Dyn im absoluten für die abgeleitete Krafteinheit, so wären Verwechselungen nicht möglich.

Da im folgenden in der Regel das technische Maßsystem angewendet werden wird, so bedarf es einer Unterscheidung in der Bezeichnung nicht: kg und g haben für uns die Bedeutung von Gewichten; sollen sie Massen bezeichnen, so fügen wir das besonders hinzu.

64.

Vergleichung beider Maßsysteme. Am deutlichsten tritt der Unterschied zwischen Gramm-Gewicht und Gramm-Masse hervor, wenn man die dynamische Grundgleichung auf diese Einheiten anwendet; sie lautet dann

$$1 \text{ g - Gewicht} = 1 \text{ g - Masse} \cdot 981 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2};$$

diese Gleichung bestimmt im absoluten Maßsysteme das Gewicht eines Urgramms (des 1000sten Teiles des Urkilogramms). Umgekehrt ist im technischen Maßsysteme die Masse eines Urgramms durch die Gleichung

$$1 \text{ g - Masse} = \frac{1 \text{ g - Gewicht}}{9{,}81} \frac{\text{sec}^2}{\text{m}}$$

bestimmt.

Aus der ersteren Gleichung folgt zugleich, daß

$$1 \text{ g} = 981 \text{ Dyn und } 1 \text{ Dyn} = \frac{1}{981} \text{ g} = 1{,}02 \text{ mg}$$

ist. Ebenso ist

$$1 \text{ kg} = 981000 \text{ Dyn} = 0{,}981 \text{ Megadyn}$$

und

$$1 \text{ Megadyn} = \frac{1}{0,981} \text{ kg} = 1,02 \text{ kg};$$

so daß man sich in runden Zahlen für einen ersten Vergleich merken kann

$$1 \text{ Dyn} = 1 \text{ mg}; \ 1 \text{ Megadyn} = 1 \text{ kg}.$$

65.

Graphische Darstellung einer Kraft. Eine Kraft ist nunmehr völlig bestimmt, wenn man von ihr kennt

1. den materiellen Punkt, auf den sie einwirkt, ihren Angriffspunkt;

2. die Richtung, in der sie ihren Angriffspunkt zu bewegen versucht;

3. ihre Größe oder Intensität, mag diese im technischen oder im absoluten Maße gemessen sein.

Weil eine Strecke, soll sie völlig bestimmt sein, dieselben drei Merkmale hat, einen Anfangspunkt, eine bestimmte Richtung vom Anfangspunkte nach ihrem Endpunkte und eine bestimmte Größe, so kann man jede Kraft graphisch darstellen (versinnlichen) durch eine Strecke, deren Anfangspunkt man in den Angriffspunkt der Kraft verlegt, deren Richtung mit der Richtung der Kraft zusammenfällt, und deren Größe nach irgend einem Maßstabe, entsprechend der Größe der Kraft, angenommen wird. Um die Richtung der Kraft deutlich von der auf der Strecke noch vorhandenen entgegengesetzten Richtung zu unterscheiden, zeichnet man an den Endpunkt der Strecke eine Pfeilspitze an, die nach der Richtung hinweist, nach der die Kraft den Angriffspunkt zu bewegen strebt.

66.

Aufgabe. Eine konstante Kraft $k = 100$ kg wirkt auf einen Körper vom Gewichte $P = 1000$ kg während $t = 20$ sec ein; welche Geschwindigkeit v erlangt der Körper und welchen Weg s hat er in diesen 20 sec zurückgelegt?

Auflösung. Die Antwort auf die gestellten Fragen geben die Formeln (4) und (5) des § 57; setzt man in sie die gegebenen Werte ein, so erhält man

$$v = \frac{100}{1000} \cdot 9{,}81 \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 19{,}62 \frac{\text{m}}{\text{sec}};$$

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{1000} \cdot 9{,}81 \cdot 20^2 \text{ m} = 196{,}2 \text{ m}.$$

67.

Aufgabe. Wie groß muß die bewegende Kraft sein, die einem Körper von $P = 1000$ kg Gewicht eine Geschwindigkeit $v = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erteilen und ihn dabei durch die Strecke $s = 200$ m bewegen kann, und in welcher Zeit findet das statt?

Auflösung. Aus der Gleichung (6) des § 57 folgt

$$k = \frac{P v^2}{2 g s}$$

und hieraus erhält man, wenn man die gegebenen Werte substituiert,

$$k = \frac{1000 \cdot 400}{2 \cdot 9{,}81 \cdot 200} \text{ kg} = 101{,}94 \text{ kg}.$$

Eliminiert man k aus den Gleichungen (4) und (5) des § 57, so erhält man

$$t = \frac{2 s}{v} = \frac{400}{20} \text{ sec} = 20 \text{ sec}.$$

Anm. Daß bei der Elimination von k auch P und g wegfallen, ist natürlich, weil bei allen gleichförmig beschleunigten Bewegungen die Zeit gleich dem Quotienten aus der doppelten zurückgelegten Wegestrecke und der Endgeschwindigkeit ist.

68.

Aufgabe. Ein Körper von $P = 50000$ kg (z. B. eine Lokomotive auf horizontaler Bahn) habe die Geschwindigkeit $c = 20 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erlangt und werde nun (nach Absperrung des

Dampfes) sich selbst überlassen. Ihrem Beharrungsvermögen, sich mit dieser Geschwindigkeit weiter zu bewegen, wirke eine konstante Kraft $k = 300$ kg (z. B. die Reibung) entgegen; a) welche Geschwindigkeit wird der Körper nach $t = 100$ sec haben und welchen Weg hat er bis dahin durchlaufen? b) welchen Weg wird der Körper noch durchlaufen, bevor er zur Ruhe kommt? c) wie weit aber wird sich der Körper noch bewegen, wenn die seiner Bewegung entgegenwirkende Kraft $^1/_{200}$ seines Gewichtes beträgt?

Auflösung. a) Da hier die Kraft k gleichförmig verzögernd wirkt, so hat man die Formeln

$$v = c - \frac{k}{P} \cdot g\,t = \left(20 - \frac{300}{50000} \cdot 9{,}81 \cdot 100\right) \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 14{,}114 \ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$s = c\,t - \frac{1}{2}\,\frac{k}{P} \cdot g\,t^2 = \left(20 \cdot 100 - \frac{1}{2} \cdot \frac{300}{50000} \cdot 9{,}81 \cdot 100^2\right) \text{m}$$
$$= 1705{,}7 \text{ m}.$$

b) Da der Weg derselbe ist, ob der Körper mit der Geschwindigkeit $c \ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ gleichförmig verzögert zur Ruhe gelangt, oder ob er aus der Ruhelage gleichförmig beschleunigt die Geschwindigkeit $c \ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erreicht, so liefert die Formel (6) des § 57 den Wert

$$s = \frac{50000 \cdot 20^2}{2 \cdot 300 \cdot 9{,}81} \text{ m} = 3398 \text{ m}.$$

c) Dieselbe Formel liefert, wenn man für $k = {}^1/_{200}\,P$ einsetzt,

$$s = \frac{200 \cdot 20^2}{2 \cdot 9{,}81} \text{ m} = 4077{,}5 \text{ m}.$$

69.

Aufgabe. I. Wie groß ist die Kraft, durch die ein Körper vom Gewichte $P = 100$ kg und mit der Geschwindigkeit $v = 8 \ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ auf die Strecke $s = 3$ m zum Stillstande gebracht wird?

Auflösung. Aus der Formel (6) des § 57 folgt leicht

$$k = \frac{P v^2}{2 s g} = \frac{100 \cdot 64}{2 \cdot 3 \cdot 9{,}81} \text{ kg} = 108{,}73 \text{ kg}.$$

II. Ein Körper vom Gewichte $P = 250$ kg bewegt sich unter dem Einflusse einer konstanten Kraft $k = 25$ kg noch $s = 1\,000$ m weit, bevor er zum Stillstande kommt; welche Geschwindigkeit hatte er vorher?

Auflösung. Die Formel (6) des § 57 liefert nach v aufgelöst den gesuchten Wert

$$v = \sqrt{\frac{2 k g s}{P}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 25 \cdot 9{,}81 \cdot 1000}{250}} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$= 44{,}294 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Aufgaben.

45. Wie groß ist die Masse eines Körpers von $P = 120$ kg Gewicht?

Antw.: $m = \frac{P}{g} = 12{,}23.$

46. Auf der Sonne ist die Beschleunigung der Schwere 27,6 mal so groß als auf der Erde; a) wie groß ist die Masse des in Aufg. 45 angegebenen Körpers auf der Sonne? b) wieviel wiegt dieser Körper auf der Sonne?

Antw.: a) $m = \frac{P \,.\, 27{,}6}{g \,.\, 27{,}6} = 12{,}23$; b) 3312 kg.

47. Ein Körper hat die Masse $m = 10$; wieviel wiegt er auf der Sonne?

Antw.: $P = m \,.\, g \,.\, 27{,}6$ kg $= 2707{,}5$ kg.

48. Auf dem Monde wiegt ein Körper von der Masse 3 nur 4,950 kg; wie groß ist die Beschleunigung der Schwere auf dem Monde?

Antw.: $g' = \frac{P}{m} = 1{,}65 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$

49. Einem Körper vom Gewichte $P = 50$ kg wird die Beschleunigung $a = 3{,}6 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ erteilt; wie groß ist die auf ihn wirkende Kraft?

Antw.: $k = \frac{P}{g} \,.\, a = 18{,}35$ kg.

50. Wie groß ist die Beschleunigung, die einem Körper von $P = 300$ kg Gewicht durch die konstant wirkende Kraft $k = 65$ kg erteilt wird?

Antw.: $a = \frac{k\,g}{P} = 2{,}13\ \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

51. Wie groß ist das Gewicht eines Körpers, dem die konstante Kraft $k = 140$ kg die Beschleunigung $a = 63\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ erteilt?

Antw.: $P = \frac{k\,g}{a} = 2180$ kg.

52. Wie groß muß die Triebkraft einer Lokomotive sein, wenn sie einem Zuge von 500 t Gewicht in 2 min die Geschwindigkeit $v = 15\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erteilen soll?

Antw.: $k = \frac{P\,v}{g\,t} = 6370$ kg.

53. Welche Kraft kann einen Körper von $P = 120$ kg Gewicht in $t = 30$ sec durch die Strecke $s = 500$ m bewegen?

Antw.: $k = \frac{2\,P\,s}{g\,t^2} = 13{,}6$ kg.

54. Welche Geschwindigkeit erzeugt eine Kraft von 30 kg an einem Körper von $P = 200$ kg Gewicht in $t = 10$ sec?

Antw.: $v = \frac{k\,g\,t}{P} = 14{,}715\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

55. Wie groß ist die Explosionskraft des Pulvers, die einem Geschosse von $P = 5$ kg Gewicht die Geschwindigkeit $c = 400\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erteilt, wenn das Geschoß $1/200$ sec im Geschützrohre verweilt?

Antw.: $k = \frac{P\,v}{g\,t} = 40770$ kg.

56. Ein Körper, dessen Gewicht $P = 2000$ kg beträgt und der eine Geschwindigkeit $v = 10\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ hat, soll durch eine konstante Kraft P in $t = 40$ sec zur Ruhe gebracht werden; wie groß muß diese Kraft sein?

Antw.: $k = 50{,}97$ kg.

57. Welchen Weg legt ein Körper von $P = 40$ kg Gewicht unter dem Einflusse der konstanten Kraft $k = 100$ kg in $t = 6$ sec zurück?

Antw.: $s = \frac{k\,g\,t^2}{2\,P} = 441{,}5$ m.

58. Wie groß ist die Kraft, die einem Körper vom Gewichte $P = 800$ kg auf der Strecke $s = 1$ km die Geschwindigkeit $v = 49{,}05 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erteilt?

Antw.: $k = \frac{P v^2}{2 g s} = 98{,}1$ kg.

59. In welcher Zeit legt ein Körper von $P = 50$ kg Gewicht unter dem Einflusse einer konstanten Kraft $k = 25$ kg die Strecke $s = 88{,}29$ m zurück? Welche Geschwindigkeit hat der Körper bis dahin erreicht?

Antw.: $t = \sqrt{\frac{2 P s}{k g}} = 6$ sec;

$v = \sqrt{\frac{2 k g s}{P}} = 29{,}43 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

60. Zwei Körper von den Gewichten $P_1 = 7{,}5$ kg und $P_2 = 12{,}5$ kg erhalten durch zwei Kräfte die Beschleunigungen $a_1 = 4{,}5 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ und $a_2 = 6{,}5 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$; wie verhalten sich die Kräfte?

Antw.: 27 : 65 oder 1 : 2,4.

61. Wie würden sich die Kräfte verhalten, wenn die Körper
a) gleiche Gewichte,
b) gleiche Beschleunigungen
hätten?

Antw.: a) 1 : 1,44; b) 1 : 1,67.

62. Durch zwei Kräfte erhalten zwei Körper von $P_1 = 70$ kg und $P_2 = 90$ kg Gewicht in $t_1 = 21$ sec und $t_2 = 24$ sec die Geschwindigkeiten $v_1 = 36 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $v_2 = 48 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; wie verhalten sich die treibenden Kräfte?

Antw.: 1 : 1,5.

63. Wie würden sich die Kräfte verhalten, wenn die Körper
a) gleiche Gewichte,
b) gleiche Geschwindigkeiten,
c) bei gleichen Gewichten auch gleiche Geschwindigkeiten
hätten?

Antw.: a) 1 : 1,167; b) 1 : 1,125; c) 1 : 0,875.

64. Wie groß muß bei der Atwoodschen Bewegungsmaschine das Übergewicht p angenommen werden, wenn $P_0 = 1{,}6$ kg ist und die Beschleunigung $a = 2 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ sein soll? $\left(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}\right)$.

Antw.: $p = \frac{P_0 a}{g - a} = 3{,}2$ g.

65. **Wie groß ist die Beschleunigung an der Atwoodschen Maschine, wenn $P_0 = 500$ g und das Übergewicht $p = 3$ g ist?**

Antw.: $a = \frac{p\,g}{P_0 + p} = 5{,}96 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$.

66. **Welche Geschwindigkeit erlangt an der Bewegungsmaschine das sinkende Gewicht in $t = 6$ sec, wenn $P_0 = 490$ g und das Übergewicht $p = 10$ g ist?**

Antw.: $v = \frac{p\,g\,t}{P_0 + p} = 120 \frac{\text{cm}}{\text{sec}}$.

67. **Welchen Weg legt das sinkende Gewicht in $t = 6$ sec zurück, wenn das Übergewicht am Ende der t_1 ten $= 2$ ten sec weggenommen wird und sonst die Bedingungen der Aufg. 66 bestehen?**

Antw.: $s = \frac{p\,g\,t_1\,(2\,t - t_1)}{2\,(P_0 + p)} = 2$ m.

Sechstes Buch.

Zusammensetzen und Zerlegen von Kräften.

70.

Das Parallelogramm der Kräfte. Bereits im § 55 ist als Folgerung aus dem zweiten Newtonschen Bewegungsgesetze der Satz ausgesprochen worden, daß die Wirkung einer auf einen materiellen Punkt wirkenden Kraft unabhängig von dem Bewegungszustande ist, in dem sich der materielle Punkt befindet. Diese Folgerung können wir jetzt genauer dahin aussprechen, daß die Beschleunigung, die eine Kraft einem materiellen Punkte erteilt, unabhängig ist von den Beschleunigungen, die demselben materiellen Punkte von anderen gleichzeitig wirkenden Kräften erteilt werden.

Nun haben wir aber im § 31 gesehen, daß mehrere gleichzeitig stattfindende Beschleunigungen eines materiellen Punktes immer durch eine einzige resultierende Beschleunigung ersetzt werden können. Da ferner die Kräfte durch die Beschleunigungen, die sie an einem materiellen Punkte erzeugen, gemessen und nach ihrer Größe und Richtung dargestellt werden, so müssen sich zwei Kräfte, die gleichzeitig an einem materiellen Punkte angreifen, durch eine einzige

Kraft ersetzen lassen, die die resultierende Beschleunigung erzeugt. Diese Kraft heißt die Mittelkraft oder die Resultante jener einzelnen Kräfte; letztere heißen die Seitenkräfte oder die Komponenten.

Wirken auf den materiellen Punkt A mit der Masse m gleichzeitig zwei Kräfte P und Q, die dem materiellen Punkte die Beschleunigungen a_1 und a_2 erteilen würden, so ist nach der dynamischen Grundgleichung

$$a_1 = \frac{P}{m}; \qquad a_2 = \frac{Q}{m}.$$

Die aus den beiden Beschleunigungen a_1 und a_2 resultierende Beschleunigung a wird (Fig. 21) der Größe und Richtung nach durch die Diagonale des aus a_1 und a_2 gebildeten Parallelogramms dargestellt.

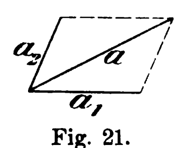


Fig. 21.

Ist nun R die Mittelkraft von P und Q, d. h. die Kraft, die dem materiellen Punkte A die Beschleunigung a erteilen würde, so müßte

$$a = \frac{R}{m}$$

sein. Es ist also

$$P = m\,a_1; \quad Q = m\,a_2; \quad R = m\,a.$$

Konstruieren wir daher das Parallelogramm in Fig. 21 nach einem m-fachen Maßstabe, wie in Fig. 22 angedeutet ist, so stellen die Seiten dieses Parallelogramms die Kräfte P und Q, ihre Diagonale die Mittelkraft R dar. Man hat also den Satz:

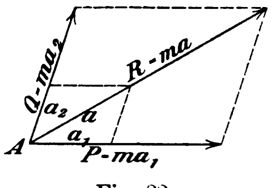


Fig. 22.

Wirken zwei Kräfte unter einem beliebigen Winkel auf einen materiellen Punkt, so stellt die Diagonale des aus den beiden Seitenkräften gebildeten Parallelogramms der Größe und Richtung nach die Resultante der beiden Seitenkräfte dar.

71.

Algebraischer Ausdruck des Satzes. Bezeichnet γ den Winkel, unter dem P und Q an A wirken (Fig. 23), so folgt aus dem Dreiecke APR, in dem $\measuredangle APR = 180^0 - \gamma$ ist,

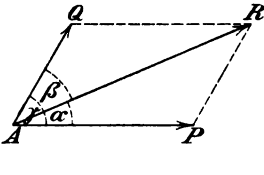


Fig. 23.

(1) $R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ \cdot \cos\gamma}$;

die Winkel α und β, die R mit den Seitenkräften P und Q bildet, sind durch die Gleichungen

$$\text{(2)} \qquad \sin\alpha = \frac{Q}{R} \cdot \sin\gamma;$$

$$\sin\beta = \frac{P}{R} \cdot \sin\gamma$$

bestimmt.

Aus den Gleichungen (1) und (2) kann, wenn P, Q und γ gegeben sind, die Resultante R ihrer Größe und Richtung nach berechnet werden.

Ist $\gamma = 90^0$, d. h. stehen P und Q senkrecht zueinander, so ergeben sich die besonderen Formeln

$$\text{(3)} \qquad R = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

und

$$\text{(4)} \qquad \sin\alpha = \cos\beta = \frac{Q}{R}; \; \sin\beta = \cos\alpha = \frac{P}{R}.$$

Sind die drei Kräfte P, Q und R der Größe nach gegeben, und soll ihre gegenseitige Richtung bestimmt werden, so hat man zur Bestimmung der Winkel α und β die Gleichungen

$$\text{(5)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{R^2 + P^2 - Q^2}{2RP} \\ \cos\beta &= \frac{R^2 + Q^2 - P^2}{2RQ}. \end{aligned} \right.$$

72.

Folgerungen. Aus dem Parallelogramm der Kräfte ergeben sich einige Folgerungen für besondere Richtungen und Größen der Seitenkräfte:

1. Wenn zwei Kräfte in derselben Richtung auf einen

materiellen Punkt wirken, so ist ihre Resultante gleich der Summe der beiden Kräfte und wirkt in derselben Richtung.

2. Wenn zwei Kräfte in entgegengesetzten Richtungen auf einen materiellen Punkt wirken, so ist ihre Resultante gleich der Differenz der beiden Kräfte und wirkt in der Richtung der größeren.

3. Zwei gleiche, auf einen materiellen Punkt in entgegengesetzten Richtungen wirkende Kräfte heben sich auf.

4. Die Resultante zweier auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte ist kleiner als die Summe, aber größer als die Differenz der Seitenkräfte; je kleiner der Winkel ist, den die Seitenkräfte miteinander bilden, um so größer ist die Resultante, und umgekehrt, je größer jener Winkel ist, um so kleiner ist die Resultante.

5. Die Resultante zweier gleichen auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte halbiert den Winkel der Kräfte.

73.

Wirken auf einen materiellen Punkt A mehr als zwei Kräfte, liegen sie aber sämtlich in derselben Ebene, so kann die Resultante derselben durch wiederholte Anwendung des Kräfteparallelogramms in folgender Weise gefunden werden.

Es wirken auf A die durch die Strecken $AB = P_1$; $AC = P_2$; $AD = P_3$; $AE = P_4$; ... der Größe und Richtung nach gegebenen Kräfte (Fig. 24), deren Resultante bestimmt werden soll.

Man bestimme zunächst mittels des Parallelogramms die Resultante $AF = R_1$ der Kräfte AB und AC, dann die Resultante $AG = R_2$ der Kräfte AF und AD, dann die Resultante $AH = R_3$ der Kräfte AG und AE; usf.

Fig. 24.

In unserm Falle ist $AH = R$ der Größe und Richtung nach die Resultante der vier Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4.

Anm. Die Reihenfolge, in der man je zwei der Kräfte zu einer Resultante zusammensetzt, ist dabei für das Endergebnis gleichgültig.

74.

Kräftedreieck — Kräftepolygon. Da die Zeichnung der Resultante mehrerer auf einen materiellen Punkt wirkender Kräfte durch das Parallelogramm manche überflüssige Linien enthält, das Parallelogramm aber durch eine seiner Hälften (ein Dreiek) vollständig bestimmt ist, so pflegt man nach Culmann („Die graphische Statik“) die Resultante in folgender einfacherer Weise zu konstruieren.

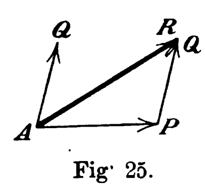


Fig. 25.

Greifen an dem materiellen Punkte A zwei Kräfte P und Q an (Fig. 25), so verschiebt man Q parallel mit sich selbst, bis der Anfangspunkt von Q mit dem Endpunkte von P zusammenfällt und verbindet dann A mit dem Endpunkte von Q; diese Verbindungslinie ist die gesuchte Resultante.

Oder man zieht, um beide Figuren zu trennen, durch einen beliebigen Punkt der Ebene eine Strecke parallel und gleich P, durch deren (durch den Pfeil angedeuteten) Endpunkt eine Strecke parallel und gleich Q in der Richtung des Pfeiles von Q; die Schlußseite des so bestimmten Dreiecks (Kräftedreiecks) ist ihrer Richtung und Größe nach die Resultante R der Kräfte P und Q (Fig. 26).

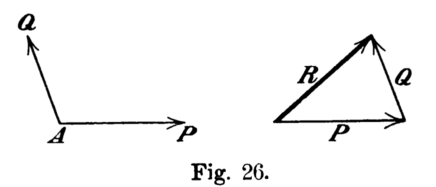


Fig. 26.

Dabei ist es offenbar gleichgültig, ob man mit P oder mit Q beginnt, weil es gleichgültig ist, welches von den beiden Dreiecken, in die das Parallelogramm durch die Diagonale zerfällt, gezeichnet wird.

Wirken auf einen materiellen Punkt beliebig viele Kräfte, z. B. P_1, P_2, P_3 und P_4, so läßt sich die Resultante derselben in gleicher Weise zeichnen.

Durch einen beliebigen Punkt der Ebene zieht man eine Strecke parallel und gleich P_1 mit der Pfeilrichtung von P_1, durch deren Endpunkt eine Strecke parallel und gleich P_2 in der Pfeilrichtung von P_2, durch deren Endpunkt eine Strecke parallel und gleich P_3 in der Pfeilrichtung von P_3 und durch deren Endpunkt eine Strecke parallel und gleich P_4 in der Pfeilrichtung von P_4. Die Schlußseite des so bestimmten Polygons (Kräftepolygons) ist ihrer Größe nach die Resultante der Kräfte P_1, P_2, P_3 und P_4; ihre Richtung ist entgegengesetzt der durch die Richtungen der Einzelkräfte bestimmten Umlaufsrichtung des Polygons (vergl. Fig. 27).

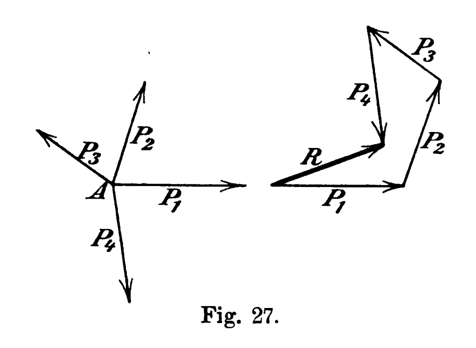


Fig. 27.

Übrigens ist die Reihenfolge, in der man die Kräfte aneinander reiht, ohne Einfluß auf das Ergebnis, da jede Änderung der Reihenfolge beliebig vieler Größen sich durch wiederholte Vertauschung je zwei aufeinanderfolgender Größen erreichen läßt, und eine solche Vertauschung, wie beim Kräftedreieck hervorgehoben ist, ohne Einfluß ist. Das Kräftepolygon kann auch ein verschränktes werden (Fig. 28), ja vielfach ist eine solche Anordnung der Kräfte die bequemste.

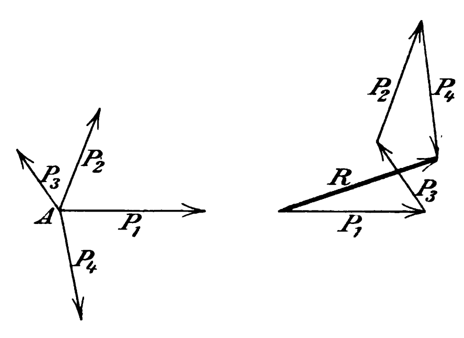


Fig. 28.

Die besondere Zeichnung, in der die Kräfte zusammengesetzt werden, nennt man auch den Kräfteplan.

75.

Das Kräfteparallelepiped. Wirken auf einen materiellen Punkt A drei nicht in derselben Ebene liegende Kräfte $A\,P$, $A\,Q$ und $A\,S$ (Fig. 29), so lege man durch zwei von ihnen z. B. $A\,P$ und $A\,Q$ die durch sie bestimmte Ebene, konstruiere in dieser durch das Parallelogramm der Kräfte die Resultante $A\,H$ der Kräfte $A\,P$ und $A\,Q$; konstruiere dann in der durch $A\,H$ und $A\,S$ bestimmten Ebene die Resultante $A\,R$ von $A\,H$ und $A\,S$. Diese Kraft $A\,R$ ist die Resultante der drei Kräfte $A\,P$, $A\,Q$ und $A\,S$.

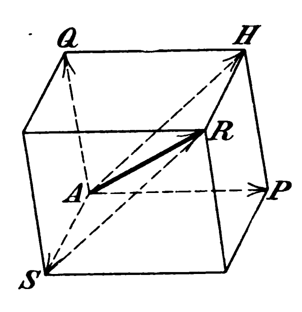


Fig. 29.

Eine genaue Betrachtung lehrt, daß zur Konstruktion von $A\,R$ an Stelle des Kräfteparallelogramms das Kräfteparallelepiped tritt, von dem drei zusammenstoßende Seiten die drei Seitenkräfte $A\,P$, $A\,Q$ und $A\,S$ sind, und dessen Diagonale der Größe und Richtung nach die Resultante der drei Kräfte darstellt.

Stehen die drei Seitenkräfte aufeinander senkrecht, so wird das Parallelepiped ein rechtwinkliges und die Größe R der Resultante ist durch die Formel

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + S^2} \tag{1}$$

bestimmt. Sind in diesem Falle α, β und γ die Winkel, die R mit P, Q und S bildet, so ist die Richtung von R durch die drei Gleichungen

$$\cos\alpha = \frac{P}{R};\quad \cos\beta = \frac{Q}{R};\quad \cos\gamma = \frac{S}{R} \tag{2}$$

bestimmt.

76.

Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten. Wie zwei auf einen materiellen Punkt wirkende Kräfte durch eine einzige, ihre Resultante, ersetzt werden können, so kann man auch umgekehrt überall da, wo es nützlich und zweckmäßig

erscheint, eine Kraft durch zwei mit ihr in ein und derselben Ebene liegende Kräfte ersetzen oder, wie man das auszudrücken pflegt, eine Kraft in zwei Komponenten zerlegen. Diese Zerlegung einer Kraft gibt, wie wir später an verschiedenen der Praxis entnommenen Beispielen sehen werden, erst die genauere Einsicht in die Wirkungsweise der Kräfte.

Die Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten kann in unendlich vielfacher Weise geschehen, nur muß sie stets so vorgenommen werden, daß die nach dem Kräfteparallelogramm erfolgende Zusammensetzung der Komponenten wieder auf die gegebene Kraft als Resultante führt.

Die im allgemeinen unbestimmte Aufgabe der Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten wird bestimmt, wenn die zur Konstruktion des Kräfteparallelogramms, dessen Diagonale die gegebene Kraft ist, noch nötigen Bestimmungsstücke gegeben sind. Sind z. B. die Richtungen der Seitenkräfte gegeben, so soll nur noch ihre Größe bestimmt werden. Ist etwa AR (Fig. 30) die der Größe und Richtung nach gegebene Kraft, und soll diese in zwei Komponenten zerlegt werden, deren Richtungen durch die Winkel α und β bestimmt sind, die sie gegen AR haben, so ziehe man durch A zwei Strahlen, die mit AR die Winkel α und β bilden, und konstruiere nun das Parallelogramm, dessen Diagonale AR ist. Zwei zusammenstoßende Seiten, z. B. AP und AQ dieses Parallelogramms geben die Komponenten der Größe und Richtung nach an.

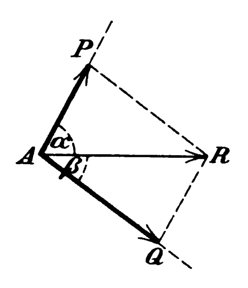


Fig. 30.

Auch das Kräftedreieck liefert die Zerlegung; man konstruiert ein Dreieck, in dem eine Seite AR ist und in dem die dieser Seite anliegenden Winkel gleich den Winkeln α und β sind: die beiden andern Seiten dieses Dreiecks stellen die Seitenkräfte dar.

Am häufigsten kommt der Fall vor, daß eine Kraft in zwei zueinander senkrechte Komponenten, deren Richtungen gegeben sind, zerlegt werden soll. Ist AR die in A angreifende Kraft (Fig. 31) und sind AX und AY die zu-

einander senkrechten Richtungen der gesuchten Komponenten, so findet man diese einfach dadurch, daß man von R auf $A\,X$ und $A\,Y$ die Lote fällt; die Strecken vom Angriffspunkte A bis zu den Fußpunkten dieser Lote stellen der Größe und Richtung nach die gesuchten Komponenten dar.

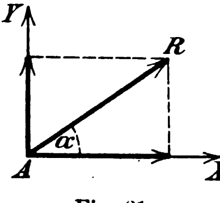


Fig. 31.

Anm. 1. Die Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten ist notwendig, wenn die Richtung der Kraft nicht mit der Richtung übereinstimmt, die für die Bewegung des Angriffspunktes vorgeschrieben ist. Die Kraft wird dann so zerlegt, daß eine ihrer Komponenten in die Richtung der vorgeschriebenen Bewegung fällt, also voll zur Wirkung gelangt, während die andere auf dieser Bewegungsrichtung senkrecht steht, also für die Bewegung ohne Wirkung ist und sich nur in einem Drucke oder Zuge auf den Weg des materiellen Punktes äußert. Man nennt die erstere Komponente die dynamische, letztere die statische Komponente der Kraft.

Anm. 2. Die Komponenten P und Q einer Kraft R, die mit der Richtung der Kraft die Winkel α und β bilden, ergeben sich durch Anwendung des Sinussatzes auf das Kräftedreieck zu

$$P = \frac{R \cdot \sin \beta}{\sin (\alpha + \beta)}; \qquad Q = \frac{R \cdot \sin \alpha}{\sin (\alpha + \beta)}.$$

Stehen die Richtungen der Komponenten senkrecht zueinander und bildet R mit $A\,X$ den Winkel α, sind ferner X_0 und Y_0 die Komponenten in den Richtungen $A\,X$ und $A\,Y$, so ist

$$X_0 = R \cdot \cos \alpha; \qquad Y_0 = R \cdot \sin \alpha.$$

77.

Entsprechend der Kräftezerlegung in der Ebene kann eine Kraft, wie sie als Resultierende aus drei Kräften, die nicht in einer Ebene liegen, durch das Parallelepiped der Kräfte entsteht, in drei Komponenten im Raume zerlegt werden, deren Richtungen gegen die der Kraft gegeben sein müssen, soll die Aufgabe eine bestimmte sein.

Sollen insbesondere die drei Richtungen der Komponenten aufeinander senkrecht stehen, so lege man durch den Angriffspunkt A Parallele AX, AY und AZ zu diesen drei Richtungen und fälle von dem Endpunkte von P (Fig. 32) auf AX, AY und AZ Lote; die Strecken von A bis zu den Fußpunkten dieser Lote sind die gesuchten Komponenten.

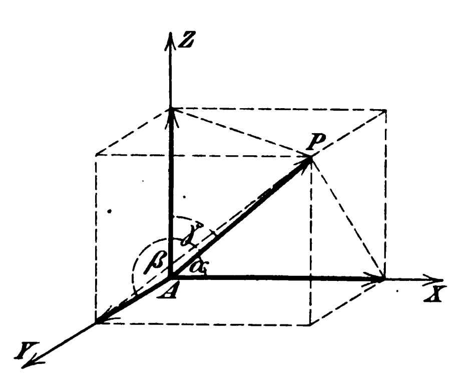


Fig. 32.

Bezeichnen wir ihre Größe mit X_0, Y_0 und Z_0 und mit α, β und γ die drei Winkel, die die Richtung von P mit den drei Geraden AX, AY und AZ bildet, so ist

$$X_0 = P \cdot \cos \alpha; \quad Y_0 = P \cdot \cos \beta; \quad Z_0 = P \cdot \cos \gamma.$$

Übrigens genügen (wie in der Ebene ein Winkel genügt) zwei Winkel α und β vollständig, da aus der Gleichung

$$X_0{}^2 + Y_0{}^2 + Z_0{}^2 = P^2$$

für die Winkel die Gleichung

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

folgt.

78.

Mit Hülfe der in § 76 besprochenen Zerlegung einer Kraft in zwei rechtwinklige Komponenten kann man die Resultante beliebig vieler Kräfte, die auf einen materiellen Punkt A wirken, in folgender Weise ableiten.

Wirken zunächst auf einen Punkt A beliebig viele Kräfte P_1, P_2, . . . P_n, die sämtlich in einer Ebene liegen, so lege man durch A zwei beliebige zu einander senkrechte Gerade XX' und YY' (Fig. 33) und zerlege jede Kraft nach diesen Richtungen in zwei Komponenten. Betrachtet man die nach AX und AY gerichteten Komponenten als positiv, die nach

AX' und AY' gerichteten als negativ, so kann man die in die Gerade XX' fallenden Komponenten und die in die Gerade YY' fallenden Komponenten algebraisch (d. h. mit ihren Vorzeichen) summieren und erhält dann eine Komponente in der Geraden XX' und eine in der Geraden YY', die dann zu einer einzigen Kraft zusammengesetzt werden können; diese ist die Resultante der n Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$.

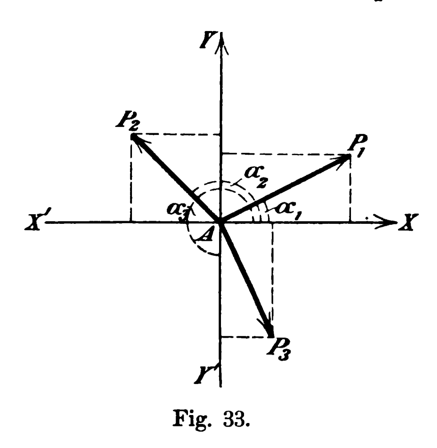


Fig. 33.

Bezeichnet man den Winkel, den die Richtung der Kraft P_i mit AX einschließt, genauer den Winkel, um den AX nach der positiven Richtung AY (in unserer Figur entgegen der Richtung des Uhrzeigers) gedreht werden muß, um mit der Richtung von P_i zusammenzufallen, mit α_i, und sind X_0 und Y_0 die algebraischen Summen der in die Richtungen XX' und YY' fallenden Komponenten, so hat man für diese die Gleichungen

$$(1)\quad \begin{cases} X_0 = P_1 \cdot \cos \alpha_1 + P_2 \cdot \cos \alpha_2 + \ldots + P_n \cdot \cos \alpha_n \\ \quad = \Sigma P_i \cdot \cos \alpha_i \\ Y_0 = P_1 \cdot \sin \alpha_1 + P_2 \cdot \sin \alpha_2 + \ldots + P_n \cdot \sin \alpha_n \\ \quad = \Sigma P_i \cdot \sin \alpha_i. \end{cases}$$

Die Resultante R der n Kräfte und ihr Winkel α gegen die Gerade AX ist dann durch die Gleichungen

$$(2)\quad \begin{cases} R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2} \\ \cos \alpha = \frac{X_0}{R}; \qquad \sin \alpha = \frac{Y_0}{R} \end{cases}$$

bestimmt.

Liegen die Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ nicht sämtlich in einer Ebene, so legt man entsprechend durch A drei einander senkrechte Gerade XX', YY' und ZZ' und zerlegt jede

Kraft P_i in drei Komponenten nach diesen Geraden. Die algebraischen Summen der Komponenten nach den drei Geraden sind alsdann

$$(3)\quad \begin{cases} X_0 = P_1 \cdot \cos \alpha_1 + P_2 \cdot \cos \alpha_2 + \ldots + P_n \cdot \cos \alpha_n \\ \quad = \Sigma P_i \cdot \cos \alpha_i \\ Y_0 = P_1 \cdot \cos \beta_1 + P_2 \cdot \cos \beta_2 + \ldots + P_n \cdot \cos \beta_n \\ \quad = \Sigma P_i \cdot \cos \beta_i \\ Z_0 = P_1 \cdot \cos \gamma_1 + P_2 \cdot \cos \gamma_2 + \ldots + P_n \cdot \cos \gamma_n \\ \quad = \Sigma P_i \cdot \cos \gamma_i, \end{cases}$$

und die Resultante der n Kräfte ist ihrer Größe und Richtung nach durch die Gleichungen

$$(4)\quad \begin{cases} R = \sqrt{X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2} \\ \cos \alpha = \frac{X_0}{R}; \quad \cos \beta = \frac{Y_0}{R}; \quad \cos \gamma = \frac{Z_0}{R} \\ \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1 \end{cases}$$

bestimmt.

79.

Aufgabe. Zwei Kräfte $P = 200$ kg und $Q = 500$ kg wirken unter einem Winkel $\gamma = 70^0$ auf einen materiellen Punkt A; wie groß ist die Resultante?

I. **Auflösung durch Konstruktion.** Nachdem man mit Hilfe des Winkelmessers (Transporteurs) den Winkel $\gamma = 70^0$ gezeichnet hat, trägt man vom Scheitel A aus nach einem beliebigen verjüngten Maßstabe die Strecken $AB = 200$ und $AC = 500$ ab (man wähle etwa 10 kg als Längeneinheit, mache also $AB = 20$, $AC = 50$ Längeneinheiten); konstruiert man aus ihnen das Parallelogramm $ABDC$ und zieht von A die Diagonale AD, so gibt diese, nach demselben Maßstabe gemessen, die Größe der Resultante in kg an und zwar für manche Zwecke genau genug.

In einer Zeichnung, bei der als Längeneinheit 3 mm für 10 kg gewählt worden war, wurde die Diagonale $AD = 178$ mm lang gefunden, woraus sich die Resultante $R = 593$ kg ergibt. Für die Winkel, die R mit den Komponenten P und

Q bildet, wurden in derselben Zeichnung die Größen 52^0 und 18^0 gemessen.

Konstruiert man nur das Kräftedreieck $A\,B\,C$ aus $A\,B = 200$, $B\,C = 500$ und dem eingeschlossenen Winkel $A\,B\,C = 110^0$, so gibt die Seite $A\,C$ die Resultante der Größe und Richtung nach.

II. **Auflösung durch Rechnung.** Die allgemeine Formel des § 71

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2\,P\,Q \cdot \cos\gamma}$$

liefert in unserm Falle für $P = 200$ kg, $Q = 500$ kg, $\gamma = 70^0$ den Wert

$$R = 598{,}6 \text{ kg}.$$

Die Winkel α und β, die die Richtung von R gegen die Richtungen von P und Q bildet, ergeben sich aus

$$\sin\alpha = \frac{Q \cdot \sin\gamma}{R}; \quad \sin\beta = \frac{P \cdot \sin\gamma}{R}$$

zu

$$\alpha = 51^0\,43'; \quad \beta = 18^0\,17'.$$

80.

Aufgabe. Um einen Stützpunkt A zu halten, sei die nach der Richtung $A\,D$ wirkende Kraft $R = 1000$ kg erforderlich. Wegen eines Hindernisses sei es aber nicht möglich nach dieser Richtung die Kraft R wirken zu lassen, wohl aber stehen die beiden durch die Winkel $\alpha = 30^0$ und $\beta = 50^0$ gegen $A\,D$ gegebenen Richtungen $A\,B$ und $A\,C$ frei. Welche Kräfte müssen nach diesen Richtungen angebracht werden, um die beabsichtigte Wirkung auf den Punkt A hervorzubringen?

Auflösung. a) Durch Konstruktion. Auf der Richtung $A\,D$ trägt man die der Größe $R = 1000$ kg entsprechende Strecke ab und zieht durch den Endpunkt Parallele zu den Richtungen $A\,B$ und $A\,C$, die auf diesen Richtungen Strecken abschneiden, durch deren Länge die Größe der Komponenten P und Q bestimmt ist.

b) Durch Rechnung. Nach den Formeln

$$P = \frac{R \cdot sin\ \beta}{sin\ (\alpha + \beta)}; \quad Q = \frac{R \cdot sin\ \alpha}{sin\ (\alpha + \beta)}$$

des § 76 findet man

$$P = 778 \text{ kg}; \qquad Q = 508 \text{ kg}.$$

81.

Aufgabe. Auf den materiellen Punkt A soll eine Kraft $R = 100$ kg nach der Richtung $A\,D$ ausgeübt werden. Diese Kraft steht nicht zur Verfügung, sondern die zwei Kräfte $P = 60$ kg und $Q = 80$ kg; wie müssen diese Kräfte gegen $A\,D$ gerichtet sein, um die erforderliche Wirkung zu erzielen?

Auflösung. a) Durch Konstruktion. Man konstruiert ein Dreieck aus drei Strecken, die den Größen der Kräfte R, P und Q entsprechen. Die Winkel dieses Dreiecks an der der Kraft R entsprechenden Seite sind die gesuchten Winkel.

b) Durch Rechnung. Bezeichnen α und β die Winkel, die die Kräfte P und Q mit R bilden, so ergeben die Formeln (5) des § 71 die Werte

$$\alpha = 53^0\,8'; \qquad \beta = 36^0\,52'.$$

82.

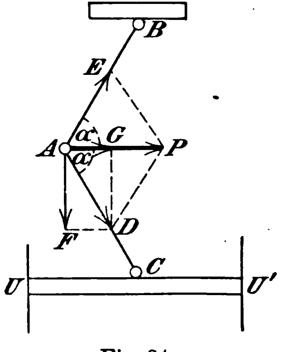


Fig. 34.

Aufgabe. Zwei gleichgroße Stangen $A\,B$ und $A\,C$ sind durch ein Gelenk bei A miteinander verbunden; die Stange $A\,B$ ist bei B am sogenannten Preßhelm befestigt, während die Stange $A\,C$ bei C an einer in vertikaler Richtung nachgiebigen Unterlage $U\,U'$ befestigt ist und gegen diese drückt. In A wirkt eine Kraft P, die mit den Stangen $A\,B$ und $A\,C$ je den Winkel α bildet (Fig. 34). Es soll die Größe des bei diesem Apparate, der

einfachen Kniepresse (Kniehebelpresse), normal auf die Unterlage $U\,U'$ ausgeübten Druckes berechnet werden.

Auflösung. Zerlegt man die Kraft P in die beiden Komponenten $A\,D$ und $A\,E$ nach den Richtungen der Stangen $A\,C$ und $A\,B$ und dann die Komponente $A\,D$ in zwei Komponenten $A\,F$ und $A\,G$, von denen die erstere senkrecht zu $U\,U'$, die zweite parallel zu $U\,U'$ gerichtet ist, so ist $A\,F$ der auf $U\,U'$ durch P ausgeübte Druck.

Rechnung. Da das Viereck $A\,D\,P\,E$ ein Rhombus ist, so ist $A\,G = \frac{1}{2}\,P$; aus dem rechtwinkligen Dreieck $A\,G\,D$ folgt alsdann, da $G\,D = A\,F$ ist, daß der auf $U\,U'$ ausgeübte Druck die Größe

$$A\,F = \frac{1}{2}\,P \cdot tg\,\alpha$$

hat. Hieraus folgt, daß der von P auf $U\,U'$ ausgeübte Druck immer größer wird, je größer α wird, und daß er für $\alpha = 90^0$ sogar unendlich werden kann.

Ist $P = 20$ kg, so ergibt sich folgende Tabelle für α und den zugehörigen Druck $A\,F$:

α	$tg\,\alpha$	$A\,F$	
$\alpha = 40^0$;	$tg\,\alpha =$ 0,839;	$A\,F =$ 0,420 $P =$	8,4 kg;
$= 45^0$;	$=$ 1,000;	$=$ 0,500 $P =$	10,0 „ ;
$= 50^0$;	$=$ 1,192;	$=$ 0,596 $P =$	11,9 „ ;
$= 60^0$;	$=$ 1,732;	$=$ 0,866 $P =$	17,3 „ ;
$= 65^0$;	$=$ 2,145;	$=$ 1,073 $P =$	21,5 „ ;
$= 75^0$;	$=$ 3,732;	$=$ 1,866 $P =$	37,3 „ ;
$= 85^0$;	$=$ 11,430;	$=$ 5,725 $P =$	114,3 „ .

Die Kniepresse hat somit den Vorteil, daß der Druck $A\,F$ um so größer wird, je weiter man die Pressung fortsetzt.

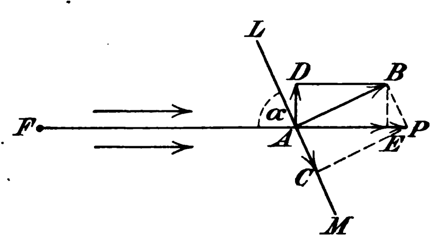


Fig. 35.

83.

Aufgabe. Es sei $L\,M$ (Fig. 35) eine in F durch die Kette $F\,A$ verankerte und schief gegen die durch die beiden Pfeile bei F angedeutete Stromrichtung gestellte



fliegende Brücke; es soll gezeigt werden, wie diese durch die Stromkraft über den Fluß getrieben werden kann.

Auflösung. Die in A angreifende Stromkraft $A\,P$ zerlegen wir in zwei Komponenten, $A\,B$ senkrecht zur Brücke $L\,M$, $A\,C$ parallel der Brücke; nur die erstere wirkt als Druck auf die Brücke, doch kann die Brücke ihr direkt nicht folgen. Wir zerlegen $A\,B$ wieder in zwei Komponenten, $A\,E$ parallel der Stromrichtung, $A\,D$ senkrecht dazu, die erstere $A\,E$ ist die statische Komponente der Stromkraft, die Spannung, die die Kette auszuhalten hat, während $A\,D$ die die Brücke treibende dynamische Komponente ist.

Bezeichnen wir den Winkel $L\,A\,F$ mit α, so ist $\measuredangle\, B\,A\,P = 90^0 - \alpha$ und $A\,B = P \cdot \sin\alpha$; $A\,D = A\,B \cdot \cos\alpha$ $= P \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}\,P \cdot \sin 2\,\alpha$; die treibende Kraft erreicht also ihren größten Wert $\frac{1}{2}\,P$, wenn $\sin 2\,\alpha = 1$ oder $\alpha = 45^0$ ist.

84.

Aufgabe. Es sei $S\,S'$ (Fig. 36) das als ebene Fläche angenommene Segel eines Schiffes, das gegen die Kielrichtung $A\,B$ unter dem Winkel β gestellt ist; auf das Segel wirke im Punkte C die Kraft P des Windes unter dem Winkel α gegen das Segel. Es soll die das Schiff in der Kielrichtung treibende Kraft konstruiert und berechnet werden.

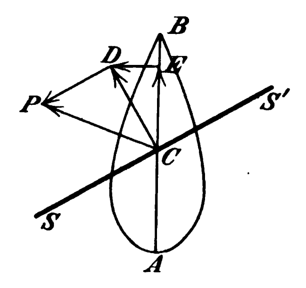


Fig. 36.

Auflösung. Man zerlegt den Winddruck $C\,P$ durch das Kräftedreieck $C\,P\,D$ in die Komponenten $D\,P$ parallel und $C\,D$ senkrecht zum Segel $S\,S'$. Die erstere Komponente äußert keine Wirkung auf das Segel, sondern gleitet an ihm ab; die zweite Komponente dagegen ist die wirksame. Zerlegt man diese Kraft $C\,D$ nochmals in zwei Komponenten, eine $C\,E$ in der Kielrichtung oder längsschiffs, die zweite

ED senkrecht dazu oder querschiffs, so erhält man die treibenden Kräfte, die die Bewegung des Schiffes veranlassen, und zwar ist CE die gesuchte, das Schiff in der Kielrichtung treibende Kraft.

Infolge der Bauart des Schiffes, der spitzen Form, ist der Widerstand des Wassers auf der Breitseite viel größer als nach der Kielrichtung, deswegen wird sich das Schiff mehr nach der Kielrichtung AB bewegen, selbst wenn bei scharf von vorn einfallendem Winde die Komponente ED querschiffs die Komponente CE längsschiffs übertrifft. Im allgemeinen wird die seitliche Abweichung oder die Abtrifft um so geringer sein, je schärfer das Schiff gebaut wird, denn um so mehr wird die Komponente senkrecht zur Kielrichtung durch den Widerstand des Wassers aufgehoben.

Die Auflösung der Aufgabe zeigt zugleich, wie man durch Anwendung von Segeln auf der See nach allen Richtungen, nur nicht dem Winde entgegen, fahren kann. Um dennoch ein Ziel zu erreichen, von dem der Wind gerade herkommt, muß das Schiff unter Segel kreuzen (lavieren), um so mit indirektem Kurse zum Bestimmungsorte zu gelangen.

Aus dem Dreieck CDP folgt $CD = P \cdot \sin \alpha$ und aus Dreieck CDE ergibt sich, da $\angle CDE = \beta$ ist, weil beide durch $\angle DCE$ zu 90^0 ergänzt werden, für die das Schiff in der Kielrichtung treibende Kraft

$$CE = P \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta.$$

Sind α und β beide 30^0, so ist $CE = \frac{1}{4} P$. Ist imbesonderen die Windrichtung CP senkrecht gegen die Kielrichtung, so ist $\alpha = 90^0 - \beta$, und es wird

$$CE = P \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} P \cdot \sin 2\beta;$$

um den Wind möglichst auszunützen, muß in diesem Falle das Segel unter $\beta = 45^0$ gegen die Kielrichtung gestellt werden.

Anm. 1. Auch die Wirkung des Steuers ist leicht einzusehen, wenn man bedenkt, daß es ganz dasselbe ist, ob man mit dem Steuer gegen das Wasser drückt oder ob umgekehrt das Wasser gegen das Steuer stößt. Dieser Druck

des Wassers auf das Steuer zerlegt sich in zwei Komponenten: die eine parallel mit der Ebene des Steuers gleitet ab, die andere normal auf der Steuerebene dreht das Schiff.

Anm. 2. Genau wie in der vorstehend ausführlich behandelten Aufgabe zeigt man durch zweimalige Zerlegung, daß die horizontale Kraft des Windes die schräg gegen ihn gerichteten (windschiefen) Flügel einer Mühle drehen kann.

85.

Aufgabe. Wie kommt es, daß der Wind einen Drachen zum Steigen bringt?

Auflösung. Der in der Luft schwebende Drache A (Fig. 37) sei im Punkte B durch den Faden BA befestigt; AW sei die Stärke des horizontal wehenden Windes. Diese

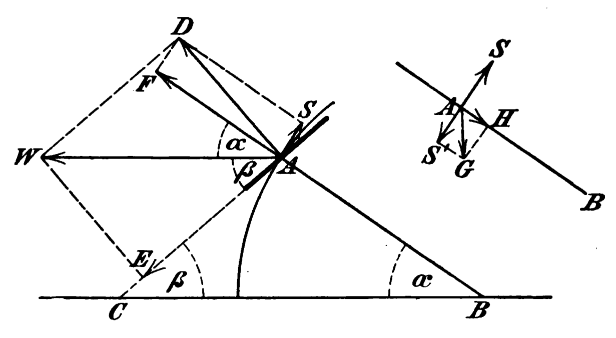


Fig. 37.

läßt sich in die Komponenten AD senkrecht zum Drachen und AE entlang dem Drachen zerlegen. Letztere Komponente ist ohne Wirkung. Die erstere läßt sich wieder in die Komponente AF in der Richtung des Fadens BA und AS in der Richtung der Tangente an den Kreis (Drachenbahn) zerlegen. Die Komponente AF spannt den Faden, die Komponente AS ist dagegen die den Drachen in die Höhe treibende Steigkraft.

Ist nun AG (vergl. die Nebenfigur) das Gewicht des Drachen, so läßt sich dieses in die der Fadenspannung ent-

gegenwirkende Komponente $A\,H$ und in die der Steigkraft $A\,S$ entgegenwirkende $A\,S'$ zerlegen; ist nun $A\,S'$ kleiner als $A\,S$, so steigt der Drache, und zwar so lange bis $A\,S = A\,S'$ wird.

Anm. Ist α der Winkel, den der Faden $B\,A$ mit der Horizontalebene bildet, β der Winkel, den die Ebene des Drachen mit derselben Ebene bildet, so ist $\measuredangle\, F\,D\,A = \alpha + \beta$, weil $\measuredangle\, F\,A\,E = \alpha + \beta$ und beide Winkel durch $\measuredangle\, F\,A\,D$ zu 90^0 ergänzt werden; also ist

$$A\,S = A\,D \cdot \cos(\alpha + \beta) = A\,W \cdot \sin\beta \cdot \cos(\alpha + \beta)$$
$$A\,F = A\,D \cdot \sin(\alpha + \beta) = A\,W \cdot \sin\beta \cdot \sin(\alpha + \beta).$$

Nun ist aber $\measuredangle\, S'\,A\,G = \alpha$, weil seine Schenkel auf denen von α senkrecht stehen; bezeichnet daher P das Gewicht des Drachen, so ist $A\,S' = P \cdot \cos\alpha$, $A\,H = P \cdot \sin\alpha$, so daß die Steigkraft des Drachen

$$A\,S - A\,S' = A\,W \cdot \sin\beta \cdot \cos(\alpha + \beta) - P \cdot \cos\alpha$$

und die Fadenspannung

$$A\,F - A\,H = A\,W \cdot \sin\beta \cdot \sin(\alpha + \beta) - P \cdot \sin\alpha$$

ist.

Aufgaben.

68. Auf einen materiellen Punkt wirken teils in derselben, teils in entgegengesetzter Richtung die folgenden Kräfte: + 68 kg; + 37 kg; — 143 kg; + 109 kg; — 48 kg; wie groß ist ihre Resultante?

Antw.: + 23 kg.

69. Auf einen materiellen Punkt wirken die Kräfte P und Q unter dem Winkel γ; durch Zeichnung und Rechnung sollen ihre Resultante und die Winkel α und β bestimmt werden, die die Resultante mit P und Q bildet?

a) $P = 50$ kg; $Q = 80$ kg; $\gamma = 60^0$;
b) $P = 75$ kg; $Q = 75$ kg; $\gamma = 80^0$;
c) $P = 200$ kg; $Q = 150$ kg; $\gamma = 120^0$.

Antw. a) $R = 113{,}6$ kg; $\alpha = 37^0\,36'$; $\beta = 22^0\,24'$;
b) $R = 114{,}9$ kg; $\alpha = 40^0\,0'$; $\beta = 40^0\,0'$;
c) $R = 180{,}3$ kg; $\alpha = 46^0\,6'$; $\beta = 73^0\,54'$.

70. Auf den Punkt A wirken unter rechtem Winkel zwei Kräfte $P = 88$ kg und $Q = 105$ kg; wie groß ist ihre Resultante? welchen

Winkel bildet sie mit der kleineren Kraft?

Antw.: $R = 137$ kg; $\alpha = 50^0 2'$.

71. Eine Kraft von 97 kg soll in zwei zueinander rechtwinklige zerlegt werden, von denen die eine 72 kg groß ist; wie groß ist die andere?

Antw.: 65 kg.

72. Eine Kraft von 205 kg soll in zwei zueinander senkrechte Seitenkräfte zerlegt werden, von denen die eine mit der Mittelkraft den Winkel $\alpha = 40^0 27'$ bildet; wie groß sind die beiden Seitenkräfte?

Antw.: $P = 156$ kg; $Q = 133$ kg.

73. Eine Kraft von 40 kg kann durch zwei Seitenkräfte $P = 37$ kg, $Q = 13$ kg ersetzt werden; welche Winkel bilden diese mit der Mittelkraft?

Antw.: $\alpha = 18^0 55'$; $\beta = 67^0 23'$.

74. Zwei Kräfte von je 80 kg wirken unter dem Winkel $\gamma = 120^0$ auf einen materiellen Punkt; wie groß ist ihre Resultante und welche Richtungen bildet sie mit den beiden Seitenkräften?

Antw.: $R = 80$ kg; $\alpha = \beta = \frac{\gamma}{2} = 60^0$.

75. An zwei Seilen, die mit der horizontalen Richtung den Winkel $\alpha = 30^0$ bilden, hängt ein Zentnerstein; wie groß ist die Spannung in jedem der beiden Seile? (Antw.: 50 kg.)

Durch Zeichnung zu beweisen, daß diese größer wird, wenn α abnimmt!

76. Ein Lastkahn wird in der Stromrichtung eines Flusses durch zwei am Ufer gehende Pferde, die eine Zugkraft von 160 kg haben, gezogen; wie groß ist die dynamische und wie groß die statische Komponente dieses Zuges, wenn die am Maste befestigte Zugleine mit der Kielrichtung einen Winkel von 30^0 einschließt?

Antw.: 138,5 kg; 80 kg.

77. Ein Dachsparren übt in seiner Längsrichtung auf eine horizontale Mauer einen Druck von 8000 kg aus, der parallel der Mauer in Horizontalschub und senkrecht zur Mauer in Vertikaldruck zerlegt werden soll; wie groß sind diese Komponenten, wenn der Sparren mit der Horizontalebene den Winkel $\alpha = 32^0$ bildet?

Antw.: Schub = 6784 kg; Druck = 4240 kg.

78. Auf einen materiellen Punkt A wirken drei zueinander senkrechte Kräfte $P_1 = 6$ kg, $P_2 = 8$ kg, $P_3 = 5$ kg; wie groß ist ihre Resultante?

Antw.: 11,18 kg.

79. Auf einen materiellen Punkt A wirken vier in einer Ebene liegende Kräfte $P_1 = 24$ kg, $P_2 = 36$ kg, $P_3 = 20$ kg, $P_4 = 25$ kg, die mit einem durch A gehenden Strahle $A\,X$ die Winkel

$$\alpha_1 = 30^0;\ \alpha_2 = 100^0;\ \alpha_3 = 160^0;\ \alpha_4 = 250^0$$

bilden; es soll die Größe und Richtung ihrer Resultante a) durch Zeichnung, b) durch Rechnung bestimmt werden!

Antw.: $R = 33{,}4$ kg; $\alpha = 112^0\,35'$.

80. Auf einen materiellen Punkt A wirken drei Kräfte im Raume, deren Größe und Winkel gegen drei durch A gehende aufeinander senkrecht stehende Achsen gegeben sind:

$$P_1 = 12 \text{ kg};\ \alpha_1 = 40^0\,20';\ \beta_1 = 53^0\,17';\ \gamma_1 = 75^0\,39';$$
$$P_2 = 25 \text{ kg};\ \alpha_2 = 79^0\,30';\ \beta_2 = 26^0\,12';\ \gamma_2 = 66^0\,17';$$
$$P_3 = 10 \text{ kg};\ \alpha_3 = 60^0\,45';\ \beta_3 = 36^0\,50';\ \gamma_3 = 69^0\,40'.$$

Wie groß ist ihre Resultante und welche Winkel bildet sie mit den Achsen?

Antw.: $R = 45$ kg; $\alpha = 65^0\,38'$; $\beta = 33^0\,25'$; $\gamma = 68^0\,37'$.

Siebentes Buch.

Gleichgewicht von Kräften an einem materiellen Punkte.

86.

Wenn eine auf einen materiellen Punkt, der sich in Ruhe oder in Bewegung befinden kann, wirkende Kraft keine Änderung des Bewegungszustandes dieses Punktes kervorbringt, so muß die Wirkung dieser Kraft durch eine oder mehrere andere auf denselben Punkt wirkende Kräfte aufgehoben oder vernichtet werden. Man sagt alsdann: die an dem materiellen Punkte angreifenden Kräfte sind im **Gleichgewichte** oder auch, der materielle Punkt ist unter der Einwirkung der Kräfte im Gleichgewichte.

Da die Resultante der auf einen Punkt wirkenden Kräfte für sich allein genau dieselbe Wirkung hervorbringt, wie die wirkenden Kräfte zusammengenommen, so muß die Resultante der auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräfte **Null** sein, wenn diese Kräfte im Gleichgewichte sind. Da

durch Kräfte, die im Gleichgewichte sind, der Bewegungszustand des Punktes nicht geändert wird, so bleibt der materielle Punkt unter der Einwirkung solcher Kräfte in Ruhe, falls er in Ruhe war, oder er verharrt, falls er in Bewegung war, in einer durch seine Anfangsgeschwindigkeit völlig bestimmten gleichförmigen und geradlinigen Bewegung.

Wenn also der Ruhezustand eines materiellen Punktes Gleichgewicht der auf ihn wirkenden Kräfte voraussetzt, so folgt doch nicht umgekehrt, daß der materielle Punkt in Ruhe sein müsse, wenn auf ihn wirkende Kräfte im Gleichgewichte sind. Es kann also Gleichgewicht der Kräfte stattfinden und trotzdem sich der Punkt bewegen — nur muß seine Bewegung geradlinig und gleichförmig sein, da jede Änderung in der Richtung und in der Geschwindigkeit nur in der Wirkung einer Kraft ihre Ursache haben kann.

87.

Aus dem vorigen Buche folgt nun sofort, daß zwei an einem Punkte angreifende Kräfte nur dann im Gleichgewichte sein können, wenn sie gleiche Größe, aber entgegengesetzte Richtungen haben. Denn andernfalls kann man ihre Wirkung stets durch eine einzige Kraft, nämlich durch ihre nach dem Parallelogrammgesetze bestimmte Resultante ersetzen, deren Größe von Null verschieden ist.

Auch ist ohne weiteres einleuchtend, daß mehrere Kräfte, die an einem materiellen Punkte angreifen und deren Richtungen sämtlich in eine Gerade fallen, im Gleichgewichte sind, wenn ihre algebraische Summe Null ist, oder, wenn die Summe der in der einen Richtung wirkenden Kräfte gleich der Summe der in der entgegengesetzten Richtung wirkenden Kräfte ist.

88.

Wirken auf einen materiellen Punkt drei Kräfte nach verschiedenen Richtungen, so können sie nur dann im Gleichgewichte sein, wenn sie in einer Ebene liegen; denn im andern Falle kann man sie durch ihre nach § 75 zu konstruierende Resultante ersetzen.

Um zu untersuchen, unter welchen Bedingungen drei in einer Ebene auf einen materiellen Punkt wirkende Kräfte P_1, P_2 und P_3 im Gleichgewichte sind, konstruiere man zu zwei beliebigen von ihnen, etwa zu P_2 und P_3, nach dem Kräfteparallelogramm die Resultante R; ist diese der dritten Kraft P_1 der Größe nach gleich, aber der Richtung nach entgegengesetzt, so heben sich die Wirkungen von P_1 und R, also auch die von P_1, P_2 und P_3 auf, d. h. die drei Kräfte sind im Gleichgewichte. Es gilt also der Satz:

Drei an einem materiellen Punkte angreifende, in einer Ebene liegende Kräfte sind im Gleichgewichte, wenn jede von ihnen der Resultante der beiden andern der Größe nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt ist.

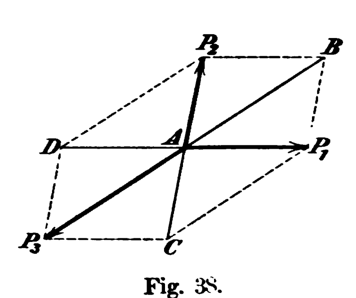


Fig. 38.

Es muß also $A\,B$ (Fig. 38) gleich und entgegengesetzt P_3, $A\,C$ gleich und entgegengesetzt P_2, $A\,D$ gleich und entgegengesetzt P_1 sein.

89.

Bezeichnet man den Winkel, den zwei Kräfte P und Q miteinander bilden, durch $(P \mid Q)$, so ist in dem Dreieck $A\,B\,P_2$

$$\sphericalangle\, B\,A\,P_2 = 180^0 - (P_2 \mid P_3);$$
$$\sphericalangle\, A\,B\,P_2 = \sphericalangle\, B\,A\,P_1 = 180^0 - (P_1 \mid P_3) \text{ und}$$
$$\sphericalangle\, A\,P_2\,B = 180^0 - (P_1 \mid P_2).$$

Wendet man auf dieses Dreieck den Sinussatz an (Trigonometrie § 27) und beachtet, daß $A\,B = P_3$ ist, so ist die Proportion

$$P_1 : P_2 : P_3 = sin\,(P_2 \mid P_3) : sin\,(P_1 \mid P_3) : sin\,(P_1 \mid P_2)$$

oder die daraus folgende Gleichung

$$\frac{P_1}{sin\,(P_2 \mid P_3)} = \frac{P_2}{sin\,(P_1 \mid P_3)} = \frac{P_3}{sin\,(P_1 \mid P_2)}$$

der analytische Ausdruck für das Gleichgewicht der drei Kräfte.

90.

Konstruiert man die Resultante der drei Kräfte nach der in § 74 gelehrten Weise, so ist ihre Resultante gleich Null, wenn das Kräftepolygon ein geschlossenes ist, wenn also der Endpunkt von P_3 mit A zusammenfällt. Es ist unmittelbar einleuchtend, daß dasselbe von mehr als drei in einer Ebene liegenden Kräften gilt, so daß man den allgemeinen, für die zeichnerische (graphische) Behandlung einer Aufgabe wichtigen Satz hat:

Wirken auf einen materiellen Punkt beliebig viele in einer Ebene liegende Kräfte und konstruiert man das zu diesen Kräften gehörige Kräftepolygon, so sind die Kräfte an dem Punkte im Gleichgewichte, wenn das Kräftepolygon eine geschlossene Figur ist, während andernfalls die noch nötige Schlußseite des Polygons der Größe und Richtung nach die Resultante der Kräfte ist.

91.

Ist das Kräftepolygon ein geschlossenes, so folgen die die Richtungen der Kräfte andeutenden Pfeile alle in demselben Bewegungssinne aufeinander. Unter Kräfteplan versteht man vielfach ein solches besonderes Kräftepolygon.

Bei einem solchen Kräfteplane ist daher jede einzelne Kraft der Größe nach gleich, der Richtung nach entgegengesetzt der Resultante aller übrigen Kräfte. Kehrt man also die Pfeilrichtung einer der Kräfte des Kräfteplanes um, so erhält man in dieser Kraft die Resultante aller übrigen Kräfte.

Für die graphische Behandlung von Aufgaben folgt hieraus eine wichtige Bemerkung. Weiß man nämlich, daß an einem Punkte drei Kräfte im Gleichgewichte sind, und kennt man eine von ihnen sowie die Richtungen der beiden andern gegen die Richtung der gegebenen, so kann man die beiden unbekannten Kräfte leicht konstruieren, indem man den betreffenden Kräfteplan (in unserm Falle ein Dreieck)

dadurch konstruiert, daß man durch die Endpunkte der gegebenen Kraft Parallele zu den Richtungen der gesuchten zieht, die einander schneiden: die Längen dieser Parallelen geben die Größen der gesuchten Kräfte an.

Ganz analog ist das Verfahren, wenn n Kräfte im Gleichgewichte sind, und man die zur Konstruktion des Kräfteplans (n-ecks) nötigen Bestimmungsstücke hat.

92.

Wird die Resultante von n auf einen materiellen Punkt wirkenden Kräften, deren Richtungen sämtlich in einer Ebene liegen, dadurch bestimmt, daß man zwei zueinander senkrechte Richtungen wählt und jede Kraft in zwei Komponenten nach diesen Richtungen zerlegt, so kann die Resultierende $R = \sqrt{X_0{}^2 + Y_0{}^2}$ (§ 78) nur dann Null werden, wenn X_0 und Y_0 einzeln verschwinden.

Der analytische Ausdruck für das Gleichgewicht der n Kräfte ist also in den beiden Gleichungen

$$X_0 = \Sigma P_i \cdot \cos \alpha_i = 0$$
$$Y_0 = \Sigma P_i \cdot \sin \alpha_i = 0$$

gegeben.

93.

Genau entsprechend ist die Bedingung, daß die n Kräfte an einem materiellen Punkte beliebig im Raume liegen und im Gleichgewichte sein sollen, in den drei Gleichungen (vergl. § 78)

$$X_0 = \Sigma P_i \cdot \cos \alpha_i = 0$$
$$Y_0 = \Sigma P_i \cdot \cos \beta_i = 0$$
$$Z_0 = \Sigma P_i \cdot \cos \gamma_i = 0$$

enthalten.

Es ergibt sich also der allgemeine Satz:

Sollen n auf einen frei beweglichen materiellen Punkt beliebig im Raume wirkende Kräfte im Gleichgewichte sein, so ist die hierzu notwendige und hin-

reichende Bedingung, daß die algebraische Summe der bei der Zerlegung der Kräfte nach drei beliebig zueinander senkrechten Achsenrichtungen in jede dieser Achsenrichtungen fallenden Komponenten einzeln gleich Null ist.

Achtes Buch.

Der freie Fall.

94.

Bereits in § 51 (Die Schwerkraft als bewegende Kraft) haben wir die Bewegung erwähnt, die ein nicht unterstützter Körper infolge der Einwirkung der Schwerkraft in vertikaler Richtung ausführt und die der freie Fall heißt. Die Gesetze dieser Bewegung sind zuerst von Galilei (1564—1624) richtig ausgesprochen worden, während vorher unter dem Einflusse der Aristotelischen Lehren vielfach irrige und falsche Vorstellungen herrschten. Aristoteles lehrte z. B., daß Körper von größerem Gewichte rascher, Körper von kleinerem Gewichte langsamer fallen. Dadurch, daß Galilei diese und andere Vorstellungen als unrichtig bewies und die Fallgesetze fand, wurde er der Begründer der wissenschaftlichen Bewegungslehre.

Der freie Fall ist eine gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Wir können nämlich annehmen, daß ein Körper an demselben Orte der Erde immer gleich stark von der Erde angezogen wird. Zwar hat Newton bewiesen, daß die Schwerkraft proportional dem Quadrate der Entfernung vom Mittelpunkte der Erde abnimmt (vergl. § 181), doch ist diese Veränderung bei den kleinen auf der Erdoberfläche vorkommenden Fallhöhen so unmerklich klein, daß sie nicht in Betracht gezogen zu werden braucht und gleich Null gesetzt werden kann. Daraus folgt aber dann, daß der Körper, wenn man vom Widerstande der Luft absieht, also im leeren

Raume eine gleichförmig beschleunigte Bewegung annehmen muß. Denn darin besteht ja das Wesen der konstanten Kraft, daß ihre Wirkung, d. h. die durch sie erzeugte Beschleunigung auch konstant ist (§ 55).

95.

Die Formeln des § 22 für jede gleichförmig beschleunigte Bewegung, deren Anfangsgeschwindigkeit Null ist, gehen, wenn wir die Beschleunigung a durch die Beschleunigung g der Schwere ersetzen, über in

$$v = g\,t \tag{1}$$

$$s = \frac{1}{2}\,g\,t^2 \tag{2}$$

$$v^2 = 2\,g\,s. \tag{3}$$

Die in diesen Formeln enthaltenen Gesetze lassen sich so aussprechen:

1. Die am Schlusse der einzelnen Sekunden erlangten Geschwindigkeiten verhalten sich wie die Fallzeiten ($v_1 : v_2 = t_1 : t_2$) oder die Geschwindigkeit ist der Fallzeit proportional.

2. Die Gesamtfallräume verhalten sich wie die Quadrate der Fallzeiten ($s_1 : s_2 = t_1{}^2 : t_2{}^2$) oder der Gesamtfallraum ist dem Quadrate der Fallzeit proportional.

3. Die Gesamtfallräume verhalten sich wie die Quadrate der Endgeschwindigkeiten ($s_1 : s_2 = v_1{}^2 : v_2{}^2$) oder der Gesamtfallraum ist dem Quadrate der Endgeschwindigkeit proportional.

4. Die Endgeschwindigkeiten verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Gesamtfallräumen ($v_1 : v_2 = \sqrt{s_1} : \sqrt{s_2}$) oder die Endgeschwindigkeit ist der Quadratwurzel aus dem Gesamtfallraume proportional.

Diese Gesetze sind zwar in den Gesetzen des § 22 als spezielle Fälle enthalten, doch hier nochmals wegen der Wichtigkeit der Fallbewegung im besonderen ausgesprochen.

Da der Fallraum in t Sekunden gleich $\frac{1}{2}\,g\,t^2$, in $(t-1)$

Sekunden gleich $\frac{1}{2} g (t-1)^2$ ist, so ist der Fallraum in der t ten Sekunde

$$\frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{2} g (t-1)^2 = \frac{1}{2} g (2t-1),$$

woraus das weitere Gesetz folgt:

5. Die Fallräume in den einzelnen aufeinander folgenden Sekunden verhalten sich wie die aufeinander folgenden ungeraden Zahlen.

96.

Um alle über den freien Fall der Körper vorkommenden Fragen beantworten zu können, muß man noch die in den Formeln vorkommende Beschleunigung g kennen. Es ist bereits früher erwähnt worden, daß in unsern Breiten

$$g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = 981 \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$$

ist, und daß sich g mit der geographischen Breite des Beobachtungsortes, wenn auch nur unbedeutend, ändert. Die genaue Bestimmung der Größe von g geschieht durch Pendelbeobachtungen (vergl. § 352).

Daß alle Körper im leeren Raume gleich schnell fallen, kann deduktiv daraus geschlossen werden, daß die Beschleunigung der Schwere nicht von der Masse der Körper abhängen kann, weil die einzelnen Teilchen derselben gleich stark angezogen werden und also gleiche Geschwindigkeiten erlangen, ob sie getrennt nebeneinander liegen oder zu einem Körper miteinander verbunden sind.

Dasselbe kann experimentell durch die Fallröhre bestätigt werden. Diese ist ein etwa 1 m bis $1\,^1/_2$ m langes Rohr, das auf beiden Seiten durch eine Messingfassung luftdicht verschlossen ist. Das Rohr kann mit dem einen Ende, das mit einem Hahn versehen ist, auf eine Luftpumpe aufgeschraubt und luftleer gepumpt werden. In dem Rohre sind verschiedene kleine Körperchen, z. B. ein Stückchen Metall, ein Holzstückchen, ein Stückchen Kork und eine Flaumfeder. Ist das Rohr luftleer gemacht, so kann man durch Umkehren der Röhre sofort erkennen, daß alle diese Kör-

perchen in gleicher Zeit von einem Ende der Röhre zum andern gelangen.

Im übrigen ist eine direkte experimentelle Beobachtung des freien Falles und daraus folgende Begründung der Fallgesetze, wie sie von Benzenberg und Reich (vergl. § 41) versucht worden ist, wegen der Größe von g sehr schwierig und ungenau, da in 5 Sekunden der durchlaufene Weg bereits beinahe 125 m beträgt. Beim experimentellen Nachweise wird man daher, ohne an den sonstigen Gesetzen etwas zu ändern, die Beschleunigung zu verlangsamen bestrebt sein.

Da zwischen der Beschleunigung, der treibenden Kraft und der Masse die dynamische Grundgleichung $a = \frac{k}{m}$ besteht, so wird a kleiner, wenn entweder bei unveränderter Masse die Kraft verkleinert oder bei unveränderter Kraft die Masse vergrößert wird.

Den ersteren Weg schlug Galilei ein, indem er Kugeln auf einer schiefen Ebene (Fallrinne) herabrollen ließ. Hierüber sei auf § 108 verwiesen.

Der zweite Weg ist bei der bereits in § 58 beschriebenen Atwoodschen Bewegungsmaschine eingeschlagen und dort im § 59 beschrieben worden. Die Ergebnisse der an jener Stelle dargestellten Versuche bestätigen nicht allein die Gesetze, die in den Formeln $v = a\,t$ und $s = \frac{1}{2}\,a\,t^2$ enthalten sind, sondern auch die Richtigkeit der Annahme, daß die Beschleunigung der Schwere, wie dort angenommen, $981\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ oder rund $1000\ \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ beträgt.

97.

Ist von den drei beim freien Falle eines Körpers in Betracht kommenden veränderlichen Größen v, t, s eine gegeben, so kann man vermöge der Gleichungen $v = g\,t$; $s = \frac{1}{2}\,g\,t^2$ jede der beiden andern finden. Sind dabei die gegebene und die gesuchte Größe in einer der beiden Gleich-

ungen enthalten, so braucht man diese nur nach der gesuchten Größe aufzulösen; ist aber die eine in der erstern, die zweite in der zweiten Gleichung enthalten, so hat man erst die dritte Größe zu eliminieren. Man erhält dadurch die folgenden, alle vorkommenden Aufgaben lösenden Formeln für den freien Fall:

(1) $$v = g\,t;$$

(2) $$s = \frac{1}{2}\,g\,t^2;$$

(3) $$t = \frac{v}{g};$$

(4) $$s = \frac{v^2}{2\,g};$$

(5) $$t = \sqrt{\frac{2\,s}{g}};$$

(6) $$v = \sqrt{2\,g\,s}.$$

98.

Aufgabe. Ein von der Ruhe aus frei fallender Körper braucht $t = 6$ sec, um eine gewisse Strecke s (z. B. die Tiefe eines Brunnens) zu durchfallen; welche Geschwindigkeit v hat er am Ende der 6ten sec und wie groß ist die Strecke s?

Auflösung. Nach der Formel $v = g\,t$ hat der Körper die Geschwindigkeit

$$v = 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2} \cdot 6\ \mathrm{sec} = 58{,}86\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$$

erlangt, d. h. wenn er noch weiter hätte fallen können und die Schwerkraft nicht weiter auf ihn gewirkt hätte, so würde er mit Beginn der 7ten Sekunde sich gleichförmig mit der Geschwindigkeit $58{,}86\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ bewegt haben.

Zufolge der zweiten Formel $s = \frac{1}{2}\,g\,t^2$ ist die in den 6 Sekunden durchfallene Höhe

$$s = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2} \cdot 36\ \mathrm{sec}^2 = 176{,}58\ \mathrm{m}.$$

99.

Aufgabe. Auf der Neuenburg bei Freyburg a/U. ist ein Ziehbrunnen, auf dessen Wasserspiegel man einen Stein 8 Sekunden später, nachdem man ihn hat fallen lassen, aufschlagen hört; wie tief liegt der Wasserspiegel, wenn die Geschwindigkeit des Schalles zu 330 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und die Beschleunigung der Schwere rund 10 $\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ gerechnet wird?

Auflösung. Ist x die Anzahl der Sekunden, in der der Stein bis zum Wasserspiegel fällt, so ist $(8 - x)$ die Zeit, in der der Schall von der Tiefe bis zur Höhe gelangt. Da beide Wege gleich sind, so besteht die Gleichung

$$\frac{1}{2} \cdot 10\, x^2 = 330\,(8 - x),$$

oder

$$x^2 + 66\, x - 528 = 0,$$

aus der

$$x = -33 + \sqrt{33^2 + 528}$$
$$= -33 + 40{,}2 = 7{,}2$$

folgt. Der Stein trifft also in 7,2 sec den Wasserspiegel, oder der Brunnen ist rund 260 m tief.

Anm. Bezeichnet t die Zeit, nach der man den Stein aufschlagen hört, c die Geschwindigkeit des Schalles und g die Beschleunigung der Schwere, so ist allgemein die Tiefe

$$s = \frac{c}{g}\,(c + g\,t - \sqrt{c^2 + 2\,c\,g\,t}).$$

100.

Aufgabe. Von demselben Ruhepunkte aus fallen zwei Körper nacheinander; nachdem der erstere die Strecke e zurückgelegt hat, beginnt der zweite seine Bewegung; wie groß ist die Entfernung beider Körper in dem Augenblicke, wo der erstere Körper die Strecke s durchfallen hat?

(Vom Luftwiderstande ist abzusehen.)

Auflösung. Bezeichnet t die Anzahl der Sekunden, in der der erstere Körper die Strecke s, τ die Sekundenzahl, in der er die Strecke e durchfällt, dann ist der zweite Körper $(t - \tau)$ sec unterwegs und hat während dieser Zeit die Strecke s' durchfallen. Für die gesuchte Entfernung x hat man alsdann die Gleichung

$$x = s - s'.$$

Nun gelten aber

$$s = \frac{1}{2} g t^2; \quad e = \frac{1}{2} g \tau^2; \quad s' = \frac{1}{2} g (t - \tau)^2;$$

also ist

$$x = \frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{2} g (t - \tau)^2$$

$$= g t \tau - \frac{1}{2} g \tau^2.$$

Nun ist aber weiter

$$s \cdot e = \frac{1}{4} g^2 \cdot t^2 \cdot \tau^2, \text{ also } g t \tau = 2 \sqrt{se},$$

so daß sich

$$x = 2 \sqrt{s e} - e$$

ergibt.

Anm. In dieser Weise erklärt man das Zerstäuben von Wassermassen, die aus beträchtlicher Höhe herabfallen. Nimmt man z. B. bei dem von der Lütschine im Lauterbrunnental (Kanton Bern) gebildeten 264 m hoch herabfallenden bekannten Staubbachfalle an, daß ein zweites Wasserteilchen erst fällt, wenn das vorhergehende einen Weg von $e = 0{,}001$ mm zurückgelegt hat, so ist ihre Entfernung am Boden des Falles, wenn das erstere gerade am Boden angekommen ist, nach obiger Formel

$$x = (2 \sqrt{264000 \cdot 0{,}001} - 0{,}001) \text{ mm}$$

$$= (2 \sqrt{264} - 0{,}001) \text{ mm}$$

$$= 32{,}5 \text{ mm},$$

wodurch das Zerstäuben seine Erklärung findet.

Aufgaben.

81. Welche Zeit würde ein Stein brauchen, um von der Spitze des $s = 300$ m hohen Eiffelturmes herabzufallen, und wie groß würde seine Geschwindigkeit beim Auftreffen auf dem Erdboden sein?

Antw.: $t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = 7{,}82$ sec; $v = \sqrt{2gs} = 76{,}72 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

82. Ein Körper ist $t = 7$ sec frei gefallen; welche Geschwindigkeit hat er erlangt und welchen Weg in dieser Zeit zurückgelegt?

Antw.: $v = g\,t = 68{,}67 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; $s = \frac{1}{2} g\,t^2 = 240{,}35$ m.

83. Ein frei fallender Körper hat eine Endgeschwindigkeit $v = 100 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erreicht; wie lange ist er gefallen und welchen Weg hat er zurückgelegt?

Antw.: $t = \frac{v}{g} = 10{,}2$ sec; $s = \frac{v^2}{2g} = 510$ m.

84. Aus einem Luftballon läßt man drei Bleikugeln in gleichmäßigen Zeitintervallen von je 1 sec frei fallen; welche Entfernungen haben die drei Kugeln voneinander, nachdem a) 1; b) 3; c) 8 sec seit dem Beginne der Fallbewegung der letzten Kugel verflossen sind? $\left[g = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}\right]$.

Antw.: Die Entfernungen zwischen der ersten und zweiten und zwischen der zweiten und dritten Kugel sind

a) 25 m; 15 m; b) 45 m; 35 m; c) 95 m; 85 m.

85. Welche Geschwindigkeit v erlangt ein Körper, der von einem $h = 130$ m hohen Turme herabfällt?

Antw.: $v = \sqrt{2gh} = 50{,}50 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

86. Welche Zeit braucht ein Körper, um die Strecke $s = 90$ m frei zu durchfallen?

Antw.: $t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = 4{,}28$ sec.

87. Auf der Sonne ist die Beschleunigung der Schwere 27,6 mal so groß als auf der Erde; welchen Weg legt ein auf der Sonne frei fallender Körper in $t = 5$ sec zurück?

Antw.: $s = \frac{1}{2} g \,.\, 27{,}6 \,.\, t^2 = 3{,}385$ km.

88. Wie groß ist die Fallbeschleunigung auf dem Monde, wenn dort ein frei fallender Körper in $t = 15$ sec die Strecke $s = 190$ m zurücklegen würde?

Antw.: $g' = \frac{2s}{t^2} = 1{,}69 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

89. In welcher Höhe platzte ein Meteorstein, wenn seine Sprengstücke zugleich mit dem Schalle die Erde erreichen, und er zur Zeit des Platzens keine nach oben oder unten gerichtete Bewegung hatte? $\left(\text{Geschw. des Schalles } c = 333 \frac{\text{m}}{\text{sec}}\right)$.

Antw.: $h = \frac{c^2}{2g} = 22{,}608$ km.

90. Wenn ein frei fallender Körper seine Bewegung $t_1 = 4$ sec länger fortsetzen könnte, so würde er $s_1 = 313{,}92$ m mehr durchfallen haben, als er wirklich durchfällt; wie lange dauerte seine Fallbewegung?

Antw.: $t = \frac{s_1}{t_1 g} - \frac{t_1}{2} = 6$ sec.

91. Nach welcher Zeit würde man einen in das tiefste Bohrloch der Erde [bei Rybnik (Prov. Schlesien)] fallenden Stein auf den Boden aufschlagen hören? Tiefe des Bohrlochs $s = 2000$ m.

Antw.: $t = \sqrt{\frac{2s}{g}} + \frac{s}{c} = 28{,}2$ sec.

92. Von einer Stelle A aus fällt ein Körper frei; $t_1 = 3$ sec später fällt von einer vertikal unter A und $h_1 = 150$ m tiefer liegenden Stelle B aus ein zweiter Körper; nach wieviel sec, vom Abgange dieses zweiten Körpers an gerechnet, werden beide Körper in gleicher Höhe über dem Boden sein?

Antw.: $x = \frac{h_1}{g t_1} - \frac{t_1}{2} = 3{,}597$ sec.

Neuntes Buch.

Der Fall auf der schiefen Ebene.

101.

In § 96 ist angegeben worden, daß Galilei die im vorigen Buche entwickelten Gesetze des freien Falles an dem Falle von Kugeln auf der schiefen Ebene abgeleitet habe.

Wegen dieses historischen Interesses, aber auch wegen der vielfachen Anwendungen der schiefen Ebene in der Praxis sollen im folgenden die Gesetze der Bewegung eines materiellen Punktes auf der schiefen Ebene entwickelt werden.

Unter einer schiefen Ebene versteht man in der Mechanik eine feste gegen den Horizont geneigte Ebene, also eine Ebene, die mit dem Horizonte einen spitzen Winkel α, den Neigungswinkel der schiefen Ebene, bildet (Geometrie § 205). Auf ihr befinde sich ein reibungslos gleitender materieller Punkt. Legt man durch diesen eine Ebene, die zu der Kante der Horizontalebene und der schiefen Ebene im Punkte A senkrecht steht, so schneidet diese die Horizontalebene in einer Kante $A\,C$ und die schiefe Ebene in einer Kante $A\,B$, die die Schenkel des Neigungswinkels α der schiefen Ebene sind. Wählt man die beliebigen Punkte B und C so, daß das von B auf die Horizontalebene gefällte Lot C als Fußpunkt hat, so stellt das rechtwinklige Dreieck $A\,B\,C$ (Fig. 39) den Aufriß der drei Ebenen dar. Hierin heißen nun

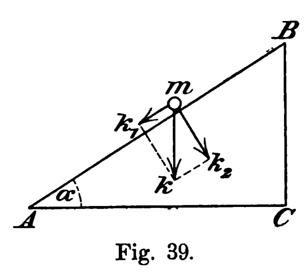


Fig. 39.

$A\,B$ die Länge l
$B\,C$ die Höhe h
$A\,C$ die Basis b

der schiefen Ebene.

102.

Ist m die Masse des materiellen Punktes, so wird dieser durch die Kraft $k = m\,g$ vertikal nach unten gezogen. Diese Kraft, deren Richtung in der Vertikalebene $A\,B\,C$ liegt, kann jedoch, eben wegen der schiefen Ebene, nicht voll zur Geltung kommen; sie muß daher (§ 76 Anm. 1) in zwei Komponenten zerlegt werden, von denen eine parallel der schiefen Ebene, die andere zu ihr senkrecht ist. Nur die erstere Kraftkomponente kommt für die Bewegung zur Geltung, während die zweite durch den Druck auf die schiefe Ebene Reibung hervorruft, daher bei Vernachlässigung der Reibung

für die Bewegung nicht in Betracht kommt. Bezeichnet man diese Komponenten mit k_1 und k_2, so folgen aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $m\,k\,k_2$ und $A\,B\,C$ die Gleichungen

$$k_1 : k = h : l = \sin\alpha$$
$$k_2 : k = b : l = \cos\alpha$$

oder

$$k_1 = k \cdot \frac{h}{l} = k \cdot \sin\alpha = m\,g \cdot \frac{h}{l} = m\,g \cdot \sin\alpha$$

$$k_2 = k \cdot \frac{b}{l} = k \cdot \cos\alpha = m\,g \cdot \frac{b}{l} = m\,g \cdot \cos\alpha.$$

Da die treibende Kraft k_1 längs der schiefen Ebene konstant ist, so ist unter der Wirkung dieser Kraft die Bewegung des materiellen Punktes auf der schiefen Ebene eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, deren Beschleunigung

$$a = g \cdot \frac{h}{l} = g \cdot \sin\alpha$$

ist.

Daher folgen die Gesetze der Bewegung eines materiellen Punktes auf der schiefen Ebene aus den allgemeinen Gesetzen der gleichförmig beschleunigten Bewegung, wenn man den eben angegebenen Wert von a einsetzt. Entsprechend § 97 erhält man die folgenden sechs Gleichungen zur Beurteilung aller Umstände, die die Bewegung eines reibungslos auf einer schiefen Ebene gleitenden Punktes betreffen:

(1) $$v = g \cdot \frac{h}{l} \cdot t = g\,t \cdot \sin\alpha;$$

(2) $$s = \frac{1}{2}\,g\,\frac{h}{l} \cdot t^2 = \frac{1}{2}\,g\,t^2 \cdot \sin\alpha;$$

(3) $$t = \frac{v\,l}{g\,h} = \frac{v}{g \cdot \sin\alpha};$$

(4) $$s = \frac{v^2\,l}{2\,g\,h} = \frac{v^2}{2\,g \cdot \sin\alpha};$$

(5) $$t = \sqrt{\frac{2\,s\,l}{g\,h}} = \sqrt{\frac{2\,s}{g \cdot \sin\alpha}};$$

(6) $$v = \sqrt{2\,g\,\frac{h}{l}\cdot s} = \sqrt{2\,gs\cdot sin\,\alpha}.$$

Anm. Hat der materielle Punkt eine Anfangsgeschwindigkeit c, die die schiefe Ebene abwärts oder aufwärts gerichtet ist, so erhalten die Hauptgleichungen, wie unmittelbar aus den allgemeinen Gleichungen des § 20 hervorgeht, die Form

$$v = c \pm g\,t\cdot sin\,\alpha;\quad s = c\,t \pm \frac{1}{2}\,g\,t^2\cdot sin\,\alpha;$$

$$v^2 = c^2 \pm 2\,g\,s\cdot sin\,\alpha.$$

103.

Die Bewegung auf der schiefen Ebene stimmt also (abgesehen von der Größe der Beschleunigung) mit dem freien Falle überein, doch bestehen für die Bewegung auf der schiefen Ebene einige interessante Beziehungen, die aus den Formeln des vorigen § 102 leicht folgen, und diese Bewegung betrachtenswert machen.

Setzt man in der Formel (6) $s = l$, so erhält man für v den Wert $v = \sqrt{2\,g\,h}$; dieser Ausdruck gibt nach Formel (6) des § 97 aber die Geschwindigkeit an, die ein materieller Punkt besitzt, der die Höhe h frei durchfallen hat. Es gilt also der Satz, daß ein Körper bei dem Falle auf der schiefen Ebene, wenn er die Länge $l = B\,A$ derselben durchlaufen hat, genau dieselbe Geschwindigkeit erlangt, wie ein frei fallender Körper, der die Höhe $h = B\,C$ der schiefen Ebene durchfallen hat.

Gehen daher vom Punkte B aus mehrere schiefe Ebenen bis zu derselben Horizontalebene $A\,C$, so hat zwar der Körper wegen der Formel (5) § 102 verschiedene Zeiten nötig, um die Ebenen zu durchlaufen, allein am Ende angekommen, hat er doch immer dieselbe Endgeschwindigkeit $v = \sqrt{2\,g\,h}$; diese Endgeschwindigkeit ist also von der Neigung der schiefen Ebene ganz unabhängig.

Anm. 1. Steigt ein Körper mit dieser Endgeschwindigkeit $c = \sqrt{2\,g\,h}$ von A aus die schiefe Ebene wieder hinauf,

so ist seine Bewegung offenbar eine gleichförmig verzögerte. Er wird wieder den Ausgangspunkt B erreichen, wo seine Geschwindigkeit $v = 0$ ist.

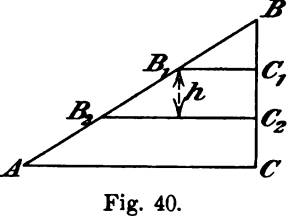


Fig. 40.

Anm. 2. Hat ein die schiefe Ebene BA (Fig. 40) durchlaufender materieller Punkt in B_1 die Geschwindigkeit v_1, in B_2 die Geschwindigkeit v_2 erreicht, und ist $BC_1 = h_1$, $BC_2 = h_2$, so gelten die Formeln

$$v_1^2 = 2\,g\,h_1; \qquad v_2^2 = 2\,g\,h_2,$$

aus denen folgt

$$v_2^2 - v_1^2 = 2\,g\,(h_2 - h_1),$$

d. h. beim Falle auf der schiefen Ebene wächst das Quadrat der Geschwindigkeit um $2\,g\,h$, wenn h die Höhendifferenz $h_2 - h_1$ der betrachteten Wegstrecke ist.

104.

Die Zeit, in der der materielle Punkt die Länge der schiefen Ebene durchfällt, erhält man, wenn man in der Formel (5) § 102 $s = l$ setzt, zu

$$t = l \cdot \sqrt{\frac{2}{g\,h}} = \frac{1}{\sin\alpha}\sqrt{\frac{2\,h}{g}}.$$

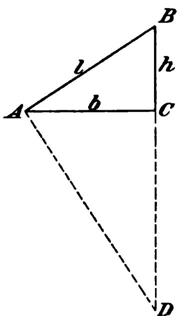


Fig. 41.

Suchen wir die Strecke BD (Fig. 41), die der materielle Punkt in derselben Zeit beim freien Falle durchlaufen hätte, so hat man, wenn man obigen Wert von t in die Gleichung (2) des § 97 einsetzt, leicht

$$BD = \frac{l^2}{h},$$

woraus die Proportion

$$h : l = l : BD$$

folgt; verbindet man nun D mit A, so muß wegen dieser Proportion der Winkel BAD ein Rechter sein (Geometrie § 126, Zusatz 1).

105.

Aus dem vorigen schon von Galilei gefundenen Satze ergeben sich einige merkwürdige Folgerungen, die auch bereits von Galilei gezogen worden sind.

Konstruieren wir (Fig. 42) über BD als Durchmesser den Kreis, so geht dieser durch A, weil $\measuredangle BAD = 90^\circ$ ist; ziehen wir nun von B aus beliebige Sehnen, so werden diese, da alle Winkel im Halbkreise Rechte sind, sämtlich von einem materiellen Punkte in derselben Zeit durchlaufen werden, nämlich in derselben Zeit, in der der materielle Punkt den vertikalen Durchmesser BD durchfallen würde.

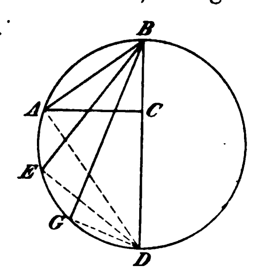


Fig. 42.

Da hierbei nur die Längen und Neigungen der Sehnen wesentlich sind, so können wir sie auch vom untern Ende des Durchmessers aus ziehen und erhalten so den Satz:

Der vertikale Durchmesser eines Kreises wird in derselben Zeit von einem materiellen Punkte durchfallen, wie jede von einem Endpunkte des Durchmessers in diesem Kreise gezogene als Fallbahn gedachte Sehne.

Hieraus folgt weiter noch, daß wenn verschiedene materielle Punkte von B aus auf verschiedenen schiefen Ebenen fallen, sich die fallenden Punkte zu derselben Zeit auf der Oberfläche einer Kugel befinden, die die von einem von B aus vertikal frei fallenden Punkte durchfallene Strecke zum Durchmesser hat.

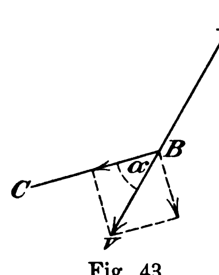


Fig. 43.

106.

Wird ein materieller Punkt, der sich von A aus auf einer schiefen Ebene AB bewegt (Fig. 43), in B genötigt, seine Richtung zu ändern und auf eine andere schiefe Ebene BC überzugehen, die mit AB den Winkel α

bildet, so erleidet er bei diesem Übergange einen Verlust an der in B erlangten Geschwindigkeit. Denn die in B erlangte Geschwindigkeit v zerlegt sich nach dem Parallelogrammgesetze in die Seitengeschwindigkeit $v \cdot \cos \alpha$ längs der neuen schiefen Ebene und in die Seitengeschwindigkeit $v \cdot \sin \alpha$ senkrecht darauf. Der Geschwindigkeitsverlust in B beim Übergange von $A\,B$ auf $B\,C$ ist also

$$v - v \cdot \cos \alpha = v\,(1 - \cos \alpha) = 2\,v \cdot \sin^2 \frac{\alpha}{2};$$

dieser Verlust ist Null, wenn $\alpha = 0$ ist; er ist offenbar um so kleiner je kleiner α ist; er ist unendlich klein, wenn α unendlich klein ist, da mit α auch $\sin \frac{\alpha}{2}$ und in noch höherem Maße $\sin^2 \frac{\alpha}{2}$ abnimmt. Wenn also der materielle Punkt statt auf einer gebrochenen schiefen Ebene auf einer stetig gekrümmten Fläche (Linie), bei der die Richtungsänderung an jeder Stelle verschwindend klein ist, sich bewegt, so tritt kein Verlust an Geschwindigkeit ein, sondern der Punkt kommt mit derselben Geschwindigkeit am Fuße einer stetig gekrümmten Fläche an, wie am Fuße einer schiefen Ebene von gleicher Höhe, wie am Fuße der Höhe selbst.

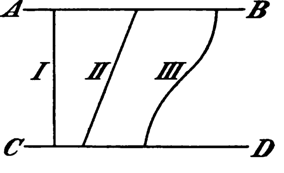


Fig. 44.

Fällt also ein materieller Punkt aus einer Horizontalebene $A\,B$ (Fig. 44) in eine um die Höhe h tiefere Horizontalebene CD, so ist sein Geschwindigkeitszuwachs **unabhängig** von dem Wege, auf dem der Punkt aus $A\,B$ nach $C\,D$ gelangt, mag er vertikal (I) oder auf einer schiefen Ebene (II) oder auf irgend einer stetig gekrümmten Kurve (III) fallen.

107.

Nach Formel (3) § 102 braucht der materielle Punkt, um auf der schiefen Ebene die Geschwindigkeit v zu erreichen, die Zeit

$$t_2 = \frac{v\,l}{g\,h};$$

um die Geschwindigkeit v beim freien Falle zu erreichen, ist die Zeit $t_1 = \frac{v}{g}$ erforderlich; es verhält sich also die Zeit, die der Körper zum freien Durchfallen der Höhe h braucht, zu der Zeit, in der er die Länge l der schiefen Ebene durcheilt, wie die Höhe zur Länge der schiefen Ebene. Der materielle Punkt kommt also am Fuße von l zwar mit derselben Geschwindigkeit, aber viel später als am Fuße von h an.

Hierdurch wird die Frage veranlaßt, auf welchem Wege wohl ein materieller Punkt von dem Orte B nach dem tiefer, nicht vertikal unter B gelegenen Orte A in kürzerer Zeit gelangen könne als auf der schiefen Ebene $B\,A$; es läßt sich zeigen, daß z. B. schon ein Kreisbogen zwischen B und A in kürzerer Zeit durchfallen wird, wie die Gerade $B\,A$; in kürzester Zeit gelangt ein Körper von B nach A, wenn er eine die Punkte B und A verbindende Cykloide oder Radlinie durchfällt, eine Kurve, die ein Punkt der Peripherie eines auf einer Geraden ohne Gleitung rollenden Kreises beschreibt. Die Cykloide ist aber nicht nur die Kurve der kürzesten Fallzeit, die Brachistochrone (Jac. Bernoulli 1697), sondern auch die Linie gleicher Fallzeiten, Tautochrone, weil ein Punkt auf ihr, von welcher Stelle der Cykloide er auch zu fallen beginnt, immer in der gleichen Fallzeit im tiefsten Punkte anlangt.

Die Beweise für diese Sätze sind nur mit Hilfe der höheren Mathematik möglich und können deshalb hier nicht angegeben werden.

108.

Galileis Fallrinne. Wie schon gesagt, bewies Galilei die Fallgesetze dadurch, daß er Kugeln auf einer schiefen Ebene herabrollen ließ, wobei er die Beschleunigung, indem er der schiefen Ebene kleinere und kleinere Neigung gab, beliebig klein machen konnte, da ihre Größe $g \cdot \sin \alpha$ ist.

Zur Wiederholung der Galileischen Versuche bedient man sich am besten einer etwa 2 m langen Fallrinne $A\,B$

(Fig. 45), die durch zwei sorgfältig polierte, unter rechtem Winkel aneinander stoßende Ebenen gebildet wird. Ihrer Länge nach ist diese Fallrinne in beliebige gleiche Teile, etwa in Dezimeter, geteilt, deren Zählung bei *B* beginnt.

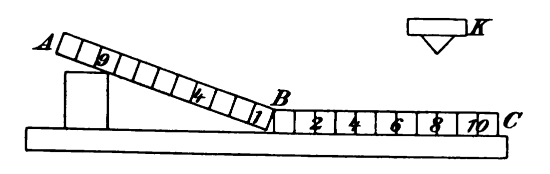


Fig. 45.

Durch untergelegte Klötzchen kann die Neigung der Fallrinne beliebig verändert werden. Bei *B* hat die Rinne eine durch ein Scharnier angefügte horizontale Fortsetzung *B C*, die ebenfalls in Dezimeter geteilt ist, deren Zählung gleichfalls bei *B* beginnt; ein Klotz *K* paßt genau in die Rinne und hält, an irgend einer Stelle eingesetzt, die rollende Kugel auf.

Man setzt nun diesen Klotz *K* so bei *B* ein, daß seine linke Fläche gerade am Nullpunkte der Teilung steht, und reguliert die Neigung der Fallrinne *A B* durch Versuche so, daß eine beim Teilstriche 1 eingelegte und losgelassene Kugel gerade nach einer Sekunde an den Klotz *K* anschlägt. Infolgedessen beträgt die Beschleunigung zwei Teilstriche.

Legt man nun die Kugel bei den Teilstrichen 4, 9, 16, . . auf *A B* ein, so wird sie genau nach 2, 3, 4, . . sec an *K* anschlagen. Somit ist das Gesetz bewiesen, daß die Fallräume sich wie die Quadrate der Fallzeiten verhalten.

Um das zweite Gesetz zu bestätigen, daß sich die erlangten Geschwindigkeiten wie die Fallzeiten verhalten, nimmt man den Klotz *K* bei Null weg und läßt die Kugel auf der horizontalen Rinne *B C* weiter rollen; auf dieser ist die Wirkung der Schwerkraft Null, daher rollt die Kugel mit der in *B* erlangten Geschwindigkeit auf *B C* nach dem Gesetze der Trägheit gleichförmig weiter, da der in *B* eintretende Geschwindigkeitsverlust wegen der geringen Neigung der Ebene *A B* vernachlässigt werden kann.

Läßt man die Kugel vom Teilstriche 1 auf *A B* herab-

rollen, so legt sie auf der horizontalen Rinne in 1, 2, 3, . . sec die Strecke von 2, 4, 6, . . Teilstrichen zurück, was man durch Einlegen des Klotzes *K* an diesen Teilstrichen hörbar machen kann.

Läßt man die Kugel beim Teilstriche 4 auf *A B* los, so legt sie auf der horizontalen Rinne in jeder Sekunde die Strecke von 4 Teilstrichen zurück; läßt man sie bei Teilstrich 9 auf *A B* los, so fällt sie in 3 sec bis *B* und passiert nach 4, 5, 6, . . sec die Teilstriche 6, 12, 18 . . . auf der horizontalen Rinne.

Die Versuche sind also ganz analog den an der Atwoodschen Bewegungsmaschine angestellten und im § 59 beschriebenen.

Auch ist mit der Fallrinne leicht nachzuweisen, daß alle Körper gleich schnell fallen, indem man nacheinander Kugeln von Holz, Stein, Elfenbein, Eisen, Blei usw. herabrollen läßt.

Anm. Historisch sei bemerkt, daß Galilei durch die gleichförmige Bewegung auf der horizontalen Rinne das Trägheitsgesetz fand.

109.

Aufgabe. Auf einer schiefen Ebene von $\alpha = 25^0$ Neigung rollt eine Kugel $t = 8$ sec lang herab; wie groß ist ihre Endgeschwindigkeit v und welchen Weg hat sie in diesen t Sekunden auf der schiefen Ebene zurückgelegt?

Auflösung. Setzt man in den Formeln

$$v = g\, t \cdot \sin \alpha; \qquad s = \frac{1}{2}\, g\, t^2 \cdot \sin \alpha$$

die für t und α gegebenen Werte, für $g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ ein, so erhält man

$$v = 33{,}17 \frac{\text{m}}{\text{sec}}; \qquad s = 132{,}7 \text{ m}.$$

110.

Aufgabe. Wie groß ist der Neigungswinkel α einer schiefen Ebene, wenn ein auf ihr fallender materieller Punkt

$n = 4$ mal so viel Zeit braucht, um an ihren Fuß zu gelangen, als er brauchen würde, um ihre Höhe h frei zu durchfallen?

Auflösung. Die Zeit, in der ein Körper die Strecke h frei durchfällt, ist $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$; die Zeit, in der ein Körper die schiefe Ebene von der Höhe h und dem Neigungswinkel α durchfällt, ist nach § 104 $t' = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}}$. Da nun $t' = n \cdot t$ sein soll, so muß

$$\sin\alpha = \frac{1}{n} = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = 14^0\,28'\,39''$$

sein.

111.

Aufgabe. Auf einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 15^0$ bewegt sich ein Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 50\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ aufwärts; wie weit wird er sich auf der schiefen Ebene aufwärts bewegen?

Auflösung. Der Körper bewegt sich so lange aufwärts, bis seine Geschwindigkeit

$$v = c - g\,t \cdot \sin\alpha = 0$$

wird; hieraus folgt die Zeitdauer der Aufwärtsbewegung

$$t = \frac{c}{g \cdot \sin\alpha};$$

setzt man diesen Wert in die Formel für den Weg

$$s = c\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 \cdot \sin\alpha$$

ein, so erhält man für den gesuchten Weg

$$s = \frac{c^2}{2g \cdot \sin\alpha} = 492{,}3\ \text{m}.$$

112.

Aufgabe. Welche Neigung muß man einem Dachstuhle, dessen Grundfläche gegeben ist, geben, damit von ihm der Regen in kürzester Zeit abfließt?

Auflösung. Ist $2c$ die Breite der Grundfläche des Daches, α der gesuchte Neigungswinkel, so ist die Länge einer der den Dachstuhl bildenden schiefen Ebenen $s = \frac{c}{\cos\alpha}$, also die Zeit, in der ein Körper vom obersten Ende die schiefe Ebene durchfällt,

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g \cdot \sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2c}{g \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}} = \sqrt{\frac{4c}{g \cdot \sin 2\alpha}};$$

t erreicht also den kleinsten Wert, wenn $\sin 2\alpha$ seinen größten Wert, d. i. 1, erreicht, was für

$$2\alpha = 90^0; \quad \alpha = 45^0$$

erfolgt.

113.

Aufgabe. Zwei schiefe Ebenen E_1 und E_2 stoßen mit ihren Fußenden aneinander; jede derselben ist unter dem Winkel α ($< 45^0$) gegen die Horizontalebene geneigt. Eine Kugel rollt die Ebene E_1, deren Länge s gegeben ist, hinab und bewegt sich zufolge der erlangten Endgeschwindigkeit die Ebene E_2 hinauf; kehrt dann zurück auf die Ebene E_1 und läuft so auf beiden Ebenen E_1 und E_2 auf- und abwärts, bis sie durch den Geschwindigkeitsverlust, den sie jedesmal beim Übergange von einer Ebene auf die andere erleidet, zur Ruhe kommt. Wie lange dauert diese Bewegung? $\alpha = 12^0$; $s = 5$ m.

Auflösung. Gelangt die Kugel nach t sec mit der Geschwindigkeit v am Ende der Ebene E_1 an, so steigt sie mit der Geschwindigkeit $v \cdot \cos 2\alpha$ (da 2α der Neigungswinkel der Ebene E_2 gegen E_1 ist) auf der Ebene E_2 aufwärts; die Zeit t' dieses Aufwärtssteigens ist durch die Gleichung

$$0 = v \cdot \cos 2\alpha - g\,t' \cdot \sin\alpha$$

bestimmt, aus der

$$t' = \frac{v \cdot \cos 2\alpha}{g \cdot \sin \alpha}$$

folgt. Da nun $t = \frac{v}{g \cdot \sin \alpha}$ ist, so ist $t' = t \cdot \cos 2\alpha$. Bezeichnet nun t_1 die Zeit, die zur Abwärtsbewegung auf E_1 und zur Aufwärtsbewegung auf E_2 nötig ist, so ist

$$t_1 = t + t' = t(1 + \cos 2\alpha) = 2t \cdot \cos^2 \alpha.$$

Zur nun folgenden Abwärtsbewegung auf E_2 und Aufwärtsbewegung auf E_1 ist ebenso die Zeit

$$t_2 = 2t' \cdot \cos^2 \alpha = 2t \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos 2\alpha$$

nötig, usw.

Die gesamte Zeit, während der die Kugel in Bewegung ist, wird also durch die Summe

$$\begin{aligned} T &= t_1 + t_2 + t_3 + \ldots \\ &= 2t \cdot \cos^2 \alpha + 2t \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos 2\alpha + 2t \cdot \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 2\alpha + \ldots \\ &= 2t \cdot \cos^2 \alpha (1 + \cos 2\alpha + \cos^2 2\alpha + \ldots) \\ &= \frac{2t \cdot \cos^2 \alpha}{1 - \cos 2\alpha} = \frac{2t \cdot \cos^2 \alpha}{2 \cdot \sin^2 \alpha} \\ &= t \cdot \cot^2 \alpha \end{aligned}$$

dargestellt. Setzt man hierin für t seinen Wert $\sqrt{\frac{2s}{g \cdot \sin \alpha}}$ ein, so erhält man

$$T = \sqrt{\frac{2s}{g \cdot \sin \alpha}} \cdot \cot^2 \alpha$$

und für die gegebenen Zahlenwerte

$$T = 49 \text{ sec.}$$

Aufgaben.

93. Welche Neigung muß eine schiefe Ebene haben, wenn ein auf ihr fallender materieller Punkt die Beschleunigung g' a) $3 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$; b) $0{,}2 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ (Fallrinne) haben soll?

Antw.: $\sin \alpha = \frac{g'}{g}$; a) $\alpha = 17^0 48'$; b) $\alpha = 1^0 10'$.

94. Vom obern Ende einer schiefen Ebene mit dem Neigungswinkel $\alpha = 30^0$ und der Höhe $h = 6$ m rollt eine Kugel abwärts; nach welcher Zeit und mit welcher Geschwindigkeit kommt sie am Fußende der Ebene an?

Antw.: $t = \frac{1}{\sin\alpha} \cdot \sqrt{\frac{2h}{g}} = 2{,}2$ sec; $v = \sqrt{2gh} = 10{,}85 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

95. Auf einer Schienenstrecke, die eine Neigung von 1,5 m auf 100 m Länge hat, rollt ein Eisenbahnwagen abwärts; wie groß ist seine Geschwindigkeit nach 10 Minuten?

Antw.: $v = g \cdot \frac{h}{l}\, t = 88{,}3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

96. Auf einer schiefen Ebene von der Höhe $h = 6{,}5$ m fällt ein materieller Punkt in $t = 5$ sec bis zum Fußende; wie groß ist die Neigung der schiefen Ebene?

Antw.: $\sin\alpha = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{2h}{g}}$, $\alpha = 13^0\, 19'$.

97. Welche Höhe muß eine schiefe Ebene haben, damit eine Kugel ihre Länge $l = 40$ m in $t = 8$ sec durchläuft?

Antw.: $h = \frac{2\, l^2}{g\, t^2} = 5{,}1$ m.

98. Wie lange muß sich ein Körper auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel $\alpha = 20^0$ bewegen, um die Geschwindigkeit $v = 12 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ zu erhalten?

Antw.: $t = \frac{v}{g \cdot \sin\alpha} = 3{,}6$ sec.

99. Eine Kugel rollt eine schiefe Ebene von der Länge $l = 10$ m und der Neigung $\alpha = 30^0$ hinab und geht dann auf einer horizontalen Ebene weiter; mit welcher gleichförmigen Geschwindigkeit bewegt sie sich auf dieser?

Antw.: $v = \sqrt{2g \cdot l \cdot \sin\alpha} \cdot \cos\alpha = 8{,}58 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

100. Eine Eisenbahnstrecke hat auf der Länge $s = 3{,}675$ km eine Steigung $1 : n = 1 : 200$; in welcher Zeit durchläuft ein Wagen diese Strecke, der eine Anfangsgeschwindigkeit von $c = 3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ hat, und wie groß ist seine Geschwindigkeit am Ende der Strecke?

Antw.: $t = \frac{-c + \sqrt{c^2 + 2gs \cdot (1:n)}}{g \cdot (1:n)} = 5$ min 31 sec;

$$v = \sqrt{c^2 + 2gs \cdot (1:n)} = 19{,}22 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

101. Wieviel verliert eine Kugel an Geschwindigkeit, die eine schiefe Ebene von der Länge l und dem Neigungswinkel α_1 durchfallen hat, beim Übergange auf eine andere schiefe Ebene vom Neigungswinkel α_2?

Antw.: $2 \cdot \sin^2 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \sqrt{2\,g\,l \cdot \sin \alpha_1}$.

102. Wie verhält sich die Zeit, in der ein Körper die Länge einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel a) $\alpha = 30^0$; b) $\alpha = 45^0$ durchfällt, zur Zeit, in der er frei die Höhe der Ebene durchfallen würde?

Antw.: a) $2:1$; b) $\sqrt{2}:1 = 1{,}4142:1$.

Zehntes Buch.

Die Wurfbewegung.

114.

Unter **Wurfbewegung** versteht man im allgemeinen die Bewegung eines materiellen Punktes (Körpers), dem durch irgend eine Ursache eine **Anfangsgeschwindigkeit** nach irgend einer Richtung erteilt worden ist, und der dann der **Einwirkung der Schwerkraft** überlassen wird.

Wie bei der Fallbewegung setzen wir bei der Wurfbewegung voraus, daß vom Widerstande der Luft abgesehen werde (vergl. § 94), oder daß der geworfene Körper sich im leeren Raume bewege, und daß die Verminderung der Beschleunigung der Schwere, die bei der Entfernung vom Mittelpunkte der Erde eintritt, wegen ihrer Kleinheit vernachlässigt werde. Endlich wird noch vorausgesetzt, daß die Weite des Wurfes im Vergleich mit dem Erdradius so klein sei, daß die nach dem Mittelpunkte der Erde zeigenden Richtungen der Schwerkraft für alle Orte der vom geworfenen Körper beschriebenen Bahn als parallel angesehen werden können.

Die verschiedenen Arten der Wurfbewegung sind durch die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit im Vergleich zu der Richtung der Schwerkraft unterschieden. Fällt die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit mit der der Schwere

zusammen, ist sie also vertikal, so heißt die Wurfbewegung des Körpers der vertikale Wurf; steht die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit senkrecht auf der der Schwere, so heißt die Bewegung des Körpers der horizontale Wurf; bildet die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit einen schiefen Winkel mit der Richtung der Schwere, so spricht man vom schiefen Wurfe.

Noch sei hervorgehoben, daß die Grundgleichungen der Wurfbewegung in den allgemeinen, in der Phoronomie eines materiellen Punktes aufgestellten Gleichungen als besondere Fälle enthalten sind, wie bei den einzelnen Arten der Wurfbewegung noch genauer auseinander gesetzt werden wird.

115.

Der vertikale Wurf. Wird einem Körper die vertikale Anfangsgeschwindigkeit c erteilt, so nimmt diese Geschwindigkeit infolge der Einwirkung der Schwere in jeder Sekunde um die Beschleunigung g der Schwere zu oder ab, je nachdem die Anfangsgeschwindigkeit vertikal abwärts oder vertikal aufwärts gerichtet ist. Die Bewegung des Körpers ist eine gleichförmig beschleunigte oder verzögerte und es gelten die in § 20 für eine solche Bewegung aufgestellten Gleichungen

$$v = c \pm g\,t \tag{1}$$

$$s = c\,t \pm \frac{1}{2}\,g\,t^2 \tag{2}$$

und die daraus folgende

$$v^2 = c^2 \pm 2\,g\,s. \tag{3}$$

Die vertikale Wurfbewegung würde also nichts Neues bieten und deshalb nicht besonders erwähnt zu werden brauchen, wenn nicht die Diskussion der Formeln für den vertikal aufwärts gerichteten Wurf neue Erkenntnisse geben würde.

Der vertikal aufwärts geworfene Körper, dessen Geschwindigkeit sich immer mehr vermindert, steigt so lange, bis $v = c - g\,t = 0$ wird; er erreicht alsdann seine größte Höhe und fällt dann nach den Gesetzen des freien Falles

wieder herab. Aus der Gleichung $v = 0$ folgt für die Zeit T, die der Körper zum Steigen braucht, der Wert

$$T = \frac{c}{g}. \tag{4}$$

Setzt man diesen Wert von T in die Gleichung (2) ein, so erhält man für die höchste Höhe H, die der Körper erreicht, den Wert

$$H = \frac{c^2}{2g}. \tag{5}$$

Wenn der Körper wieder zum Ausgangspunkte zurückkehrt, so ist $s = 0$; aus der Gleichung

$$s = c\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 = 0$$

findet dies statt zu den Zeiten

$$t_1 = 0; \qquad t_2 = \frac{2\,c}{g};$$

der erstere Wert t_1 entspricht dem Beginne der Bewegung, der zweite Wert t_2 dem Ende der Bewegung; da $t_2 = 2\,T$, so steigt der Körper ebensolange als er nachher wieder fällt.

Die Geschwindigkeit, mit der der Körper am Ausgangspunkte wieder anlangt, erhält man aus der Formel des freien Falles, wenn man die Fallzeit T einsetzt; man erhält

$$v = g\,T = g \cdot \frac{c}{g} = c,$$

d. h. der Körper gelangt beim Ausgangspunkte mit der gleichen Geschwindigkeit wieder an, die er beim Beginne der Bewegung hatte.

Aus der Formel (5) folgt

$$c = \sqrt{2\,g\,H}$$

und diese gibt mit Formel (6) des § 97 verglichen den Satz, daß der Körper ebenso hoch steigt, wie er hätte frei fallen müssen, um die Anfangsgeschwindigkeit c zu erlangen.

Die beliebige Höhe h erreicht der Körper in der durch die Gleichung

$$c\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2 = h$$

bestimmten Zeit; aus ihr folgt

$$t = \frac{c + \sqrt{c^2 - 2gh}}{g},$$

worin

$$c^2 > 2gh, \text{ oder } h < \frac{c^2}{2g}, \text{ d. h. } h < H$$

sein muß, damit die Wurzeln reell sind; der Körper erreicht also zu zwei verschiedenen Zeiten dieselbe Höhe h, einmal beim Steigen, das andere Mal beim Fallen. Setzt man diesen Wert von t in die Gleichung (1) für v ein, so erhält man zu beiden Zeiten die Geschwindigkeit

$$(6) \qquad v = + \sqrt{c^2 - 2gh},$$

d. h. in derselben Höhe sind die Geschwindigkeiten beim Steigen und Fallen entgegengesetzt gleich.

Beim vertikal aufwärts gerichteten Wurfe ist also die Aufwärtsbewegung des Körpers bis zur höchsten Höhe genau umgekehrt gleich der Fallbewegung des Körpers von dieser Höhe abwärts.

116.

Aufgaben. I. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit $c = 80 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ vertikal aufwärts geworfen; welche Geschwindigkeit v hat der Körper nach $t = 4$ sec, und welche Höhe s hat er in dieser Zeit erreicht?

Auflösung. Aus den Formeln (1) und (2) erhält man

$$v = (80 - 9{,}81 \cdot 4) \frac{\text{m}}{\text{sec}} = (80 - 39{,}24) \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 40{,}76 \frac{\text{m}}{\text{sec}};$$

$$s = (80 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 4^2)\,\text{m} = (320 - 78{,}48)\,\text{m} = 241{,}52 \text{ m}.$$

II. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit $c = 60 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ vertikal in die Höhe geworfen; nach welcher Zeit t hat er die Geschwindigkeit $v = 3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, und welche Höhe s hat er bis dahin erreicht?

Auflösung. Aus (1) folgt unmitelbar

$$t = \frac{60 - 3}{9{,}81} \text{ sec} = 5{,}81 \text{ sec};$$

aus (3) folgt

$$s = \frac{c^2 - v^2}{2\,g} = \frac{3600 - 9}{2 \cdot 9{,}81} \text{ m} = 183{,}03 \text{ m}.$$

117.

Aufgabe. Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit $c = 70 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ vertikal in die Höhe geworfen; in welcher Zeit erreicht er die Höhe $s = 150$ m, und welche Geschwindigkeit v hat er in dieser Höhe? Wie hoch wird der Körper überhaupt steigen?

Auflösung. Aus der Formel (2) folgt

$$t = \frac{c \mp \sqrt{c^2 - 2\,g\,s}}{g} = \frac{70 \mp \sqrt{70^2 - 2 \cdot 9{,}81 \cdot 150}}{9{,}81} \text{ sec}$$

$$= \frac{70 \mp 44{,}238}{9{,}81} \text{ sec};$$

also erreicht der Körper die Höhe 150 m zweimal, nach

$t_1 = 2{,}626$ sec; und nach $t_2 = 11{,}645$ sec.

Seine Geschwindigkeit zu beiden Zeiten ist dieselbe, nämlich

$$v = \sqrt{c^2 - 2\,g\,s} = \sqrt{70^2 - 2 \cdot 9{,}81 \cdot 150} \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

$$= \pm\, 44{,}238 \frac{\text{m}}{\text{sec}};$$

das doppelte Vorzeichen deutet an, daß die Richtungen der Bewegungen zu beiden Zeiten entgegengesetzte sind.

Aus Formel (5) folgt

$$H = \frac{c^2}{2\,g} = \frac{70^2}{2 \cdot 9{,}81} \text{ m} = 249{,}74 \text{ m}.$$

118.

Aufgabe. Ein Körper wird vertikal in die Höhe geworfen und gelangt nach $t = 8$ sec zu seinem Ausgangspunkte zurück; welche Höhe s hat er erreicht, und wie groß war seine Anfangsgeschwindigkeit?

Auflösung. Da die Zeit des Steigens genau der des Fallens gleich ist, folgt die Höhe s aus der Formel (2) des § 95 zu

$$s = \frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{t}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 4^2 \text{ m} = 78{,}48 \text{ m},$$

und da seine Geschwindigkeit beim Aufschlagen auf dem Boden dieselbe ist wie beim Aufsteigen, so ist

$$c = g \cdot \left(\frac{t}{2}\right) = 9{,}81 \cdot 4 \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 39{,}24 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

119.

Aufgabe. Zwei materielle Punkte befinden sich auf einer Vertikallinie in verschiedenen Höhen in der Entfernung $AB = a$ m voneinander; zu welcher Zeit und an welchem Orte werden sie einander treffen, wenn man zu gleicher Zeit den oberen (in A befindlichen) frei fallen, den unteren von B aus mit der Anfangsgeschwindigkeit $c \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ vertikal steigen läßt?

(Gestellt von Kurdwanowski, histoire de l'Académie royale à Berlin, 1755.)

Auflösung. Bezeichnet t die Anzahl der Sekunden, nach der beide Körper aufeinander treffen, so hat der obere den Weg

$$s_1 = \frac{1}{2} g t^2,$$

der untere den Weg

$$s_2 = c t - \frac{1}{2} g t^2$$

zurückgelegt. Wenn sie einander treffen, ist die Summe der von ihnen zurückgelegten Wege

$$a = s_1 + s_2 = c \cdot t,$$

woraus

$$t = \frac{a}{c} \text{ sec}$$

folgt. Für die Entfernung des Ortes s_1 des Zusammentreffens von A erhält man dann

$$s_1 = \frac{1}{2} g \cdot \frac{a^2}{c^2} \text{ m.}$$

Aufgaben.

103. Nach welcher Zeit trifft ein vertikal aufwärts geworfener Körper, der die höchste Höhe $H = 1000$ m erreicht, wieder auf dem Erdboden auf, und wie groß war seine Anfangsgeschwindigkeit?

Antw.: $t = \sqrt{\frac{8H}{g}} = 28{,}56$ sec; $c = \sqrt{2gH} = 140 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

104. Eine Kugel wird mit $c = 400 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit in die Höhe geschossen; wie groß ist ihre Geschwindigkeit nach $t = 10$ sec? wie hoch ist sie in dieser Zeit gestiegen?

Antw.: $v = c - gt = 301{,}9 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; $s = ct - \frac{1}{2} g t^2 = 3510$ m.

105. Welche Höhe würde diese Kugel überhaupt erreichen, und nach wieviel Sekunden würde sie wieder auf dem Erdboden auftreffen?

Antw.: $H = \frac{c^2}{2g} = 8155$ m; $t = \frac{2c}{g} = 81{,}55$ sec.

106. Ein senkrecht in die Höhe geworfener Körper erreicht die Höhe $h = 250$ m mit der Geschwindigkeit $v = 30 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; wie groß war seine Anfangsgeschwindigkeit?

Antw.: $c = \sqrt{v^2 + 2gh} = 76{,}19 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

107. **Welche Anfangsgeschwindigkeit hat ein senkrecht in die Höhe geworfener Körper, der nach $t = 12$ sec wieder zur Erde kommt, und wie hoch ist er überhaupt gestiegen?**

Antw.: $c = \frac{1}{2}\, g\, t = 58{,}86\, \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; $H = \frac{1}{8}\, g\, t^2 = 176{,}58$ m.

108. **Die Höhe des Wasserstrahles eines Springbrunnens ist $H = 8$ m; welche Geschwindigkeit hat der austretende Wasserstrahl?**

Antw.: $c = \sqrt{2\, g\, H} = 12{,}5\, \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

120.

Der horizontale Wurf. Wird einem materiellen Punkte (Körper) durch eine momentane (Stoß-) Kraft in horizontaler Richtung die Geschwindigkeit $c\, \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erteilt, so würde er sich mit dieser Geschwindigkeit in horizontaler Richtung gleichförmig fortbewegen und in t sec den horizontalen Weg $y = c\, t$ m zurücklegen. Wird er aber gleichzeitig der Wirkung der Schwere überlassen, so würde diese an ihm eine gleichförmig beschleunigte Bewegung in vertikaler Richtung erzeugen, vermöge deren er in t sec den Weg

$$x = \frac{1}{2}\, g\, t^2 \text{ m}$$

in vertikaler Richtung zurücklegen würde. Aus beiden Bewegungen setzt sich die resultierende Bewegung des Punktes nach dem Parallelogrammgesetze zusammen.

Diese Bewegung ist ebenfalls bereits betrachtet (§ 33). Die Bahn ist eine Parabel, deren Scheitel im Anfangspunkte der Bewegung liegt, und deren Gleichung

$$y^2 = \frac{2\, c^2}{g} \cdot x \tag{1}$$

ist. Die Achse der Parabel ist die vom Punkte A ausgehende Vertikale $A\, X$, ihr Parameter

$$2\, p = \frac{2\, c^2}{g}. \tag{2}$$

Fig. 46 stellt die Bewegung dar; zufolge der horizontalen Geschwindigkeit c würde sich der geworfene Körper nach

1, 2, 3, . . . Sekunden in den Punkten B_1, B_2, B_3, . . . befinden, während die infolge der Schwerkraft vertikal durchfallenen Wege sich wie 1 : 4 : 9 : . . . verhalten.

Da der Abstand der Leitlinie einer Parabel vom Scheitel der vierte Teil des Parameters ist, so liegt beim horizontalen Wurfe die Leitlinie $L\,L'$ um die Strecke $\frac{c^2}{2\,g}$ über dem Anfangspunkte der Bewegung, also genau so hoch wie der Körper bei vertikal aufwärts gerichtetem Wurfe mit der Anfangsgeschwindigkeit $c \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ steigen würde (Formel (5) des § 115).

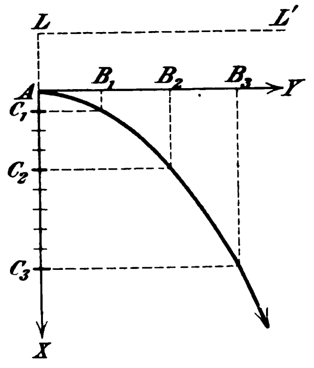


Fig. 46.

Die Geschwindigkeit v in jedem Punkte der Bahn ist die Diagonale des aus den Geschwindigkeitskomponenten gebildeten Rechtecks; da die horizontale Geschwindigkeitskomponente konstant c, die vertikale zur Zeit t gleich $g\,t$ ist, so ist die Geschwindigkeit v zur Zeit t durch die Gleichung

$$(3) \qquad v^2 = c^2 + g^2\,t^2 = 2\,g\left(\frac{c^2}{2\,g} + \frac{1}{2}\,g\,t^2\right)$$

bestimmt. Nun ist aber der Ausdruck in der Klammer der Abstand des betreffenden Punktes der Bahn von der Leitlinie, folglich ergibt sich (§ 95, Formel (3)), daß die Geschwindigkeit beim horizontalen Wurfe in jedem Punkte der Bahn dieselbe ist, als ob der Körper von der Leitlinie bis zu dem betreffenden Punkte frei gefallen wäre.

121.

Aufgaben. I. In der Höhe $x = 3\frac{1}{2}$ m über dem Erdboden wird aus einem Leitungsrohre ein Wasserstrahl in horizontaler Richtung fortgetrieben; der Punkt der Erdoberfläche, wo der Strahl auftrifft, hat vom Ende des Leitungs-

rohres die Entfernung $y = 8$ m; mit welcher Geschwindigkeit fährt der Wasserstrahl aus dem Leitungsrohre, und welche Geschwindigkeit hat er beim Auftreffen auf die Erde?

Auflösung. Aus der Gleichung (1) des § 120 folgt

$$c = y\sqrt{\frac{g}{2\,x}} = 9{,}471\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Da die vertikale Geschwindigkeitskomponente nach Formel (6) des § 97 nach dem Durchfallen der Höhe x die Größe $\sqrt{2\,g\,x}$ haben würde, so ist

$$v = \sqrt{c^2 + 2\,g\,x} = 12{,}585\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

II. Wo fällt eine mit $c = 350\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Anfangsgeschwindigkeit aus 1 m Höhe horizontal abgeschossene Kugel zur Erde, und welche Geschwindigkeit besitzt sie beim Auffallen?

Auflösung. Aus der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen ergibt sich für $x = 1$ die Ordinate

$$y = c\sqrt{\frac{2}{g}} = 158{,}03\ \text{m};$$

wie in der vorigen Aufgabe ist die vertikale Geschwindigkeitskomponente nach dem Durchfallen der Höhe 1 m von der Größe $\sqrt{2\,g}$, also die gesuchte Geschwindigkeit des Geschosses

$$v = \sqrt{c^2 + 2\,g} = 350{,}03\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

III. Ein von einem Hügel aus horizontal geworfenes Geschoß trifft bei einer Anfangsgeschwindigkeit $c = 400\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ein auf der Horizontalebene in der Entfernung $y = 2400$ m vom Hügel stehendes Gebäude; wie groß ist die Erhebung des Hügels über der Horizontalebene?

Auflösung. Aus der Gleichung (1) des § 120 folgt die gesuchte Höhe

$$x = \frac{g \cdot y^2}{2\,c^2} = 176{,}6\ \text{m}.$$

Aufgaben.

109. Eine Büchse, deren Geschosse die Geschwindigkeit $c = 400 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ haben, wird genau horizontal auf die Mitte einer 100 m entfernten Scheibe, deren Ringe 3 cm breit sind, gerichtet; welcher Ring wird getroffen werden?

Antw.: Der 11te von der Mitte aus.

110. Aus einem $h = 50$ m über der Horizontalebene stehenden Geschütze wird eine Kugel mit der Geschwindigkeit $c = 480 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ horizontal abgeschossen; wann gelangt diese Kugel auf die horizontale Ebene?

Antw.: $t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = 3{,}2$ sec.

111. In welcher Entfernung und mit welcher Geschwindigkeit trifft diese Kugel auf die horizontale Ebene auf?

Antw.: $s = c\sqrt{\frac{2h}{g}} = 1536$ m; $v = \sqrt{c^2 + 2gh} = 481 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

112. Mit welcher Geschwindigkeit muß eine Kugel horizontal abgeschossen werden, um ein $a = 1600$ m entferntes, $b = 90$ m tiefer liegendes feindliches Festungswerk zu treffen?

Antw.: $c = a\sqrt{\frac{g}{2b}} = 373{,}5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

122.

Der schiefe Wurf. Auch der schiefe Wurf ist in den allgemeinen Betrachtungen des § 33 enthalten (nur muß in den dort abgeleiteten Formeln α durch $90^0 + \alpha$ ersetzt werden).

Bildet die Anfangsrichtung der durch eine momentane Kraft einem materiellen Punkte erteilten Geschwindigkeit $c \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ mit der Horizontalen den Elevationswinkel α (Fig. 47), so läßt sich c in eine horizontale Ge-

schwindigkeitskomponente $c \cdot \cos \alpha$ und in eine vertikale $c \cdot \sin \alpha$ zerlegen.

Ist AN der Weg, den der Körper durch die allein wirkende momentane Kraft in t sec zurückgelegt hätte, so ist $AN = c\,t$; wegen der gleichzeitig wirkenden Anziehungskraft der Erde muß aber der Körper um das Stück

$$NM = \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

vertikal gesunken sein. Daher ist die Geschwindigkeitskomponente in horizontaler Richtung gleich $c \cdot \cos \alpha$, in vertikaler Richtung aber gleich $c \cdot \sin \alpha - g\,t$.

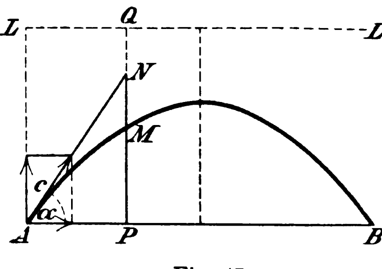


Fig. 47.

Sind demnach die Koordinaten des Punktes M, in dem sich der Körper zur Zeit t befindet, nämlich $AP = y$; $PM = x$, so hat man

$$(1) \qquad y = AN \cdot \cos \alpha = c\,t \cdot \cos \alpha$$

$$(2) \qquad x = AN \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2}\,g\,t^2 = c\,t \cdot \sin \alpha - \frac{1}{2}\,g\,t^2.$$

Durch diese beiden Gleichungen ist die schiefe Wurfbewegung vollständig bestimmt; man kann aus ihnen zu jeder Zeit die horizontale Entfernung des geworfenen Körpers und seine Erhebung über die Horizontale bestimmen.

Die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Bahn ist als die Diagonale des aus den beiden Geschwindigkeitskomponenten gebildeten Rechtecks zu

$$v = \sqrt{c^2 \cdot \cos^2 \alpha + (c \cdot \sin \alpha - g\,t)^2}$$

oder

$$(3) \qquad v = \sqrt{c^2 - 2\,c\,g\,t \cdot \sin \alpha + g^2 t^2}$$

bestimmt.

Etwas neues gegenüber den Betrachtungen des § 33 liefert uns auch hier erst die Diskussion der Formeln.

Der geworfene Körper wird so lange steigen, bis die vertikale Geschwindigkeitskomponente gleich Null wird; be-

zeichnet man die hierzu erforderliche Zeit mit T, so folgt aus $c \cdot sin\, a - g\, T = 0$ sofort

$$T = \frac{c \cdot sin\, a}{g}.$$

Die Höhe H, die zu dieser Zeit erreicht ist, ergibt sich aus (2), wenn man den soeben für T gefundenen Wert einsetzt. Man erhält leicht

$$H = \frac{c^2 \cdot sin^2\, a}{2\, g}. \tag{4}$$

Um die Wurfweite $A\,B = W$ zu erhalten, hat man die Erhebung x über die Horizontalebene gleich 0 zu setzen und zunächst aus der Gleichung

$$c\, t \cdot sin\, a - \frac{1}{2}\, g\, t^2 = 0$$

die Zeiten t zu bestimmen, zu denen der Körper auf der Erde ist. Man erhält

$t_1 = 0$ für den Anfang und

$t_2 = \frac{2\, c \cdot sin\, a}{g}$ für das Ende der Bewegung.

Setzt man t_2 in die Formeln (1) und (3) ein, so erhält man die Wurfweite

$$W = \frac{2\, c^2 \cdot sin\, a \cdot cos\, a}{g} = \frac{c^2 \cdot sin\, 2\, a}{g} \tag{5}$$

und die Endgeschwindigkeit beim Wiederauftreffen des Körpers auf die Erde $v = c$, gleich der Anfangsgeschwindigkeit.

Aus Gleichung (5) folgt, da $sin\, 2\, a$ seinen größten Wert 1 für $2\, a = 90^0$ erreicht, daß die Wurfweite bei gegebener Anfangsgeschwindigkeit am größten ist, wenn der Elevationswinkel 45^0 beträgt. Dieses Maximum der Wurfweite ist $W' = \frac{c^2}{g}$, also noch einmal so groß als die Höhe, bis zu der der Körper mit der Anfangsgeschwindigkeit c vertikal steigen würde (§ 115), und viermal so groß als die Wurfhöhe bei 45^0.

Ferner folgt aus (5), da $sin\, 2\, (45^0 + \varphi) = sin\, 2\, (45^0 - \varphi)$ oder $sin\, (90^0 + 2\, \varphi) = sin\, (90^0 - 2\, \varphi)$ ist, daß komplementäre Elevationswinkel gleiche Wurfweiten haben.

Bei gegebener Wurfweite und gegebenem Elevationswinkel ergibt sich aus (5) die Anfangsgeschwindigkeit

$$c = \sqrt{\frac{W \cdot g}{\sin 2\alpha}}. \tag{6}$$

123.

Eliminiert man t aus den Gleichungen (1) und (2), so erhält man die Gleichung der Bahn des geworfenen Körpers; sie lautet

$$x = y \cdot tg\,\alpha - \frac{g\,y^2}{2\,c^2 \cdot \cos^2\alpha}; \tag{7}$$

sie ist, wie schon in § 35 gezeigt, die Gleichung einer Parabel. Bringt man sie durch dieselben Umformungen wie dort auf die gewöhnliche Gleichungsform, so findet man für die Koordinaten des Scheitels die Werte

$$x_0 = \frac{c^2 \cdot \sin^2\alpha}{2\,g}; \qquad y_0 = \frac{c^2 \cdot \sin 2\,\alpha}{2\,g}.$$

Die Vergleichung dieser Werte mit den in den Gleichungen (4) und (5) gefundenen zeigt, daß der Scheitel der höchste Punkt der Wurflinie ist und senkrecht über der Mitte der Wurfweite liegt, so daß die beiden Äste, der aufsteigende wie der absteigende, kongruent sind, und die Abwärtsbewegung von der größten Höhe bis zur Erde genau umgekehrt gleich seiner Aufwärtsbewegung bis zum höchsten Punkte ist.

Wählt man den Scheitel als Koordinatenanfang, die Richtung der Schwere als Abszissenachse und bezeichnet die neuen Koordinaten mit ξ und η, so geht die Gleichung (7) über in

$$\eta^2 = \frac{2\,c^2 \cdot \cos^2\alpha}{g} \cdot \xi, \tag{8}$$

woraus der Parameter der Parabel

$$2\,p = \frac{2\,c^2 \cdot \cos^2\alpha}{g}$$

folgt. Da der Abstand der Leitlinie $L\,L'$ vom Scheitel gleich $\frac{p}{2}$ ist, so ist der Abstand der Leitlinie von A

$$A\,L = \frac{c^2 \cdot \sin^2\alpha}{2\,g} + \frac{c^2 \cdot \cos^2\alpha}{2\,g} = \frac{c^2}{2\,g},$$

d. h. die Leitlinie der Parabel liegt so hoch über der Horizontalen, als der Körper bei der Anfangsgeschwindigkeit c vertikal aufwärts gestiegen wäre.

Schreibt man den Wert (3) für die Geschwindigkeit im Punkte M in der Form

$$v = \sqrt{2\,g\left(\frac{c^2}{2\,g} - \left(c\,t \cdot \sin\,\alpha - \frac{1}{2}\;g\,t^2\right)\right)},$$

und beachtet, daß $QP = \frac{c^2}{2\,g}$; $MP = c\,t \cdot \sin\alpha - \frac{1}{2}\,g\,t^2$ ist, so ergibt sich

$$v = \sqrt{2\,g \cdot \overline{QM}},$$

d. h. es gilt auch für den schiefen Wurf das Gesetz, daß die Geschwindigkeit in jedem Punkte der Wurflinie so groß ist, wie die eines Körpers, der von der Leitlinie bis zu dem betreffenden Punkte frei gefallen wäre.

124.

Um den Elevationswinkel α zu bestimmen, unter dem ein Körper mit gegebener Anfangsgeschwindigkeit geworfen werden muß, damit er einen bestimmten Punkt trifft, dessen Koordinaten x_1 und y_1 gegeben sind, setzt man diese Werte in die Gleichung (7) ein und bestimmt daraus α; man erhält

$$x_1 = y_1 \cdot tg\,\alpha - \frac{g\,y_1{}^2}{2\,c^2 \cdot cos^2\,\alpha}$$

und, wenn man $\frac{1}{cos^2\,\alpha}$ durch $1 + tg^2\,\alpha$ (Trigonometrie § 100) ersetzt, für $tg\,\alpha$ die quadratische Gleichung

$$g\,y_1{}^2 \cdot tg^2\,\alpha - 2\,c^2\,y_1 \cdot tg\,\alpha + (2\,c^2\,x_1 + g\,y_1{}^2) = 0,$$

aus der folgt

$$(9) \qquad tg\,\alpha = \frac{c^2 \pm \sqrt{c^2\,(c^2 - 2\,g\,x_1) - g^2\,y_1{}^2}}{g\,y_1}.$$

Ist die Diskriminante (die Größe unter dem Wurzelzeichen) positiv, so erhält man zwei Werte für α; der kleinere Winkel α entspricht dem sogenannten Flachschusse oder scharfen

Schusse (rasante Flugbahn), der größere dem Bogenschusse [Kanonen, Mörser]. Ist die Diskriminante Null, so gibt es nur einen Wert für α; ist die Diskriminante negativ, so gibt es keinen Wert für α; der bestimmte Punkt kann bei der gegebenen Anfangsgeschwindigkeit überhaupt nicht getroffen werden.

125.

Die Gleichungen über die Wurfbewegung waren unter drei Voraussetzungen entwickelt worden, die im § 114 genau angegeben sind. Die beiden letzten dieser Annahmen (die Unveränderlichkeit der Größe und Richtung von g) behalten auch für die Praxis ihre Gültigkeit, wenigstens würden genaue Messungen keine Abweichungen zwischen der Beobachtung und der Rechnung ergeben. Dagegen ist in der Praxis der Luftwiderstand auf die Bewegung geworfener Körper von großer Bedeutung.

Ist die Anfangsgeschwindigkeit eine geringe, wie bei einem kurzen schrägen Wasserstrahle, so sind die abgeleiteten Gleichungen annäherungsweise auch für die wirkliche Bewegung richtig. Dagegen ist bei der Bewegung von Geschossen wegen der dabei vorkommenden großen Geschwindigkeiten, bis zu 700 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$, der Luftwiderstand so groß, daß er in Betracht gezogen werden muß. Dadurch weicht nämlich die Bahn des Körpers erheblich von der parabolischen Gestalt ab. Die in Wirklichkeit auftretende Kurve nennt man ballistische Kurve; bei ihr sind die beiden durch den höchsten Punkt gebildeten Teile nicht mehr kongruent; der zweite Teil der Kurve ist viel kürzer als der erste und fällt viel steiler ab; die Wurfweite ist deshalb kleiner, ebenso ist die höchste Erhebung kleiner als die oben berechnete. Fig. 48 stellt den Unterschied zwischen der parabolischen und der wirklichen Bahn annähernd dar.

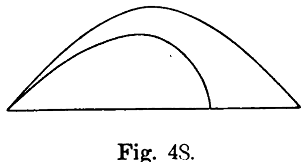


Fig. 48.

Die Lehre vom Wurfe unter Berücksichtigung aller dabei auftretenden Verhältnisse, die sogenannte Ballistik,

ist von großer praktischer Bedeutung, z. B. für die Artilleriewissenschaft. Es sei noch bemerkt, daß nicht nur der Luftwiderstand Einfluß auf die Form der ballistischen Kurve hat, sondern auch die Gestalt der Geschosse und die Eigenbewegung (Rotation) der Geschosse, die ihnen durch den Drall der Züge der Geschützrohre mitgeteilt wird. Letztere bewirkt sogar eine Änderung der Ebene der Flugbahn. Die an unsern Formeln anzubringenden Korrekturen sind durch Rechnung und Beobachtung zu ermitteln versucht worden. (Vergl. Prehn, die Ballistik der gezogenen Geschütze.) Wir können hier nicht darauf eingehen, weil es den Rahmen unseres Buches überschreiten würde; angegeben sei noch, daß bei Geschützen die größte Wurfweite bei einem kleineren Elevationswinkel (36^0 bis 40^0) beobachtet worden ist.

Als Beispiel sei das folgende angeführt: Bei Schießversuchen mit einer Kruppschen 24 cm-Kanone ergab sich bei $650 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ Anfangsgeschwindigkeit und 44^0 Elevation die Wurfweite 20220 m und die Wurfhöhe 6500 m, während aus unseren Formeln Wurfweite $W = 43040$ m und Wurfhöhe $H = 10390$ m folgen würden.

126.

Aufgabe. Ein Geschoß wird unter dem Elevationswinkel $\alpha = 30^0$ mit einer Geschwindigkeit $c = 320 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ abgeschossen; wo und nach welcher Zeit erreicht es den Boden? wie hoch ist es gestiegen?

Auflösung. Aus der Formel (5) folgt die Wurfweite

$$W = \frac{c^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = 9040 \text{ m};$$

für die Zeit erhält man aus den Entwickelungen den Wert

$$t = 2\,T = \frac{2\,c \cdot \sin \alpha}{g} = 32{,}62 \text{ sec};$$

endlich liefert Formel (4) die Wurfhöhe

$$H = \frac{c^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2\,g} = 1\,304{,}8 \text{ m}.$$

127.

Aufgabe. In welcher Höhe und mit welcher Geschwindigkeit trifft ein unter dem Winkel $\alpha = 30^0$ mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 300 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ abgefeuertes Geschoß eine $a =$ 4500 m entfernte senkrechte Felswand?

Auflösung. Die gesuchte Höhe x erhält man unmittelbar aus der Gleichung (7) der Bahnkurve des Geschosses, da $y = a$ gegeben ist; es ist also

$$x = a \cdot tg\,\alpha - \frac{g\,a^2}{2\,c^2 \cdot cos^2\,\alpha} = 1\,126{,}6 \text{ m};$$

um die Geschwindigkeit zu berechnen, bestimmt man zunächst die Zeit t, in der das Geschoß auf die Felswand trifft, aus Gleichung (1), indem $y = a$ gesetzt wird; man erhält

$$t = \frac{a}{c \cdot cos\,\alpha};$$

setzt man diesen Wert von t in die Gleichung (3) ein, so kommt

$$v = \sqrt{c^2 - 2\,c\,g \cdot sin\,\alpha \cdot \frac{a}{c \cdot cos\,\alpha} + g^2 \cdot \frac{a^2}{c^2 \cdot cos\,\alpha}}$$

$$= \sqrt{c^2 - 2\,g \cdot a \cdot tg\,\alpha + \frac{g^2 \cdot a^2}{c^2 \cdot cos^2\,\alpha}}$$

$$= \sqrt{c^2 - 2\,g\,x} = 260{,}57 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

128.

Aufgabe. Unter welchem Elevationswinkel muß ein Geschoß geworfen werden, damit die Wurfweite

a) gleich der Wurfhöhe,

b) doppelt so groß als die Wurfhöhe

ist?

Auflösung. Setzt man allgemeiner an, die Wurfweite sei n-mal so groß als die Wurfhöhe, so hat man zur Be-

stimmung von α die Gleichung

$$\frac{c^2 \cdot \sin 2\alpha}{g} = \frac{c^2 \cdot \sin^2 \alpha}{2g} \cdot n$$

oder

$$\sin 2\alpha = \frac{n}{2} \cdot \sin^2 \alpha;$$

ersetzt man hierin $\sin 2\alpha$ durch $2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$, so ergibt sich leicht

$$\cot \alpha = \frac{n}{4};$$

also für den Fall

a) $\cot \alpha = \frac{1}{4}$; $\alpha = 75^0\,58'$;

b) $\cot \alpha = \frac{1}{2}$; $\alpha = 63^0\,26'$.

129.

Aufgabe. Ein in der Entfernung $a = 2500$ m auf einem Hügel von $b = 120$ m Höhe gelegenes feindliches Fort soll beschossen werden; welcher Elevationswinkel muß angewendet werden, wenn die Anfangsgeschwindigkeit des Geschosses $c = 350 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ beträgt? Wieviel Zeit braucht das Geschoß bis zum Ziele?

Auflösung. Setzt man in die Formel (9) die gegebenen Werte $x_1 = b$, $y_1 = a$ ein, so erhält man

$$tg\,\alpha = \frac{c^2 \pm \sqrt{c^2(c^2 - 2gb) - g^2 a^2}}{g\,a}$$

und hieraus die Werte

$\alpha = 84^0\,12'$ für Bogenschuß,
$\alpha = 8^0\,33'$ für Flachschuß.

Für die gesuchte Zeit liefert die Gleichung (1) den Wert

$$t = \frac{a}{c \cdot \cos \alpha},$$

woraus sich berechnet

$t = 70{,}68$ sec für den Bogenschuß,
$t = 7{,}21$ sec für den Flachschuß.

130.

Aufgabe. Welche Anfangsgeschwindigkeit muß einem Geschosse erteilt werden, damit das Maximum der Wurfweite $W = 20000$ m werde? Welche Höhe erreicht das Geschoß?

Auflösung. Die Formel (6) liefert unter der Bedingung $\alpha = 45^0$ den Wert

$$c = \sqrt{W \cdot g} = 442{,}94 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Setzt man diesen Wert in (4) ein, so erhält man

$$H = \frac{W \cdot \sin^2 45^0}{2} = \frac{W}{4} = 5000 \text{ m}.$$

Aufgaben.

113. Ein Geschoß wird unter dem Elevationswinkel $\alpha = 20^0$ mit der Geschwindigkeit $c = 350 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ abgeschossen; a) wo erreicht es den horizontalen Boden? b) nach welcher Zeit? c) welche Höhe erreicht das Geschoß?

Antw.: a) 8026,8 m; b) 24,4 sec; c) 730,37 m.

114. Unter welchem Elevationswinkel muß ein Stein mit der Anfangsgeschwindigkeit $c = 50$ m geworfen werden, um die Wurfhöhe $H = 100$ m zu erreichen?

Antw.: $\sin \alpha = \frac{1}{c} \sqrt{2 g H}$; $\alpha = 62^0 21' 40''$.

115. Wenn aus einem Vulkane Steine bis 15 km weit geschleudert werden, wie groß muß ihre Anfangsgeschwindigkeit sein, wenn man den günstigsten Elevationswinkel 45^0 annimmt?

Antw.: $c = \sqrt{g W} = 383{,}6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

116. Wie verhalten sich die Wurfweiten zweier Geschütze, aus denen mit gleichen Geschwindigkeiten, aber unter verschiedenen Elevationswinkeln α_1 und α_2 Kugeln abgeschossen werden?

a) $\alpha_1 = 40^0$; $\alpha_2 = 50^0$; b) $\alpha_1 = 15^0$; $\alpha_2 = 30^0$.

Antw.: $W_1 : W_2 = \sin 2\alpha_1 : \sin 2\alpha_2$.

a) 1 : 1; b) 1 : 1,73205.

117. Wie groß ist die Wurfweite, wenn ein Geschoß mit $c = 450 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Anfangsgeschwindigkeit so abgeschossen wird, daß die Wurfweite gleich der Wurfhöhe ist? $\alpha = 75^0\,58'$ (vergl. § 128).

Antw.: $W = \dfrac{c^2 \,.\, \sin 2\,\alpha}{g} = 9712$ m.

118. Welche Anfangsgeschwindigkeit muß ein Geschoß haben, um ein in der horizontalen Entfernung $a = 3000$ m liegendes Festungswerk bei dem Elevationswinkel $\alpha = 30^0$ zu treffen?

Antw.: $c = \sqrt{\dfrac{g\,a}{\sin 2\,\alpha}} = 184{,}34 \dfrac{\text{m}}{\text{sec}}$.

119. Wie heißt die Gleichung der Flugbahn eines Geschosses, das eine Anfangsgeschwindigkeit $c = 200 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ hat, und unter dem Elevationswinkel $\alpha = 45^0$ geworfen wird?

Antw.: $x = y - 0{,}00024525\, y^2$.

120. Ein in der horizontalen Entfernung $a = 4{,}5$ km liegendes Gebäude soll durch ein Geschütz beschossen werden, das dem Geschosse die Anfangsgeschwindigkeit $c = 460 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erteilt; wie groß muß der Elevationswinkel sein, und wie groß war die Dauer des Schusses?

Antw.: $\sin 2\,\alpha = \dfrac{a\,g}{c^2}$; $t = \dfrac{a}{c \,.\, \cos \alpha}$;

$\alpha_1 = 6^0$; $\qquad \alpha_2 = 84^0$;

$t_1 = 9{,}8$ sec; $\qquad t_2 = 93{,}6$ sec.

121. Eine mit der Geschwindigkeit $c = 350 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ unter dem Elevationswinkel $\alpha = 20^0$ abgeschossene Kugel trifft die Spitze eines $h = 65$ m hohen Turmes; wie weit ist der Turm von dem Geschütze entfernt?

Antw.: $y = \dfrac{c^2 \,.\, \sin 2\,\alpha}{2\,g}\left(1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{2\,g\,h}{c^2 \,.\, \sin^2 \alpha}}\right) = \begin{cases} 7844 \text{ m;} \\ 182{,}5 \text{ m.} \end{cases}$

122. Wie groß muß der Elevationswinkel gewählt werden, damit die erreichte Wurfweite gerade die Hälfte der größtmöglichen Wurfweite wird?

Antw.: $\sin 2\,\alpha = \dfrac{1}{2}$; $\alpha_1 = 15^0$ oder $\alpha_2 = 75^0$.

Elftes Buch.

Arbeit und Energie.

131.

Wenn ein materieller Punkt, der der Angriffspunkt einer Kraft k ist, sich aus irgend welchem Grunde bewegt, so wird auch die Kraft k einen gewissen Einfluß auf die Bewegung des Punktes ausüben. Man sagt alsdann, die Kraft k habe während dieser Bewegung ihres Angriffspunktes eine Arbeit oder eine mechanische Arbeit verrichtet.

132.

Das Wort „Arbeit“ erinnert wohl zunächst an das, was man im gewöhnlichen Leben damit bezeichnet, an Arbeiten, wie sie Menschen, Tiere oder Maschinen verrichten.

Arbeit verrichtet z. B. ein Mensch, wenn er ein Gewicht emporhebt, ein Zugtier, wenn es einen Lastwagen fortbewegt oder eine Pflugschar durch den Erdboden zieht, eine Dampfmaschine, wenn sie einen Kolben hin und her bewegt und dadurch ein Schwungrad oder eine Reihe anderer Maschinen in Bewegung setzt.

Hierbei wird jedesmal ein Widerstand längs eines gewissen Weges überwunden. Wird ein Körper in die Höhe gehoben, so muß der nach unten wirkende Druck, d. i. das Gewicht des Körpers, an jeder Stelle des Weges überwunden werden. Wird ein Lastwagen auf wagerechter Bahn fortgezogen, so braucht zwar sein Gewicht nicht getragen zu werden, die Bewegung erfährt aber an jeder Stelle den Widerstand, den die Reibung verursacht. Soll die Pflugschar durch den Boden gezogen werden, so ist an jeder Stelle die Kohäsion der Erdteilchen zu überwinden.

Dieser Begriff der Arbeit ist also durch dreierlei bestimmt: 1. durch einen Widerstand, der überwunden werden muß; 2. durch eine Kraft, die diesen Widerstand überwindet, und 3. durch die Verschiebung des Angriffspunktes der Kraft.

133.

Um zu einer genaueren Begriffsbestimmung und zugleich zu einem Maße für die Größe einer Arbeit zu gelangen, nehmen wir an, daß auf einen materiellen Punkt, der sich infolge irgend eines äußeren Anstoßes mit der konstanten Geschwindigkeit c in gerader Linie bewegt, eine konstante Kraft k wirke, deren Richtung mit der Richtung der Bewegung zusammenfalle. Wir denken uns ferner auf den materiellen Punkt eine der Kraft k genau gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft k' wirkend. Diese Gegenkraft k' ist der **Widerstand**, der eine Änderung des Bewegungszustandes des materiellen Punktes durch die Kraft k verhindert. Sie allein würde, wenn k nicht vorhanden wäre, bewirken, daß die Bewegung des materiellen Punktes eine gleichmäßig verzögerte würde. Es besteht daher die Wirkung der Kraft k darin, daß sie die Wirkung des Widerstandes k' aufhebt und die gleichförmige Geschwindigkeit c des materiellen Punktes unverändert erhält. Hat nun der materielle Punkt in der Richtung der Kraft k den Weg s zurückgelegt, so besteht die Arbeit der Kraft k darin, daß sie die Gegenkraft k' in jedem Punkte dieses Weges überwunden hat; die Größe dieser Arbeit aber ist erstens diesem Widerstande proportional, denn sie wird 2, 3, . . . mal so groß sein, wenn der Widerstand 2, 3, . . . mal so groß wird, und zweitens der Länge des Weges proportional, denn sie ist offenbar 2, 3, . . . mal so groß, wenn der Weg 2, 3, . . . mal so groß ist. Bezeichnet also f einen Proportionalitätsfaktor, so ist die Arbeit A der Kraft k durch die Gleichung

$$A = f \cdot k' \cdot s$$

bestimmt. Nun ist aber $k' = k$; bestimmt man außerdem als Arbeitseinheit diejenige Arbeit, die die Krafteinheit auf einem Wege gleich der Längeneinheit leistet, so erhält man die Gleichung

$$A = k \cdot s, \tag{1}$$

aus der als Definition für die Arbeit folgt: Unter der mechanischen Arbeit einer Kraft versteht man das

Produkt aus der Kraft und dem Wege, auf dem die Kraft wirkt.

Freilich darf nicht außer acht gelassen werden, daß bei dieser Definition zwei Voraussetzungen gemacht sind, daß nämlich die Kraft k konstant ist, und daß der Weg s in die Richtung der Kraft fällt.

134.

Wirkt die Kraft k ungestört auf den materiellen Punkt, so daß ihm keine außerhalb des Punktes vorhandene Gegenkraft k' Widerstand darbietet, so ist die Wirkung von k eine andere als die im vorigen Paragraphen angegebene.

Nehmen wir nämlich an, daß die Kraftrichtung auch in diesem Falle mit der Richtung der dem Punkte bereits anhaftenden konstanten Geschwindigkeit zusammenfällt, und daß die Größe der Kraft unveränderlich ist, so ist die Wirkung der Kraft eine Änderung des Bewegungszustandes des materiellen Punktes: aus der gleichförmigen Bewegung wird er in eine gleichförmig beschleunigte Bewegung versetzt. Durch die Kraft k wird dann dem materiellen Punkte eine gewisse Beschleunigung erteilt, und der erzeugte Bewegungszustand ist in diesem Falle als das Äquivalent für die geleistete Arbeit anzusehen.

An die Stelle des Widerstandes in Form einer äußeren Gegenkraft k' tritt jetzt der Trägheitswiderstand des materiellen Punktes, d. h. sein passives Verhalten gegenüber einer Änderung seines Bewegungszustandes.

Unter der Arbeit der Kraft versteht man auch in diesem Falle die durch die Formel (1) des § 133 gegebene Größe.

135.

Eine Kraft kann also in zweifacher Weise Arbeit leisten: in dem einen Falle besteht das Wesen der Arbeit in der Überwindung eines äußeren Bewegungshindernisses, eines äußeren Widerstandes, wobei der bewegte materielle Punkt keine Änderung seines Bewegungszustandes erfährt, sondern sich in gerader Linie mit gleichförmiger Geschwindigkeit be-

wegt; im andern Falle besteht das Wesen der Arbeit in der Änderung des Bewegungszustandes des materiellen Punktes, so daß dieser, falls keine andern äußeren Kräfte wirken, eine gleichförmig beschleunigte Bewegung erhält.

In der Wirklichkeit werden stets beide Fälle vereinigt erscheinen; die auf einen materiellen Punkt wirkende Kraft k wird gleichzeitig einen außerhalb des Punktes liegenden Widerstand überwinden und die Geschwindigkeit des Punktes ändern. Die Arbeit der Kraft k besteht dann aus zwei Teilen, von denen der eine zur Überwindung eines äußeren Widerstandes k', der kleiner als k sein muß, dient, der andere A' aber eine Vergrößerung der Geschwindigkeit des materiellen Punktes bewirkt, was durch die Gleichung

(2) $$A = k \cdot s = k' \cdot s + A'$$

ausgedrückt werden kann.

136.

Bis jetzt war vorausgesetzt worden, daß die Verschiebung s des materiellen Punktes in die Richtung der Kraft k fiel. Diese Voraussetzung wollen wir jetzt aufheben und annehmen, daß die Verschiebung des materiellen Punktes mit der Richtung der Kraft den Winkel $(k \mid s) = \alpha$ bilde, daß aber die Richtung der Kraft während der Verschiebung des materiellen Punktes unveränderlich sei.

Das ist z. B. der Fall, wenn sich der materielle Punkt unter der Einwirkung mehrerer der Größe und Richtung nach konstanten Kräfte befindet, die nicht im Gleichgewichte sind; seine Bahn wird dann eine Linie sein, die von der Richtung einer der auf ihn wirkenden Kräfte wesentlich verschieden sein kann. Dasselbe ist der Fall, wenn der materielle Punkt gezwungen ist, sich auf einer festen Kurve oder Fläche zu bewegen, wie es z. B. beim Falle auf der schiefen Ebene stattfindet, wo die Richtung der treibenden Kraft, der Schwerkraft, stets vertikal ist, die Bewegung des materiellen Punktes aber längs der schiefen Ebene erfolgen muß.

Aber auch in diesem Falle kann die Rede sein von dem Wege, den der materielle Punkt in der Richtung der Kraft zurückgelegt hat.

Es sei $A B$ (Fig. 49) die (vorläufig als geradlinig angenommene) Bahn, in der sich der materielle Punkt unter Einwirkung beliebiger Kräfte bewegt, und k eine dieser Kräfte. Hat der materielle Punkt die Strecke $A B = s$ zurückgelegt, und fällt man von B auf die Richtung der Kraft das Lot $B C$, so ist $A C = s'$ die Strecke, die der materielle Punkt während seiner Verschiebung um die Strecke $A B = s$ in der Richtung der Kraft zurückgelegt hat. Als Arbeit der Kraft bezeichnet man dann das Produkt $k \cdot s'$ oder man hat, da $s' = s \cdot \cos \alpha$, als Definition der Arbeit die Gleichung

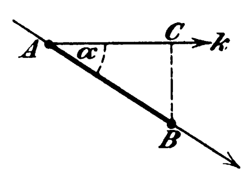


Fig. 49.

$$A = k \cdot s \cdot \cos \alpha. \tag{3}$$

Da man das Produkt auf der rechten Seite dieser Gleichung in doppelter Weise auffassen kann, nämlich als

$$k \cdot (s \cdot \cos \alpha) \text{ oder als } (k \cdot \cos \alpha) \cdot s,$$

so hat man nunmehr die allgemeine Definition der Arbeit einer Kraft:

Unter der mechanischen Arbeit einer Kraft versteht man das Produkt aus der Kraft und der Projektion des vom Angriffspunkte der Kraft zurückgelegten Weges auf die Kraftrichtung oder das Produkt aus dem vom Angriffspunkte der Kraft zurückgelegten Wege und der Projektion der Kraft auf die Wegrichtung.

137.

Aus der nunmehr gewonnenen allgemeinen Definition der Arbeit einer Kraft folgt, wenn die Kraft senkrecht zur Wegrichtung steht, wo $\alpha = 90^0$, $\cos \alpha = 0$ ist, daß die Arbeit der Kraft in diesem Falle Null ist. In der Tat kann dann die Kraft weder einen Widerstand überwinden noch eine Geschwindigkeitsänderung erzeugen. Für die Fortbewegung einer Last auf einer horizontalen Ebene ist darum keine Arbeit gegen die Schwere zu leisten. Zwar erfordert das Fortschieben eines Steinblocks auf der Erde beträchtliche Arbeit; sie kann aber dadurch verringert werden, daß der

Stein auf runde Hölzer gelegt wird; noch geringer wird die Arbeit, wenn der Stein auf einen auf Schienen laufenden Wagen gebracht wird, und auch hier hängt die Größe der Arbeit noch davon ab, ob die Achsen des Wagens mehr oder weniger gut geschmiert sind. So können wir uns denken, daß die zur Fortschaffung des Steines erforderliche Arbeit immer mehr, ganz nach unserm Belieben verkleinert und deshalb ganz vernachlässigt werden kann.

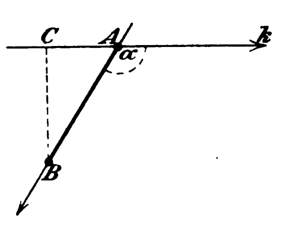


Fig. 50.

Ist der Winkel α ein stumpfer (Fig. 50), so fällt $A\,C$ in die der Richtung der Kraft k entgegengesetzte Richtung; der $\cos\alpha$ ist dann negativ, und man sagt alsdann, die Arbeit der Kraft sei negativ.

Haben also die Kraft und die Projektion des Weges auf die Kraft gleiche Richtung, so sagt man, die Arbeit der Kraft sei positiv, die Kraft leiste oder verrichte Arbeit, der bewegte materielle Punkt aber oder der Widerstand verbrauche (konsumiere) die Arbeit. Sind dagegen die Kraftrichtung und die Richtung der Projektion des Weges auf die Kraft entgegengesetzt, so sagt man, die Arbeit der Kraft sei negativ, die Kraft verbrauche Arbeit und der bewegte Punkt leiste sie.

Bei den z. B. im § 133 geschilderten Verhältnissen leistet auch die Gegenkraft k' Arbeit, aber negative und zwar von der Größe $-k'\,s$; d. h. die Gegenkraft (der Widerstand) konsumiert die von der Kraft k geleistete Arbeit; die geleistete Arbeit und die konsumierte sind aber hier, wie überall, stets einander gleich.

Ist P das Gewicht eines Körpers, so ist dieses die Kraft, die den Körper vertikal abwärts bewegt. Wenn der Körper sich um die Strecke h vertikal abwärts bewegt, so ist die dabei von der Schwerkraft oder dem Gewichte des Körpers erzeugte Arbeit $P \cdot h$ positiv; bewegt sich dagegen der Körper um die Strecke h aufwärts, so ist die dabei von der Schwerkraft erzeugte Arbeit negativ, gleich $-P \cdot h$; im ersteren Falle leistet die Schwerkraft Arbeit; im zweiten Falle konsumiert sie Arbeit.

138.

Arbeit gleichzeitig wirkender Kräfte. Ist ein materieller Punkt Angriffspunkt mehrerer Kräfte $k_1, k_2, \ldots k_n$, unter deren gleichzeitiger Einwirkung er seine Bewegung ausführt, bezeichnet $AB = s$ (Fig. 51) den vom Punkte zurückgelegten Weg und sind $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$ die Winkel, die die Richtungen der Kräfte $k_1, k_2, \ldots k_n$ mit der Wegrichtung bilden, so sind

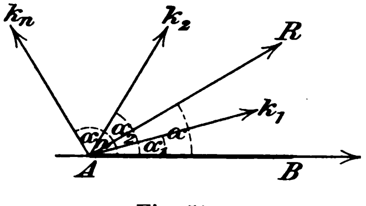


Fig. 51.

$$k_1 \cdot s \cdot \cos \alpha_1 ;$$
$$k_2 \cdot s \cdot \cos \alpha_2 ; \ldots$$
$$k_n \cdot s \cdot \cos \alpha_n$$

die von den einzelnen Kräften bei der Verschiebung des Punktes von A nach B geleisteten Arbeiten. Bezeichnet nun R die Resultante der Kräfte $k_1, k_2, \ldots k_n$, α den von ihr mit AB gebildeten Winkel, so ist die von der Resultierenden R bei der Verschiebung des materiellen Punktes von A nach B geleistete Arbeit

$$R \cdot s \cdot \cos \alpha.$$

Nach § 78 ist aber die in die willkürlich zu wählende Richtung AB fallende Komponente der Resultierenden beliebiger Kräfte gleich der algebraischen Summe der in dieselbe Richtung fallenden Komponenten der Seitenkräfte, oder es folgt aus den Gleichungen (1) und (2) des § 78 in unserm Falle die Gleichung

$$R \cdot \cos \alpha = k_1 \cdot \cos \alpha_1 + k_2 \cdot \cos \alpha_2 + \ldots + k_n \cdot \cos \alpha_n$$
$$= \Sigma k_i \cdot \cos \alpha_i,$$

aus der durch Multiplikation mit s folgt:

$$R \cdot s \cdot \cos \alpha = \Sigma k_i \cdot s \cdot \cos \alpha_i. \quad (4)$$

Der in dieser Gleichung ausgesprochene **Satz von der Arbeit der Kräfte** lautet:

Die algebraische Summe der bei einer Bewegung eines materiellen Punktes von mehreren gleich-

zeitig auf ihn wirkenden Kräften geleisteten Arbeiten ist gleich der von der Resultierenden jener Kräfte dabei geleisteten Arbeit.

Anm. Sind die auf den materiellen Punkt wirkenden Kräfte $k_1, k_2, \ldots k_n$ im Gleichgewichte, so kann zwar der materielle Punkt in Bewegung sein, weil er entweder eine Geschwindigkeit bereits irgendwoher hatte oder eine andere nicht unter den k befindliche Kraft auf ihn wirkt, aber die Kräfte $k_1, k_2, \ldots k_n$ haben keinen Einfluß auf die Bewegung; sind also mehrere Kräfte an einem in Bewegung befindlichen materiellen Punkte im Gleichgewichte, so ist die algebraische Summe der Arbeiten dieser Kräfte gleich Null.

139.

Bei den bisherigen Betrachtungen haben wir noch zwei Voraussetzungen gemacht, daß nämlich die Bahn des materiellen Punktes geradlinig sei, und daß die Kraft oder die Resultierende der Kräfte konstant, d. h. der Größe und Richtung nach unveränderlich sei. Treffen diese Voraussetzungen nicht zu, so muß man die Bewegung des materiellen Punktes in sehr kleine Elementarbewegungen zerlegt denken, so daß für jede solche Elementarbewegung sowohl die Bahn geradlinig als auch Richtung und Größe der Kraft (der Resultierenden der Kräfte) konstant angenommen werden kann. Diese Annahme wird der Wirklichkeit um so näher kommen, je kleiner die Elemente der Bewegung angenommen werden; sie würde der Wirklichkeit genau entsprechen, wenn die Zerlegung in diese Elemente bis ins Unendliche vorgenommen werden könnte. Jedem dieser Elemente entspricht aber eine Elementararbeit der wirkenden Kraft, und die Größe der während der gesamten Bewegung des materiellen Punktes von der Kraft geleisteten Arbeit ist die algebraische Summe dieser Elementararbeiten.

140.

Graphische Darstellung der Arbeit. Da die Arbeit einer Kraft durch das Produkt aus der Projektion der Kraft auf

die Wegrichtung und dem Wege des Angriffspunktes der Kraft gemessen wird, so kann man die Größe der Arbeit einer Kraft durch folgende graphische Darstellung (Arbeitsdiagramm) veranschaulichen.

Auf einer Geraden trägt man den vom Angriffspunkte der Kraft zurückgelegten Weg nach einem beliebigen Maßstabe als AB (Abszisse) ab (Fig. 52), errichtet an jeder Stelle von AB senkrecht zu AB das Lot (Ordinate), auf dem man in passend gewähltem Maßstabe die an jener Stelle vorhandene Größe der in die Bewegungsrichtung fallenden Projektion der Kraft abträgt. Da die veränderliche Kraft sich mit dem Wege stetig ändert, eine stetige Funktion des Weges ist, so bestimmen die Endpunkte der Ordinaten eine kontinuierliche Reihe von Punkten, die sogenannte Kraftkurve, die das Gesetz veranschaulicht, nach dem sich die Projektion der Kraft auf die Wegrichtung mit dem Wege ändert. Diese Kurve begrenzt mit AB und den beiden in A und B errichteten Loten AC und BD ein Flächenstück $ABDC$, dessen Inhalt die auf dem Wege AB geleistete Arbeit der Kraft angibt.

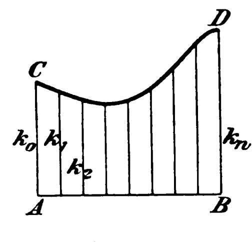


Fig. 52.

Diese Methode der graphischen Darstellung der Arbeit ist dieselbe, wie sie im § 18 zur graphischen Darstellung des von einem materiellen Punkte zurückgelegten Weges angewandt wurde. Auch der Beweis des Satzes, daß die Fläche $ABDC$ die Größe der Arbeit mißt, ist genau in derselben Weise wie im § 18 zu führen: man zerlegt den Weg AB in sehr kleine Teile (Weg-Elemente); das Produkt aus jedem Wegteilchen und der in die Wegrichtung fallenden Projektion der Kraft stellt sowohl die diesem Wegelemente entsprechende Elementararbeit als auch den Inhalt des Flächenstreifens des Diagramms dar, der in der Zeichnung dem betreffenden Wegelemente zugehört. Die Summation aller dieser Elementararbeiten gibt die geleistete Gesamtarbeit gleich der Größe der Fläche $ABDC$.

141.

Ist die Kraft auf dem Wege $AB = s$ konstant, so ist CD eine zu AB parallele Gerade und das die Größe der Arbeit darstellende Diagramm ein Rechteck.

Wächst die Kraft während der Bewegung des materiellen Punktes auf dem Wege AB gleichförmig, d. h. ist die Kraft dem von ihrem Angriffspunkte durchlaufenen Wege proportional, so ist das Arbeitsdiagramm ein Dreieck, wenn die Kraft im Anfange der Bewegung 0, am Ende des Weges k ist, oder ein Trapez, wenn die Kraft anfangs gleich k_0, am Ende gleich k_1 ist. Im ersteren Falle ist die Arbeit gleich der Fläche des Dreiecks, also gleich $\frac{1}{2} k \cdot s$, so daß die Arbeit einer von 0 bis k gleichförmig wachsenden Kraft dieselbe ist, als wenn sie längs des ganzen Weges konstant gleich $\frac{1}{2} k$ gewesen wäre. Im zweiten Falle ist die Arbeit der Kraft gleich der Fläche des Trapezes, also gleich $\frac{1}{2}(k_0 + k_1) \cdot s$, die Gesamtarbeit also dieselbe, als wenn die von k_0 bis k_1 gleichförmig wachsende Kraft konstant gleich $\frac{1}{2}(k_0 + k_1)$ gewesen wäre.

Ist die Kraftkurve eine krumme Linie, so teile man zur Ermittelung der Gesamtarbeit A die Strecke s in eine beliebige Anzahl, z. B. n gleicher Teile (je mehr desto besser), und ermittele die Größe der in den Teilpunkten aufgetragenen Lote $k_0, k_1, \ldots k_n$. Die Summe der Elementararbeiten ist dann (höhere Geometrie § 48b)

$$(5) \qquad A = \frac{s}{n}\left(\frac{1}{2} k_0 + k_1 + k_2 + \ldots + k_{n-1} + \frac{1}{2} k_n\right)$$

oder, wenn man s in eine gerade Anzahl Teile teilt, noch genauer nach der Simpsonschen Regel (höhere Geometrie § 48 c)

$$(6) \qquad A = \frac{s}{3n}\Big[k_0 + 4(k_1 + k_3 + \ldots + k_{n-1}) + 2(k_2 + k_4 + \ldots + k_{n-2}) + k_n\Big].$$

Unter der mittleren Intensität einer veränderlichen Kraft versteht man dann diejenige Kraft k_m, die auf dem Wege s dieselbe Gesamtarbeit leistet, wie die veränderliche. Ist also A nach einer der beiden Formeln (5) oder (6) berechnet, so ist

$$(7) \qquad k_m = \frac{A}{s}$$

die mittlere Intensität der Kraft.

Anm. Zu diesen Arbeitsdiagrammen gehören die sogenannten **Indikatordiagramme**, wie sie bei Dampfmaschinen zur Angabe der Arbeit der Maschine [indizierte Leistung im Gegensatz zur effektiven Leistung] gebraucht werden. (Indikator von Rosenkranz.) Bei ihnen sind die Abszissen die vom Maschinenkolben zurückgelegten Wege, die Ordinaten der jedesmalige Dampfdruck; der Flächeninhalt eines solchen Indikatordiagramms, der die Größe der Arbeit darstellt, wird entweder nach der Simpsonschen Regel (Formel 6) berechnet oder mit Hilfe eines Planimeters bestimmt, eines Instrumentes, an dem man den Flächeninhalt ebener Figuren ablesen kann, wenn man mit einem daran angebrachten Stifte den Umfang derselben umfährt.

142.

Arbeitseinheit und Dimension der Arbeit. Die im § 133 aufgestellte Formel für die Arbeit einer Kraft

$$A = k \cdot s$$

zeigt, daß die Einheit der Arbeit eine abgeleitete Einheit ist, daß sie durch die Kraft- und Längeneinheit bestimmt ist; Arbeitseinheit ist diejenige Arbeit, die die Krafteinheit auf einem Wege gleich der Längeneinheit leistet. Je nach der Wahl der Krafteinheit und der Längeneinheit hat man daher eine verschiedene Arbeitseinheit.

Im technischen Maßsysteme, wo die Krafteinheit 1 kg, die Längeneinheit 1 m ist, ist also die Arbeitseinheit diejenige Arbeit, die 1 kg auf 1 m leistet, oder, was dasselbe ist, die Arbeit, die geleistet wird, wenn 1 kg mit gleichförmiger Geschwindigkeit 1 m vertikal gehoben wird, wobei der Widerstand der Schwerkraft von 1 kg auf 1 m überwunden wird.

Man nennt diese technische oder praktische Arbeitseinheit ein Meterkilogramm (wohl auch Kilogramm-meter) und bezeichnet sie abgekürzt durch mkg.

Im absoluten Maßsysteme ist 1 Dyn die Krafteinheit, 1 cm die Längeneinheit, also die Arbeitseinheit diejenige Arbeit, die 1 Dyn längs 1 cm leistet, oder durch die 1 Dyn auf 1 cm überwunden wird. Man nennt diese Arbeitseinheit ein Erg. Wegen ihrer Kleinheit im Vergleich zu der praktischen Arbeitseinheit setzt man auch

$$1000000 \text{ Erg} = 10^6 \text{ Erg} = 1 \text{ Megery},$$
$$10000000 \text{ Erg} = 10^7 \text{ Erg} = 1 \text{ Joule}.$$

Aus der im § 64 angegebenen Vergleichung beider Maßsysteme folgt ohne weiteres

$$\begin{aligned} 1 \text{ mkg} &= 981000 \cdot 100 \text{ Erg} \\ &= 98{,}1 \text{ Megery} \\ &= 9{,}81 \text{ Joule}. \\ 1 \text{ Joule} &= 0{,}102 \text{ mkg}. \end{aligned}$$

Nach dem gewählten Maßsysteme ist auch die Dimension der Arbeit verschieden; sie ist

im technischen Maßsysteme KL;
im absoluten ML^2T^{-2}.

143.

Effekt. In der für die Arbeit einer Kraft aufgestellten Formel kommen nur die Größen Kraft und Weg vor; für die theoretische Berechnung der Wirkung einer Kraft ist die Zeit, in der eine Arbeit geleistet wird, nicht erforderlich; denn die Arbeit ist ja dieselbe, ob sie in kürzerer oder längerer Zeit geschieht. In der Technik dagegen, wo es sich um die praktische Verwendung der Kräfte handelt, kommt es bei der Vergleichung der Leistungen von Kräften wesentlich darauf an, in welcher Zeit sie eine bestimmte Arbeit verrichten. In der Technik, wo es sich außer um die Anlage der Maschinen auch um die Unterhaltungs- und Betriebskosten handelt, ist eine Kraft um so mehr wert, je mehr Arbeit sie in einer bestimmten Zeit leistet. Zum Vergleiche und Messen der Leistungen von Kräften legt man

deshalb die Arbeit zugrunde, die eine Kraft in der Zeiteinheit, in 1 sec, leistet, und nennt die von einer Kraft in 1 sec geleistete Arbeit den Effekt der Kraft oder auch die Arbeitsstärke der Kraft. Der Effekt E ist daher durch die Gleichung

$$E = \frac{A}{t} = \frac{k \cdot s}{t} \tag{8}$$

bestimmt. Da $\frac{s}{t}$ die Geschwindigkeit v bezeichnet, so kann man die Gleichung (8) auch schreiben

$$E = k \cdot v, \tag{9}$$

d. h. der Effekt einer Kraft ist gleich dem Produkte aus der Kraft und der Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes.

Darnach würde die Einheit des Effekts einer Kraft die Arbeit von 1 $\frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$ sein. Da aber die Zahlen, die die Leistungen der Maschinen und namentlich der Dampfmaschinen darstellen, oft sehr groß ausfallen, hat man zur Vermeidung dieser großen Zahlen in der Technik eine größere Einheit des Effekts eingeführt und zwar nennt man den Effekt von 75 mkg oder die mechanische Arbeit 75 $\frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$ eine Pferdekraft.*)

Der Name Pferdekraft ist unglücklich gewählt, denn er bezeichnet keine Kraft, sondern eine Arbeit; man hätte daher richtiger Pferdearbeit sagen müssen. Um Verwechselungen zu vermeiden, bürgert sich daher neuerdings immer mehr der Name Pferdestärke (abgekürzt PS oder HP = horse power) dafür ein.

---

*) Dieser Name soll daher entstanden sein, daß Watt gegen einen Fabrikanten, der eine Mühle durch 8 Pferde bewegen ließ, geäußert: er wolle ihm eine Dampfmaschine liefern, die bei geringeren Kosten dasselbe leiste, mit derselben Kraft wirke, wie jene 8 Pferde. — Zu dem sei noch bemerkt, daß in England nach landesüblichem Maße 1 PS = 550 engl. Fußpfund in der Sekunde = 76,0389 $\frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$ ist, daß also die englische Pferdestärke nicht genau mit der metrischen (französischen oder deutschen) übereinstimmt.

Der Effekt in Pferdestärken, der gemeiniglich mit N bezeichnet wird, ist daher

$$N = \frac{E}{75} = \frac{k \cdot v}{75} \text{ PS.} \tag{10}$$

Dazu sei noch bemerkt, daß die wirkliche Durchschnittsleistung eines lebenden Pferdes nur 50 $\frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$, also nur $^2/_3$ einer Maschinenpferdestärke beträgt, und daß eine Maschinenpferdestärke, die Tag und Nacht arbeitet, was ein Pferd nicht kann, etwa soviel wie $3^1/_2$ lebende Pferde leistet.

Im absoluten Maßsysteme hat man als Einheit des Effekts

1 Watt = 1 Joule in der Sekunde und
1 Kilowatt = 1000 Watt

eingeführt.

Aus den Vergleichszahlen des vorigen Paragraphen folgen die Umrechnungsformeln

1 PS = 9,81 · 75 Watt = 736 Watt = 0,736 Kilowatt.
1 Watt = 0,00136 PS.
1 Kilowatt = 1,36 PS.

Aus der den Effekt definierenden Gleichung (8) folgt die Dimension des Effekts

im technischen Maßsysteme $K\,L\,T^{-1}$;
im absoluten $M\,L^2\,T^{-3}$.

144.

Aufgabe I. Welche Arbeit ist nötig, um den 450 kg schweren Rammbär einer Kunstramme auf 5,2 m Höhe zu heben?

Auflösung. Nach der Formel

$$A = k \cdot s$$

ergibt sich

$$A = 450 \cdot 5{,}2 \text{ mkg} = 2340 \text{ mkg.}$$

Aufgabe II. Welche Arbeit verrichtet ein Fußgänger auf einem horizontalen Wege von 1 Meile = 7,5 km Länge unter der Annahme, daß sein 70 kg schwerer Körper sich bei jedem Schritte um 2 cm hebt und die Schrittlänge 70 cm beträgt?

Auflösung. Soviel mal die Schrittlänge in dem Gesamtwege enthalten ist, soviel mal wird das Gewicht des Körpers 2 cm hoch gehoben; es beträgt also die gesamte Arbeit

$$A = 70 \cdot 0{,}02 \cdot \frac{7\,500}{0{,}70} \text{ mkg} = 15\,000 \text{ mkg.}$$

145.

Aufgabe. Welche Arbeit konsumiert ein Körper von $P = 40$ kg Gewicht, der auf einer schiefen Ebene vom Neigungswinkel $\alpha = 40^0$ in $t = 15$ sec herabfällt?

Auflösung. Da die Bewegungsrichtung mit der Richtung der Kraft (der Schwere) den Winkel $90^0 - \alpha$ einschließt, so ist, wenn s die Länge der schiefen Ebene bezeichnet, die geleistete Arbeit

$$A = P \cdot s \cdot \cos\,(90^0 - \alpha) = P \cdot s \cdot \sin\,\alpha.$$

Da die Länge der schiefen Ebene nach § 102 Formel (2)

$$s = \frac{1}{2}\, g\, t^2 \cdot \sin\,\alpha$$

ist, so erhält man für die gesuchte Arbeit den Wert

$$A = \frac{1}{2}\, P \cdot g \cdot t^2 \cdot \sin^2\,\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 40 \cdot 9{,}81 \cdot 15^2 \cdot \sin^2\,40^0 \text{ mkg}$$

$$= 18\,240 \text{ mkg.}$$

146.

Aufgabe. Auf dem vom Angriffspunkte einer veränderlichen Kraft k in der Richtung der Kraft zurückgelegten Wege $s = 18$ cm hat diese Kraft in gleichen Intervallen die verschiedenen Werte

$$k_0 = 20 \text{ kg};\quad k_1 = 24 \text{ kg};\ k_2 = 26 \text{ kg};$$
$$k_3 = 25{,}5 \text{ kg};\ k_4 = 21 \text{ kg.}$$

Es soll die Arbeit der Kraft und ihre mittlere Intensität k_m ermittelt werden.

Auflösung. Da $\frac{s}{n} = \frac{18}{4}$ cm $= 4{,}5$ cm ist, so findet man entweder nach Formel (5)

$$A' = 0{,}045\ (10 + 24 + 26 + 25{,}5 + 10{,}5)\ \text{mkg} = 4{,}32\ \text{mkg}$$

oder nach Formel (6)

$$A'' = 0{,}015\ [20 + 4\ (24 + 25{,}5) + 2 \cdot 26 + 21]\ \text{mkg} = 4{,}365\ \text{mkg}.$$

Als mittlere Intensität der Kraft ergibt sich nun entweder

$$k'_m = \frac{A'}{s} = \frac{4{,}32}{0{,}18}\ \text{kg} = 24\ \text{kg}$$

oder

$$k''_m = \frac{A''}{s} = \frac{4{,}365}{0{,}18}\ \text{kg} = 24{,}250\ \text{kg}.$$

147.

Aufgabe. In einem Göpel geht ein Pferd, dessen Zugkraft vermittelst eines Dynamometers zu 40 kg gemessen worden ist, in 6 Min. 20 mal herum; wie groß ist der Effekt dieser Arbeit, wenn die Göpelstange 3 m lang ist?

Auflösung. Bei jedem Umgange macht das Pferd einen Weg $s = 2\,\pi \cdot 3$ m, bei 20 Umdrehungen beträgt der Weg $2\,\pi \cdot 3 \cdot 20$ m, also ist die in 6 Min. geleistete Arbeit

$$A = 40 \cdot 2\,\pi \cdot 3 \cdot 20\ \text{mkg}$$

und der Effekt

$$E = \frac{40 \cdot 2\,\pi \cdot 3 \cdot 20}{6 \cdot 60}\ \frac{\text{mkg}}{\text{sec}} = 41{,}9\ \frac{\text{mkg}}{\text{sec}} = 0{,}56\ \text{PS}.$$

148.

Aufgabe. Wie groß ist der a b s o l u t e Effekt einer Dampfmaschine, die mit $P = 4$ Atmosphären Überdruck arbeitet, wenn der Kolben einen Durchmesser $d = 40$ cm hat, die Länge des Kolbenhubes $l = 0{,}75$ m und die Tourenzahl des Schwungrades $n = 60$ ist?

Vorbemerkung. Bei jeder Maschine geht ein Teil der Kraft zur Überwindung der Bewegungshindernisse u. dergl. verloren, so daß nur ein Teil derselben nutzbar gemacht werden kann. Die von der wirkenden Kraft produzierte Arbeit, die sogenannte Totalarbeit, zerfällt also in zwei Teile, von denen einer durch die Bewegungshindernisse konsumiert wird und Nebenarbeit genannt wird, während der zweite die eigentliche Nutzarbeit ist. Die Totalarbeit in der Sekunde nennt man den absoluten Effekt, die Nutzarbeit in der Sekunde den relativen Effekt, das Verhältnis beider das Güteverhältnis oder den Wirkungsgrad der Maschine. Letzterer ist also durch die Gleichung

$$\text{Wirkungsgrad} = \frac{\text{relativer Effekt}}{\text{absoluter Effekt}}$$

bestimmt und ist stets ein echter Bruch.

Vorausgesetzt wird noch, daß die Dampfmaschine doppelt wirkend und ohne Expansion ist.

Auflösung. Der Druck einer Atmosphäre beträgt auf jedes qcm 1,033 kg, also ist der Druck von P Atmosphären auf einen Kolben vom Durchmesser d cm

$$k = \frac{\pi}{4} \cdot d^2 \cdot 1{,}033 \cdot P \text{ kg.}$$

Da bei jeder Umdrehung des Schwungrades der Kolben hin und her geht, also den Weg $2\,l$ zurücklegt, so beträgt der Weg bei n Touren in der Minute $2\,l \cdot n$, also ist die Geschwindigkeit des Kolbens

$$v = \frac{2\,l \cdot n}{60} \frac{\text{m}}{\text{sec}};$$

hieraus folgt der absolute Effekt

$$E = k \cdot v = \frac{\pi}{4} d^2 \cdot 1{,}033 \cdot P \cdot \frac{2\,l \cdot n}{60} \frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$$

$$= \frac{\pi\, d^2 \cdot l \cdot n \cdot P \cdot 1{,}033}{120} \frac{\text{mkg}}{\text{sec}},$$

also in PS

$$N = \frac{E}{75} = \frac{\pi\, d^2 \cdot l \cdot n \cdot P \cdot 1{,}033}{9000} \text{ PS.}$$

Setzt man die gegebenen Werte ein, so erhält man

$$N = \frac{\pi \cdot 40^2 \cdot 0{,}75 \cdot 60 \cdot 4 \cdot 1{,}033}{9000} \text{ PS} = 103{,}8 \text{ PS}.$$

Beträgt der Wirkungsgrad der Maschine $^2/_3$, so ist der relative Effekt

$$N' = \frac{2}{3} \cdot 103{,}8 \text{ PS} = 69{,}2 \text{ PS}.$$

149.

Die tägliche mechanische Arbeitsleistung belebter Wesen pflegt man nach der Formel

$$L = P \cdot v \cdot t$$

zu berechnen, worin P die aufgewandte Kraft, v die mittlere Geschwindigkeit und t die Arbeitszeit ist. Hierbei nimmt man bei 8 Std. Arbeitszeit als Durchschnitt an

$$\text{für einen Menschen } P = 10 \text{ kg}; \; v = 0{,}8 \frac{\text{m}}{\text{sec}},$$

$$\text{für ein Pferd } P = 70 \text{ kg}; \; v = 1{,}25 \frac{\text{m}}{\text{sec}},$$

so daß die tägliche Leistung eines

$$\text{Menschen } L = 10 \cdot 0{,}8 \cdot 28800 \text{ mkg} = 230400 \text{ mkg},$$

$$\text{Pferdes } L = 70 \cdot 1{,}25 \cdot 28800 \text{ mkg} = 2520000 \text{ mkg}$$

beträgt. Kann aber der Mensch oder das Pferd nicht mit mittlerer Geschwindigkeit und Zeit ausgenutzt werden, so ist, wenn keine übermäßige Anstrengung stattfinden soll, die Kraft P' erfahrungsgemäß nach der Gerstnerschen Formel

$$P' = P\left(2 - \frac{v'}{v}\right) \cdot \left(2 - \frac{t'}{t}\right),$$

wo v' und t' die von den mittleren Werten v und t abweichenden Werte sind, zu berechnen.

Fragen:

1. Welche Kraft kann hiernach ein Arbeiter bei normaler Geschwindigkeit augenblicklich ausüben?

2. Welche Kraft darf man von einem Pferde bei 10stündiger Arbeitszeit verlangen, wenn die Geschwindigkeit 1 m beträgt?

3. Wieviel Arbeitszeit darf man einem Pferde zumuten, wenn es unter gewöhnlichen Umständen eine Kraft von 90 kg entwickeln soll?

Antworten:

1. In diesem Falle ist $t' = 0$, und es ergibt sich

$$P' = P\left(2 - \frac{v}{v}\right) \cdot \left(2 - \frac{0}{t}\right) = 2\,P;$$

2. $$P' = P\left(2 - \frac{1}{1{,}25}\right) \cdot \left(2 - \frac{10}{8}\right) = \frac{9}{10}\,P;$$

3. Aus

$$90 = 70\left(2 - \frac{v}{v}\right) \cdot \left(2 - \frac{t'}{8}\right)$$

folgt

$$t' = 5{,}7 \text{ Std.}$$

Aufgaben.

123. Wie groß ist die Arbeit, die nötig ist, einen Eisenbahnzug von 200 t Gewicht 1 km weit horizontal fortzubewegen, wenn der Widerstand (die Reibung) $^1/_{200}$ des Gewichtes beträgt?

Antw.: $A = 1000000$ mkg.

124. Welche Arbeit konsumiert ein Pochstempel von 120 kg Gewicht und 35 cm Hubhöhe?

Antw.: $A = 42$ mkg.

125. Welche Arbeit ist nötig, um einen Rammklotz von 350 kg Gewicht während 8 Stunden in jeder Minute 4 mal auf 3 m Höhe zu heben?

Antw.: $A = 2016000$ mkg.

126. Welche Arbeit wird geleistet, wenn ein Wagen, der 600 kg wiegt und mit 900 kg belastet ist, auf horizontaler Straße, auf der der Widerstand $^1/_{30}$ der Last ist, 1 Meile = 7,5 km weit fortbewegt wird?

Antw.: $A = 375000$ mkg.

127. Welche Arbeit produzieren 3 cbm Wasser, die 5 m hoch herabfallen?

Antw.: $A = 15000$ mkg.

128. Welche Arbeit produziert Dampf, der einen Überdruck von 3 Atmosphären hat, wenn er einen Kolben von 360 mm Durchmesser in einem Cylinder von 80 cm Länge 500 mal hin und her bewegt?

Antw.: 2523000 mkg.

129. Wie groß ist die Arbeit des Dampfes der vorigen Aufgabe bei einem Kolbenhube, wenn die Spannung des Dampfes dabei gleichmäßig auf 1 Atmosphäre abnimmt?

Antw.: 1682 mkg.

130. Welche Arbeit ist nötig, um 400 l Wasser aus einer Tiefe von 8 m zu heben, wenn die Bewegungshindernisse $^1/_4$ der Last betragen?

Antw.: 4000 mkg.

131. Welche Arbeit konsumiert ein Körper von $P = 50$ kg Gewicht, der eine schiefe Ebene von der Länge $s = 12$ m in $t = 8$ sec durchfällt? $\left(g \sim 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}\right)$.

Antw.: $A = \frac{2\,P\,.\,s^2}{g\,t^2} = 22{,}5$ mkg.

132. Ein Pferd bewegt einen Wagen 1 km weit; durch ein zwischen den Wagen und die Zugstränge eingeschaltetes Dynamometer wurde die Zugkraft des Pferdes am Anfange und Ende der Bewegung und in je 100 m Abstand bestimmt; dabei wurden der Reihe nach folgende Werte gefunden:

60, 63, 56, 62, 54, 68, 65, 65, 59, 60, 57 kg;

wie groß ist nach der Simpsonschen Regel die Arbeit des Pferdes, und wie groß die mittlere Kraft?

Antw.: $A = 61900$ mkg; $k_m = 61{,}9$ kg.

133. Eine Wasserkraft, die ein Gefälle von 6 m und 0,8 cbm Aufschlagwasser (so heißt in der Technik die in 1 sec gelieferte Wassermenge) hat, treibt eine Turbine; wie groß ist der absolute, und wie groß der relative Effekt, wenn der Wirkungsgrad der Turbine 0,7 ist?

Antw.: $N = 64$ PS; $N' \sim 45$ PS.

134. Wie groß ist der Effekt des Niagarafalles, bei dem nach Barrets Schätzungen in der Minute 554000 cbm Wasser 48 m hoch herabfallen?

Antw.: $N \sim 6$ Millionen PS.

135. Welcher Effekt entspricht der Aufgabe 124, wenn in der Minute 50 Schläge gemacht werden?

Antw.: $35 \frac{\text{mkg}}{\text{sec}} = 0{,}47$ PS.

136. Ein Dampfschnellhammer, dessen Fallgewicht 75 kg und dessen Hubhöhe 0,50 m beträgt, macht in der Minute 400 Schläge; wie groß ist sein Effekt?

Antw.: 3,67 PS.

137. Der Rammklotz einer Zugramme von 300 kg Gewicht soll in der Minute 25 mal auf 1,25 m Höhe gehoben werden; wie viele Arbeiter sind dazu nötig, wenn der Effekt eines Arbeiters zu $1/7$ PS angenommen wird?

Antw.: 15 Mann.

138. Wie groß ist der Wirkungsgrad eines oberschlächtigen Wasserrades, wenn dasselbe bei 5 m Gefälle und 0,5 cbm Aufschlagwasser den relativen Effekt 20 PS hat?

Antw.: 0,6.

139. Wieviel PS muß eine Dampfmaschine zum Betriebe einer Pumpe haben, die in jeder Minute 15 hl Wasser auf 12 m heben soll, wenn die Nebenarbeit $1/4$ der Totalarbeit beträgt, und der Fabrikant den Wirkungsgrad 0,6 garantiert?

Antw.: $N \sim 9$ PS.

140. Wieviele PS muß eine Lokomotive haben, um einen 300 t schweren Eisenbahnzug mit 6 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit auf horizontalen Schienen zu bewegen, wenn die Bewegungshindernisse $1/200$ der Last sind, und der Wirkungsgrad $2/3$ ist?

Antw.: 180 PS.

150.

Wucht (Lebendige Kraft). Hat ein materieller Punkt, dessen Masse m ist, zu einer bestimmten Zeit die Geschwindigkeit $v \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, so nennt man den Ausdruck

$$\frac{1}{2} m v^2$$

die Wucht oder die lebendige Kraft des materiellen Punktes zu jener Zeit.

Der von Leibniz eingeführte Name „lebendige Kraft" ist nicht gerade glücklich gewählt, weil er leicht Veranlassung zu Fehlern und Verwechselungen gibt; denn $\frac{1}{2} m v^2$ ist keine Kraft, wie wir sie bisher als die Ursache einer Änderung

des Bewegungszustandes eines materiellen Punktes betrachtet haben, sondern steht, wie man sofort aus seiner

Dimension $M L^2 T^{-2}$,

die mit der der mechanischen Arbeit übereinstimmt (§ 142), sieht, in einem bald näher zu betrachtenden Zusammenhange mit der im vorigen besprochenen Arbeit einer Kraft.

Zur Vermeidung von Mißverständnissen ist deshalb in neuerer Zeit der Name „Wucht“ für jene Größe eingeführt worden, der sich mehr und mehr einbürgert und auch im folgenden allein gebraucht werden wird.

Wenn die Geschwindigkeit des materiellen Punktes sich ändert, so ändert sich auch seine Wucht; ist c seine Geschwindigkeit im Anfange, v seine Geschwindigkeit am Ende einer gewissen Zeit, so bezeichnet

$$\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m c^2$$

die Zunahme oder Abnahme der Wucht des materiellen Punktes während jener Zeit, je nachdem

$$v > c \text{ oder } v < c$$

ist, wobei die Abnahme als eine negative Zunahme aufgefaßt wird.

151.

Betrachten wir nun genauer den im § 134 kurz beschriebenen Fall, daß auf einen in Bewegung befindlichen materiellen Punkt eine konstante Kraft k, deren Richtung mit der Bewegungsrichtung des materiellen Punktes zusammenfällt, ungestört wirkt, so daß der Punkt eine gleichförmig beschleunigte Bewegung erhält.

Für den Weg s, den ein materieller Punkt bei einer gleichförmig beschleunigten Bewegung zurücklegt, während seine Geschwindigkeit von c bis v wächst, gilt die Gleichung [§ 20 (5)]

$$s = \frac{v^2 - c^2}{2a};$$

multipliziert man diese Gleichung mit der dynamischen Grundgleichung [§ 56 (5)]

$$k = m\,a,$$

so erhält man die wichtige Gleichung

$$(11) \qquad k \cdot s = m \cdot \frac{v^2 - c^2}{2} = \frac{1}{2}\,m\,v^2 - \frac{1}{2}\,m\,c^2.$$

Da das auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Produkt $k \cdot s$ nach dem Früheren die von der Kraft geleistete Arbeit ist, so läßt sich die in § 134 angedeutete Äquivalenz der Arbeit einer Kraft und der von ihr erzeugten Bewegung in dem Satze aussprechen:

Die Arbeit, die eine auf einen materiellen Punkt wirkende Kraft leistet, und die der materielle Punkt konsumiert, um die Geschwindigkeitszunahme $v - c$ zu erlangen, ist gleich der von der Kraft erzeugten Zunahme der Wucht des materiellen Punktes.

Ist im besonderen die Anfangsgeschwindigkeit c des materiellen Punktes gleich Null, so geht die Gleichung (11) über in

$$(12) \qquad k \cdot s = \frac{1}{2}\,m\,v^2,$$

d. h. die Wucht, die ein materieller Punkt am Ende der Bewegung besitzt, ist gleich der von der Kraft während der Bewegung geleisteten und vom materiellen Punkte zur Erlangung der Geschwindigkeit v konsumierten Arbeit.

Es ist also nicht allein die Wucht eines materiellen Punktes der von der Kraft geleisteten Arbeit gleich, sondern auch jede Zunahme der Wucht, die selbstverständlich neue Arbeit erfordert, ist dieser neu zu leistenden Arbeit gleich.

152.

Fällt die Richtung der Anfangsgeschwindigkeit c des materiellen Punktes nicht mit der Richtung der Kraft k zusammen, sondern bilden beide Richtungen den Winkel $\alpha < 90^0$ miteinander, so kann man die Anfangsgeschwindigkeit c in zwei Seitengeschwindigkeiten

$$c \cdot \cos \alpha \text{ und } c \cdot \sin \alpha$$

in die Richtung der Kraft und senkrecht darauf zerlegen.

Bezeichnet man die Geschwindigkeit nach der Zeit t in der ersteren Richtung mit v_x und den in dieser Richtung zurückgelegten Weg mit s, so gelten die Gleichungen [(3) und (4) des § 33]

$$s = c \cdot \cos \alpha \cdot t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v_x = c \cdot \cos \alpha + a t,$$

aus denen durch Elimination von t folgt

$$s = \frac{v_x^2 - c^2 \cdot \cos^2 \alpha}{2 a},$$

woraus leicht

$$k \cdot s = \frac{1}{2} m v_x^2 - \frac{1}{2} m c^2 \cdot \cos^2 \alpha$$

hervorgeht; s aber ist jetzt der vom Angriffspunkte der Kraft in der Richtung der Kraft zurückgelegte Weg oder die Projektion des Weges des materiellen Punktes auf die Richtung der Kraft, $k \cdot s$ also die von der Kraft geleistete Arbeit.

Da nun die Bewegung senkrecht zur Richtung der Kraft die konstante Geschwindigkeit $v_y = c \cdot \sin \alpha$ hat, also die Gleichung

$$0 = \frac{1}{2} m v_y^2 - \frac{1}{2} m c^2 \cdot \sin^2 \alpha$$

gilt, so folgt durch Addition der beiden Gleichungen, wenn man die Gleichung $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ beachtet,

$$k \cdot s = \frac{1}{2} m (v_x^2 + v_y^2) - \frac{1}{2} m c^2.$$

Da nun $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ die resultierende Geschwindigkeit ist, so kann man schreiben

$$k \cdot s = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m c^2;$$

also gilt auch im jetzigen Falle die nämliche Beziehung zwischen der geleisteten Arbeit und der Wucht des materiellen Punktes.

Ist die auf den materiellen Punkt wirkende Kraft nicht konstant, sondern beliebig veränderlich, so denke man sich die Zeit ihrer Wirkung in beliebig kleine Teilchen zerlegt; während jedes Zeitteilchens kann dann die Kraft als konstant

angesehen werden, und es gilt der Satz von jeder Elementararbeit der Kraft, also auch von ihrer Gesamtarbeit.

Wirken auf den materiellen Punkt mehrere Kräfte, so können diese zu einer einzigen Resultante zusammengesetzt werden, deren Arbeit gleich der Summe der Arbeiten der einzelnen Kräfte ist. Es gilt also der obige Satz allgemein:

Wirken auf einen materiellen Punkt beliebige Kräfte, so ist die Summe der von den Kräften während einer Bewegung des Punktes geleisteten und vom materiellen Punkte konsumierten Arbeiten gleich der Zunahme der Wucht des materiellen Punktes.

153.

Ist die konstante Kraft k der Richtung der Anfangsgeschwindigkeit c des materiellen Punktes entgegengerichtet, tritt also die Kraft als die Bewegung des Punktes hindernd, d. h. als Widerstand auf, so ist die Bewegung des Punktes eine gleichförmig verzögerte, und die Gleichung (11) lautet nunmehr, da der Weg s und damit auch die Arbeit negativ zu nehmen ist,

$$-k \cdot s = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m c^2$$

oder

$$k \cdot s = \frac{1}{2} m c^2 - \frac{1}{2} m v^2. \tag{13}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung bezeichnet jetzt die Abnahme der Wucht des materiellen Punktes, die er während der Bewegung erfährt. Somit läßt sich die Gleichung (13) jetzt dahin auslegen, daß die Abnahme der Wucht des bewegten materiellen Punktes gleich der Arbeit ist, die der Punkt verrichtet, indem er den Widerstand der Kraft k auf dem Wege s überwindet.

Für die Wegelänge s_0, nach deren Zurücklegung die Geschwindigkeit v, folglich auch die Wucht des materiellen Punktes gleich Null geworden ist, gilt die Gleichung

$$k \cdot s_0 = \frac{1}{2} m c^2 \tag{14}$$

oder in Worten: die Wucht des materiellen Punktes, die er infolge seiner Anfangsgeschwindigkeit be-

saß, ist dazu verbraucht worden, den Widerstand k auf dem Wege s_0 zu überwinden.

Ganz entsprechend dem Verfahren im § 152 kann gezeigt werden, daß das gefundene Ergebnis dasselbe bleibt, wenn die Richtung von k mit der Richtung der Anfangsbewegung des materiellen Punktes einen stumpfen Winkel $\alpha > 90^0$ bildet, oder wenn die Kraft veränderlich ist, oder wenn sie die Resultante mehrerer Kräfte ist.

154.

Die in den letzten Paragraphen gewonnenen Resultate können wir nunmehr in folgender Form aussprechen:

Die Zunahme oder Abnahme der Wucht eines sich bewegenden materiellen Punktes ist gleich der während der Bewegung **an** ihm oder **von** ihm verrichteten mechanischen Arbeit.

Dem in diesem Satze ausgesprochenen Gesetze (früher Prinzip der lebendigen Kraft genannt) kann man auch die Form eines Doppelsatzes von der Äquivalenz der Arbeit einer Kraft und der Wucht eines bewegten materiellen Punktes geben:

Die Wucht eines bewegten materiellen Punktes ist
einerseits gleich der Arbeit, die der materielle Punkt verbrauchte, um seine Geschwindigkeit zu erhalten,
andererseits gleich der Arbeit, die der materielle Punkt leisten kann, wenn er dabei seine Geschwindigkeit verliert.

Zufolge seiner Wucht kann also ein bewegter materieller Punkt dieselbe Arbeit leisten, die er verbraucht hat, um jene Wucht zu erhalten. Die vom Punkte konsumierte Arbeit ist also als Arbeitsfähigkeit in der Form der Wucht in dem materiellen Punkte aufgespeichert.

155.

Die Gleichung (2) des § 135 kann nunmehr, da A' derjenige Teil der Arbeit $k \cdot s$ ist, der eine Geschwindigkeits-

änderung des materiellen Punktes hervorbringt, geschrieben werden

$$(15) \qquad k \cdot s = k' \cdot s + \left(\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m c^2\right).$$

Ist $k' < k$, so ist $\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m c^2$ positiv, d. h. die Arbeit der Kraft k überwindet nicht nur den Widerstand k', sondern vermehrt auch die Wucht des materiellen Punktes.

Ist $k' > k$, so muß $\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m c^2$ negativ sein; in diesem Falle reicht die Kraft k allein zur Überwindung des Widerstandes k' nicht aus; der noch fehlende Teil der hierzu nötigen Arbeit wird von dem materiellen Punkte dadurch geleistet, daß seine Wucht abnimmt.

Betrachten wir kurz die Gleichung (15) in bezug auf die Schwerkraft.

Beim freien Falle ist $k' = 0$; $k = P$, gleich dem Gewichte des fallenden Körpers. Fällt er von der Ruhelage aus, ist also $c = 0$, so lautet die Gleichung (15)

$$P \cdot s = \frac{1}{2} m v^2;$$

die von der Schwere geleistete Arbeit ist also gleich der Wucht des fallenden Körpers. Ersetzt man $\frac{P}{m}$ durch g, so erhält man

$$2 g s = v^2 \text{ und } s = \frac{v^2}{2 g},$$

die mit den beim freien Falle früher gefundenen Beziehungen übereinstimmen (vergl. § 95).

Beim vertikalen Wurfe ist $k = 0$; $k' = P$, und die Gleichung (15) lautet

$$P \cdot s + \left(\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m c^2\right) = 0$$

oder

$$P \cdot s = \frac{1}{2} m c^2 - \frac{1}{2} m v^2;$$

die gegen die Schwere geleistete Arbeit ist gleich dem Verluste an Wucht, den der materielle Punkt erleidet. Solange der Punkt Wucht besitzt, kann er die Schwere überwinden;

er wird deshalb so lange steigen, bis seine Wucht $\frac{1}{2} m v^2$ gleich Null geworden ist. Aus der letzten Gleichung folgt für die Höhe H, die der Punkt erreichen kann, der Wert

$$H = \frac{1}{2} \frac{m}{P} \cdot c^2 = \frac{c^2}{2g},$$

was mit § 115 übereinstimmt.

Wird ein Körper vom Gewichte P auf die Höhe h gehoben, so ist die von der aufgewandten Kraft geleistete Arbeit

$$k \cdot h = P \cdot h + \left(\frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m c^2\right);$$

die Arbeit, die also erforderlich ist, ein Gewicht P auf die Höhe h zu heben, die sogenannte Hubarbeit, ist nur dann gleich $P \cdot h$, wenn Anfangs- und Endgeschwindigkeit einander gleich sind, wenn also im besonderen die Bewegung aus der Ruhe in eine neue Ruhelage erfolgt. Und umgekehrt leistet ein von der Höhe h sinkendes Gewicht P nur unter eben derselben Bedingung die Arbeit $P \cdot h$.

Wollen wir durch unsere Muskelkraft ein Gewicht auf eine bestimmte Höhe h heben, so ist im Anfange ein Mehr an Kraft nötig, um das Gewicht in Bewegung zu setzen; auf dem Wege selbst haben wir nur dieselbe Kraft aufzuwenden, wie in der Ruhelage, weil die einmal begonnene Bewegung sich nach dem Gesetze der Beharrung fortsetzt; am Ende der Strecke h gewinnen wir aber das im Anfange erforderliche Mehr dadurch wieder, daß die Geschwindigkeit der Bewegung wieder zu Null abnimmt, und dabei ein geringerer Kraftaufwand ausreichend ist.

156.

Energie. Mit diesem Worte bezeichnet man ganz allgemein die Fähigkeit eines Körpers Arbeit zu leisten.

Beschränken wir uns auf die Mechanik, so findet sich die Fähigkeit Arbeit zu leisten

a) bei bewegten Körpern zufolge ihrer Wucht;

b) bei ruhenden Körpern, die durch eine aufgewandte Arbeit in einen sogenannten Spannungszustand gebracht worden sind.

Zur Erläuterung dieser allgemeinen Bemerkungen diene zunächst das Folgende:

Daß ein bewegter Körper zufolge seines Bewegungszustandes Wirkungen ausüben kann, dafür können vielfache Beobachtungstatsachen angeführt werden.

Legen wir eine Flintenkugel auf eine feste Unterlage, so sehen wir keine Wirkung derselben; auf eine weiche Unterlage gelegt würde sie wohl allmählich in diese einsinken, während sie aus einer Flinte abgeschossen ein starkes Brett durchbohren kann. Würde das Gewicht eines Rammklotzes auf einen Pfahl gelegt, so würde ein Einsinken des Pfahles kaum stattfinden, während dasselbe unter dem Drucke, den die Wucht des fallenden Rammklotzes ausübt, leicht stattfindet. Alle Wirkungen des Schießens, Werfens, Stoßens sind auf die Fähigkeit bewegter Massen Arbeit zu leisten zurückzuführen.

Ein in voller Fahrgeschwindigkeit befindlicher Eisenbahnzug ist vermöge der ihm innewohnenden Wucht nach Absperrung des Dampfes fähig, sein Gewicht auf horizontalem Wege noch Kilometer weit fortzubewegen und auf diesem Wege die Reibung zu überwinden.

Die Anwendung der Schwungräder an Maschinen beruht auf der Fähigkeit bewegter Massen Arbeit zu leisten.

Während so ein bewegter Körper infolge seiner Wucht Arbeit zu leisten fähig ist, erlangt ein ruhender Körper nur unter besonderen Umständen Energie.

Ein am Erdboden liegender Körper vom Gewichte P ist arbeitsunfähig; wird aber dieses Gewicht in die Höhe h gehoben, so ist dazu die Arbeit $P \cdot h$ nötig, und diese Arbeit hat der Körper konsumiert. Dieselbe Arbeit ist aber nunmehr in dem Körper als Arbeitsvermögen gewonnen. Legen wir den Körper in der Höhe h auf eine Unterlage, so übt er einen Druck aus, der gleich seinem Gewichte ist; zwar übte er denselben Druck auf dem Erdboden aus und doch sind beide Drucke voneinander wesentlich verschieden. Nimmt man nämlich die Unterlage in der Höhe h weg, wozu keine Arbeit gegen die Schwere zu leisten ist, so kann das Gewicht P, indem es niedersinkt, etwa vermittelst einer Rolle ein gleich großes Gewicht auf die Höhe h heben, also dieselbe Arbeit leisten, die es konsumiert hatte, oder es

erreicht, indem es die Höhe h frei durchfällt, die Geschwindigkeit v, die durch die Gleichung $v^2 = 2\,g\,h$ bestimmt ist. Multipliziert man diese Gleichung mit $\frac{1}{2}\,m$ und beachtet, daß $m\,g = P$ ist, so erhält man $\frac{1}{2}\,m\,v^2 = P \cdot h$, d. h. die Wucht, die das fallende Gewicht am Boden hat, ist gleich der Arbeit, die das Gewicht konsumierte, indem es auf die Höhe h gehoben wurde.

Diese Fähigkeit Arbeit zu leisten erlangt ein Körper aber nicht nur bei einer Veränderung seiner Lage, sondern auch bei einer Veränderung der Lage seiner Moleküle. Wird eine stählerne Spiralfeder durch einen Zug ausgedehnt oder durch einen Druck verkürzt, wozu eine gewisse Arbeit erforderlich ist, so wird die Feder gespannt. Die Moleküle haben das Bestreben in die frühere Lage zurückzugehen, und die Feder ist imstande, sobald sie entspannt wird, durch ihr Zusammenziehen oder Ausdehnen dieselbe Arbeit zu leisten, die zum Ausdehnen oder Verkürzen aufgewendet werden mußte. Wird die Feder einer Uhr aufgezogen, so ist die darauf verwandte Arbeit in der Feder aufgespeichert und wird von der Feder dadurch wieder produziert, daß sie den Gang der Uhr bewirkt. Wird die Sehne eines Bogens gespannt, so zeigt sich ihre durch das Spannen konsumierte Arbeit in der Geschwindigkeit, die sie dem Pfeile beim Abschießen erteilt.

Diese Fähigkeit der Körper, Arbeit zu leisten infolge einer Lagenänderung des ganzen Körpers oder der Teile des Körpers zueinander, nannte Helmholtz, im Gegensatze zu der lebendigen Kraft bewegter Körper, Spannkraft.

Die Spannkraft eines Körpers äußert sich also in dem Bestreben eine andere Lage einzunehmen und setzt das Vorhandensein einer Hemmung voraus, die die Spannkraft aufrecht erhält; die Spannkraft wird aber erst wirksam, wenn die Hemmung beseitigt wird. Zu der Beseitigung des Hemmnisses oder, wie man zu sagen pflegt, zur Auslösung der Spannung kann zwar Arbeit erforderlich sein, doch braucht der sich im Spannungszustande befindliche Körper diese Arbeit nicht selbst zu verrichten.

157.

Ein materieller Punkt besitzt also Energie oder Arbeitsfähigkeit entweder infolge seiner Geschwindigkeit oder infolge einer Lagenänderung.

Die erstere Art nennt man daher Energie der Bewegung, wohl auch kinetische oder aktuelle Energie, die zweite Art Energie der Lage oder statische oder potentielle Energie.

Die Größe der Energie wird durch die Größe der Arbeit gemessen, die der mit der Energie behaftete Punkt hervorbringen kann, oder auch, da die produzierte Arbeit stets gleich der konsumierten ist, durch die Arbeit, die geleistet werden mußte, um den materiellen Punkt in den betreffenden Energiezustand zu versetzen. Die Energie stellt also einen in dem materiellen Punkte aufgespeicherten Arbeitsvorrat dar, wird deshalb auch durch Arbeitseinheiten, also im technischen Maßsysteme durch mkg gemessen.

Die Energie der Bewegung wird hiernach durch die Wucht des bewegten materiellen Punktes gemessen, die Energie der Lage durch die Arbeit, die nötig war zur Erzeugung der Lage.

Es ist daher die Dimension der Energie dieselbe, wie die der Arbeit, also

im technischen Maßsysteme $K L$;
im absoluten $M L^2 T^{-2}$.

158.

Zwischen beiden Arten von Energie besteht aber die wichtige Beziehung, daß eine in die andere umgewandelt werden kann.

Energie der Bewegung vermag sich in Energie der Lage umzusetzen, und umgekehrt geht jede Energie der Lage, nach ihrer Auslösung sich selbst überlassen, in Energie der Bewegung über. Auch kann jede der beiden Arten der Energie von einem materiellen Punkte auf einen andern übertragen werden. Die Energie kann also sowohl ihre Form als ihren Träger ändern.

Ein auf die Höhe h gehobenes Gewicht P kann sinkend vermittelst einer Rolle ein ihm gleiches Gewicht auf dieselbe Höhe heben, und dadurch seine Energie der Lage an dieses zweite Gewicht übertragen. Die gespannte Sehne überträgt ausgelöst ihre Energie der Lage dem Pfeile, der dadurch Energie der Bewegung erhält; ganz dasselbe findet statt bei der zusammengepreßten Luft einer Windbüchse, die ausgelöst das Geschoß forttreibt, beim Wasserdampf, der den Kolben der Dampfmaschine in Bewegung setzt. Jede Arbeitsleistung ist eine solche Energieübertragung von einem Körper auf einen andern.

159.

Umwandlung der Energieen beim vertikalen Wurfe. Für die Umwandlung der Energie der Bewegung in Energie der Lage und umgekehrt bildet der vertikale Wurf ein recht übersichtliches Beispiel.

Wir nehmen an, ein Körper vom Gewichte $P = 30$ kg erhalte eine vertikal aufwärts gerichtete Anfangsgeschwindigkeit $c = 60 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$ und werde nun der Wirkung der Schwerkraft überlassen; seine Geschwindigkeit beträgt also nach t Sekunden

$$v = c - g\,t,$$

und der von ihm zurückgelegte Weg ergibt sich aus der Formel

$$s = c\,t - \frac{1}{2}\,g\,t^2.$$

Vergl. § 115.

Setzen wir der Einfachheit der Rechnung wegen die Beschleunigung der Schwere rund $g = 10 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$, so ist die Masse des Körpers $m = \frac{P}{g} = 3$.

Beim Beginne der Bewegung besitzt der Körper die durch seine Wucht zu messende Energie der Bewegung

$$E_B = \frac{1}{2}\,m\,c^2 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 60^2 \text{ mkg} = 5400 \text{ mkg},$$

und ist zufolge derselben imstande Arbeit zu leisten, indem er sein eigenes Gewicht vertikal aufwärts bewegt.

Am Ende der ersten Sekunde ist der Körper auf die Höhe $h_1 = 55$ m gestiegen, seine Geschwindigkeit hat aber um $10 \frac{m}{sec}$ abgenommen und beträgt nur noch $v_1 = 50 \frac{m}{sec}$; jetzt beträgt also seine Energie der Bewegung nur noch

$$E_B = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 50^2 \, \text{mkg} = 3750 \, \text{mkg},$$

aber dafür hat der Körper eine Energie der Lage

$$E_L = P \cdot h = 30 \cdot 55 \, \text{mkg} = 1650 \, \text{mkg}.$$

Am Ende der zweiten Sekunde ist die Geschwindigkeit des Körpers $v_2 = 40 \frac{m}{sec}$ und seine Höhe $h_2 = 100$ m, deshalb seine Energie der Bewegung

$$E_B = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 40^2 \, \text{mkg} = 2400 \, \text{mkg}$$

und seine Energie der Lage

$$E_L = 30 \cdot 100 \, \text{mkg} = 3000 \, \text{mkg}.$$

Führt man die Rechnung weiter, so erhält man die in folgender Tabelle zusammengestellten Resultate:

t sec	$v \frac{m}{sec}$	h m	E_B mkg	E_L mkg
0	60	0	5400	0
1	50	55	3750	1650
2	40	100	2400	3000
3	30	135	1350	4050
4	20	160	600	4800
5	10	175	150	5250
6	0	180	0	5400
7	10	175	150	5250
8	20	160	600	4800
9	30	135	1350	4050
10	40	100	2400	3000
11	50	55	3750	1650
12	60	5	5400	0

Aus dieser Tabelle ersieht man, wie beim Steigen des Körpers die Energie der Bewegung immer kleiner, die Energie der Lage immer größer wird; umgekehrt wird, nachdem der Körper seine größte Höhe erreicht hat, wo seine Energie der

Bewegung 0 ist, beim nunmehrigen Fallen die Energie der Bewegung immer größer, die Energie der Lage immer kleiner, bis der Körper wieder auf dem Erdboden angelangt ist, wo die Energie der Lage 0 ist, die Energie der Bewegung aber wieder ihren ursprünglichen Wert hat, also hinreichen würde, ihn wieder auf genau dieselbe Höhe zu treiben.

Bei diesem Beispiel zeigt sich aber, daß die Totalenergie eines materiellen Punktes, der sich unter dem Einflusse der Schwere bewegt, also die Summe der Energie der Bewegung und der Energie der Lage, unverändert denselben Wert (in unserm Beispiel 5400 mkg) hat. Um ebensoviel, als die eine Art der Energie abnimmt, nimmt die andere Art der Energie zu.

Allgemein gilt unter Berücksichtigung der Formeln des § 115 während des Steigens eines vertikal geworfenen Körpers

h	v	E_B	E_L	$E_B + E_L$
0	c	$\frac{1}{2} m c^2$	0	$\frac{1}{2} m c^2$
h	$\sqrt{c^2 - 2gh}$	$\frac{1}{2} m (c^2 - 2gh)$	$P.h = mgh$	$\frac{1}{2} m c^2$
H	0	0	$P.H = mg.\frac{c^2}{2g}$	$\frac{1}{2} m c^2$

und während des Fallens

H	0	0	$P.H$	$P.H$
h	$\sqrt{2gh}$	$\frac{1}{2} m.2gh = P.h$	$P(H - h)$	$P.H$
0	$\sqrt{2gH}$	$\frac{1}{2} m.2gH = P.H$	0	$P.H$

160.

Das Prinzip der Erhaltung der Energie. Der im vorigen Paragraphen für die Bewegung eines materiellen Punktes unter dem Einflusse der Schwerkraft abgeleitete Satz, daß die in einem materiellen Punkte vorhandene Energie zwar umgewandelt werden und in anderer Form erscheinen kann, daß sie aber nicht verschwinden, nicht einmal verringert

werden kann, gilt nicht nur für die Wirkung der Schwerkraft, sondern für beliebig wirkende Kräfte.

Denken wir uns zunächst zwei materielle Punkte aufeinander wirkend, so folgt schon aus dem Gesetze der Wirkung und Gegenwirkung (§ 47), daß die von dem einen geleistete oder produzierte Arbeit genau so groß sein muß, wie die von dem andern in irgend einer Form konsumierte Arbeit, so lange die beiden Punkte keine Einwirkung von außen erfahren oder nach außen abgeben.

Stellen wir uns ein ganzes Massensystem vor, dessen einzelne Massen teils in Bewegung teils in Ruhe sind, so wird dieses Massensystem eine gewisse Energiemenge besitzen, die sich aus Energie der Bewegung und aus Energie der Lage zusammensetzt. Durch die gegenseitige Einwirkung der einzelnen Teile des Massensystems kann zwar eine andere Verteilung der Energiemenge und Umwandlung der einen Art in die andere stattfinden, so lange aber von außen her keine neue Arbeit produziert oder konsumiert wird, muß die gesamte Energie des Massensystems unverändert bleiben.

So ist dieses Prinzip der Erhaltung der Energie (Robert Mayer 1842, Helmholtz 1847) nicht nur der wichtigste Grundsatz der Mechanik, sondern der gesamten Physik überhaupt. In seiner Allgemeinheit sagt er aus, daß durch keinen physikalischen Vorgang die **Quantität** der Energie geändert werden kann, so mannigfache Änderungen auch ihre **Qualität** erleidet.

Freilich darf sich die Physik, um den Satz von der Erhaltung der Energie als allgemein giltig anzusehen, nicht nur auf die äußeren sichtbaren mechanischen Vorgänge beschränken, sondern muß auch die Bewegungen der Körpermoleküle und die dadurch entstehenden Energieformen als innere unsichtbare Energie in Betracht ziehen. Die moderne Physik faßt alle Naturvorgänge, wie Wärme, Schall, Licht, Magnetismus, Elektrizität, chemische Vorgänge, als besondere Arten der Energie auf, als Formen unsichtbarer physikalischer Energie im Gegensatz zur Energie der Bewegung und Energie der Lage sichtbarer Massen. Die Physik hat gezeigt, daß physikalische Energieformen in mechanische und mechanische in physikalische umgewandelt werden können; eine ihrer Hauptaufgaben ist, die verschiedenen Formen der Energie in bezug auf ihren Wert

miteinander zu vergleichen, sie also zu messen, d. h. ihre einander äquivalenten Mengen zu bestimmen.

Dabei hat sie den Satz von der Erhaltung der Energie als obersten Grundsatz aufgestellt und ihn zum Beweise noch zweifelhafter Fragen und zur Auffindung neuer Wahrheiten benutzt, ohne dabei jemals fehlgegangen zu sein, auch nicht bei solchen Fragen, wo Beobachtung und Experiment nicht mehr ausreichen.

Alle physikalischen Erscheinungen beruhen auf einer Umwandlung der verschiedenen Energieformen, ohne daß dabei der Gesamtwert der Energie eine Änderung erfährt. Daher kann man mit Clausius (1865) das Prinzip von der Erhaltung der Energie auch in dem Satze aussprechen:

Die Energie des Weltalls ist konstant.

161.

Aufgabe I. Eine Kruppsche 24 cm Kanone erteilt dem 215 kg schweren Geschosse die Anfangsgeschwindigkeit $v = 600 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; wie groß ist die Wucht des Geschosses?

Auflösung. Die Masse des Geschosses ist

$$m = \frac{215}{g},$$

folglich die gesuchte Wucht

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{215}{g} \cdot 600^2 \text{ mkg} = 3945000 \text{ mkg}.$$

Anm. Zum Vergleiche der zerstörenden Wirkungen berechne man die Wucht eines Eisenbahnzuges von 2500 dz Gewicht und 15 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit und die eines 10000 t wiegenden Panzerschiffes bei 10 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit.

(2867000 mkg; 50970000 mkg.)

Aufgabe II. Wieviel Arbeit ist nötig, um die Geschwindigkeit einer 54 t schweren Lokomotive von 6 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ auf 15 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ zu bringen, wenn von der Reibung abgesehen wird?

Auflösung. Da die Wucht der Lokomotive von

$$\frac{1}{2}\, m \cdot 6^2 \text{ auf } \frac{1}{2}\, m \cdot 15^2$$

gesteigert werden soll, beträgt die gesuchte Arbeit

$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{54\,000}{g} (15^2 - 6^2) \text{ mkg} = 520\,200 \text{ mkg}.$$

162.

Aufgabe. Wie weit fährt ein Eisenbahnzug von $P = 520$ t Gewicht und $v = 16 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit auf horizontaler Bahn nach Abstellung des Dampfes infolge seiner Wucht, bis er zur Ruhe kommt, wenn die Widerstände $^1/_{200}$ des Gewichtes betragen?

In welcher Zeit kommt er zum Stillstande?

Auflösung. Da $\frac{P}{g}$ die Masse des Zuges ist, so ist seine Wucht (Energie der Bewegung)

$$E_B = \frac{1}{2} \frac{P}{g} \cdot v^2 \text{ mkg};$$

der zu überwindende Widerstand ist an jedem Punkte seines Weges

$$k = \frac{P}{200} \text{ kg},$$

so daß sich der Weg s aus der Gleichung

$$\frac{P}{200} \cdot s = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2$$

zu

$$s = \frac{200}{2\,g} v^2 = \frac{100}{g} v^2$$

ergibt. Setzt man die gegebenen Werte ein, so erhält man

$$s = 2{,}610 \text{ km}.$$

Die gesuchte Zeit ergibt sich am einfachsten aus der Gleichung

$$s = \frac{1}{2} v \cdot t,$$

woraus $t = 326$ sec $= 5$ min 26 sec folgt.

163.

Aufgabe. Ein Eisenbahnzug von $P = 400$ t Gewicht soll die mittlere Geschwindigkeit $v = 12 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erhalten; welcher Effekt ist dazu nötig, und wie verhält sich dieser zu dem noch erforderlichen Effekte, wenn der Zug in den **Beharrungszustand** gekommen ist, falls dies nach $t = 1$ Min geschehen soll? Die Bewegungshindernisse betragen $^1/_{200}$ der Last.

Auflösung. Die antreibende Kraft hat zweierlei Arbeit zu leisten: den Widerstand zu überwinden und dem Zuge in der Zeit t die Geschwindigkeit v zu erteilen. — Da der in der Zeit t zurückgelegte Weg $s = \frac{1}{2} v \cdot t$ ist, so ist die zu leistende Arbeit

$$A = \frac{P}{200} \cdot \frac{1}{2} v \cdot t + \frac{1}{2} \frac{P}{g} v^2 = \frac{P \cdot v}{2} \left(\frac{t}{200} + \frac{v}{g}\right);$$

hieraus ergibt sich der gesuchte Effekt

$$E = \frac{A}{t} = \frac{P \cdot v}{2} \left(\frac{1}{200} + \frac{v}{g \cdot t}\right) \text{mkg}$$

oder

$$N = \frac{P \cdot v}{150} \left(\frac{1}{200} + \frac{v}{g \cdot t}\right) \text{PS}.$$

Setzt man die gegebenen Zahlenwerte ein $\left(g \backsim 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}\right)$, so erhält man

$$N = \frac{400000 \cdot 12}{150} \cdot \left(\frac{1}{200} + \frac{12}{10 \cdot 60}\right) \text{PS} = 800 \text{ PS}.$$

Der im Beharrungszustande erforderliche Effekt ist

$$E' = \frac{P}{200} \cdot v \text{ mkg oder } N' = \frac{P \cdot v}{200 \cdot 75} \text{ PS} = 320 \text{ PS},$$

so daß das gesuchte Verhältnis

$$N : N' = 5 : 2$$

ist.

164.

Aufgabe. Der 400 kg schwere Rammbär einer Kunstramme treibt aus der Höhe 4,4 m fallend einen Pfahl 8 cm in den Boden; wie groß ist der Widerstand des Bodens?

Auflösung. Da die Wucht des fallenden Rammklotzes gleich der Hubarbeit, also gleich 400 · 4,4 mkg ist, erhält man den gesuchten Widerstand aus der Gleichung

$$k \cdot 0{,}08 = 400 \cdot 4{,}40$$

woraus folgt

$$k = \frac{400 \cdot 440}{8} \text{ kg} = 22000 \text{ kg}.$$

Aufgaben.

141. Durch einen Kanal fließt in jeder Sekunde 2,5 cbm Wasser mit 2 m Geschwindigkeit; wie groß ist die Wucht des Wassers?
Antw.: 510 mkg.

142. Wieviel Arbeit hat ein bewegter Körper, dessen Gewicht 80 kg ist, geleistet, wenn seine Geschwindigkeit von 10 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ auf 5 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ abnahm?
Antw.: 305,8 mkg.

143. Wieviel von der Last betragen die Bewegungshindernisse, wenn ein Eisenbahnzug von 300 t Gewicht und 10 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit nach Abstellen des Dampfes noch 1500 m weit auf horizontaler Bahn fährt?
Antw.: Nahe $^1/_{300}$.

144. Welche Geschwindigkeit hat ein 1,5 kg schwerer Hammer, der einen Nagel in Holz, dessen Widerstandskraft 500 kg ist, durch einen Schlag 12 mm tief einschlägt?
Antw.: 8,86 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

145. Wie tief dringt eine Kanonenkugel von 24 kg Gewicht und 420 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit in einen Sandhaufen ein, der einen Widerstand von 300000 kg hat?
Antw.: 0,719 m.

146. Wieviel Wasser fließt in der Sekunde durch einen Kanal, wenn dasselbe bei 3 m Geschwindigkeit 800 mkg Energie der Bewegung besitzt?

Antw.: $\sim 1^3/_4$ cbm.

147. Eine Lokomotive von 50 t Gewicht und 20 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit soll auf 100 m zum Stillstande kommen; wie groß muß die Bremskraft sein? In welcher Zeit kommt die Lokomotive zur Ruhe?

Antw.: 10200 kg; 10 sec.

148. Wieviel Arbeit ist erforderlich, um die Geschwindigkeit eines 100 kg schweren Körpers von 3 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ auf 10 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ zu erhöhen?

Antw.: 464 mkg.

149. Welche Geschwindigkeit wird einem 4500 kg schweren Wagen durch die Arbeit $A = 1000$ mkg erteilt?

Antw.: $v = 2{,}09 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

150. Wie groß ist die Wucht eines vom Dache eines 16 m hohen Hauses herabfallenden Ziegelsteines von 1 kg Gewicht?

Antw.: 16 mkg.

165.

Kraftantrieb und Bewegungsgröße. Anstatt die Wirkung einer Kraft nach dem Wege zu beurteilen, den ihr Angriffspunkt zurücklegt, wie es durch die Arbeit einer Kraft geschieht, kann man die Wirkung auch nach der Zeit bemessen, während der die Kraft wirkt. In beiden Fällen besteht die Wirkung darin, daß einer Masse eine gewisse Geschwindigkeit erteilt wird. Die Beziehung, die zwischen den hierbei in Betracht kommenden Größen Kraft, Masse, Geschwindigkeit und Zeit besteht, wird durch die dynamische Grundgleichung

$$k = \frac{m\,v}{t}$$

gegeben; multipliziert man mit t, so ergibt sich die Gleichung

$$k \cdot t = m \cdot v.$$

Besaß der materielle Punkt vor der Einwirkung der Kraft bereits die Geschwindigkeit c, so lautet die Gleichung

$$k \cdot t = m\,v - m\,c.$$

Man nennt nun das Produkt $k \cdot t$ aus der Kraft und der Zeit, während der sie wirkt, den Antrieb oder Impuls der Kraft, das Produkt $m \cdot v$ aus der bewegten Masse und ihrer Geschwindigkeit die Bewegungsgröße (Quantität der Bewegung) oder das Bewegungsmoment der Masse.

Jene Gleichung sagt daher aus, daß die Bewegungsgröße eines sich bewegenden materiellen Punktes (genauer ihre Zunahme) gleich dem Antriebe der Kraft ist, die ihn in Bewegung gesetzt hat.

Umgekehrt kann jeder bewegte Körper vermöge seiner Bewegungsgröße auf einen andern Körper einen Kraftantrieb ausüben, der gleich seiner Bewegungsgröße ist.

Ist die Kraft k nicht konstant, sondern veränderlich, so zerlege man die Zeit in kleine Teilchen, während deren die Kraft als konstant angesehen werden kann, und summiere die Antriebe; die Summe der Elementarantriebe ist dann gleich dem Gesamtantriebe.

Von dem aufgestellten Satze wird namentlich in der Theorie des Stoßes Anwendung gemacht; er ist, wie aus seiner Ableitung hervorgeht, nur eine für manche Anwendungen bequeme Umformung (Aussprachsform) der dynamischen Grundgleichung.

Die Dimension der Bewegungsgröße und des Kraftantriebes muß natürlich dieselbe sein. Sie ist

im technischen Maßsysteme $K\,T$;
im absoluten $M\,L\,T^{-1}$.

166.

Aus dem Satze von der Gleichheit der Bewegungsgröße einer Masse und dem Kraftantriebe ergeben sich einige Folgerungen:

a) Wirken auf zwei verschiedene materielle Punkte gleiche Kraftantriebe ein, so sind auch die Bewegungsgrößen beider materiellen Punkte gleich, d. h. sind m_1 und m_2 ihre Massen, v_1 und v_2 die zugehörigen Geschwindigkeiten, so gilt

$$m_1 \cdot v_1 = m_2 \cdot v_2$$

oder

$$m_1 : m_2 = v_2 : v_1,$$

d. h. es verhalten sich die Geschwindigkeiten umgekehrt wie die bewegten Massen.

Wird z. B. aus einem Geschütze von der Masse m_1 ein Geschoß von der Masse m_2 abgefeuert, so wirkt der Druck der Pulvergase auf beide gleich stark und gleiche Zeit ein; daher sind die Bewegungsgrößen vom Geschütz und Geschoß gleich, aber die Geschwindigkeit des Geschosses ist eine viel größere als die des viel mehr Masse besitzenden rücklaufenden Geschützes.

b) Wirken zwei verschiedene Kräfte gleiche Zeit auf zwei verschiedene materielle Punkte ein, so verhalten sich die Kräfte wie die durch sie erzeugten Bewegungsgrößen.

So verhalten sich z. B. die Zugkräfte zweier Lokomotiven wie die Bewegungsgrößen, die sie an zwei Zügen in derselben Zeit, etwa in 1 Minute, erzeugen.

c) Soll ein bewegter Körper in einer gegebenen Zeit durch eine Kraft in den Zustand der Ruhe gebracht werden, so muß diese Kraft die Größe $k = \frac{m\,v}{t}$ haben; sie muß also um so größer sein, in je kürzerer Zeit der Ruhezustand erzeugt werden soll, und umgekehrt um so kleiner, je länger die zur Verfügung stehende Zeit ist.

167.

Aufgabe I. Wie groß muß die Kraft sein, die einer 35 t schweren Lokomotive in 40 sec die Geschwindigkeit $v = 12\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erteilt?

Auflösung. Die zu erzeugende Bewegungsgröße der Lokomotive ist

$$\frac{35000 \cdot 12}{g};$$

ihr ist der Kraftantrieb gleich, also besteht die Gleichung

$$k \cdot 40 = \frac{35000 \cdot 12}{g},$$

aus der

$$k = \frac{35000 \cdot 12}{g \cdot 40} \text{ kg} = 1071 \text{ kg}$$

folgt.

Aufgabe II. Das Verhältnis der Gewichte einer Kanone und ihres Geschosses ist 180 : 1; das Geschoß hat eine Geschwindigkeit von 450 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$; mit welcher Geschwindigkeit beginnt der Rücklauf der Kanone?

Auflösung. Da die Bewegungsgrößen beider Körper gleich groß sind, so verhalten sich ihre Geschwindigkeiten umgekehrt wie ihre Massen. Bezeichnet v die gesuchte Geschwindigkeit, so gilt also

$$180 : 1 = 450 : v,$$

woraus

$$v = 2{,}50 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

folgt.

Aufgaben.

151. In welcher Zeit erteilt eine Kraft von 100 kg einem 300 kg schweren Körper die Geschwindigkeit $v = 12 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$?

Antw.: $3^2/_3$ sec.

152. Wie groß muß die Kraft sein, die die Geschwindigkeit eines 2000 kg schweren Wagens in 20 sec um 1 m erhöht?

Antw.: 10,2 kg.

153. Aus einer Kanone, die $P = 560$ kg wiegt, wird eine Granate vom Gewichte $P' = 7$ kg abgeschossen; der Rücklauf der Kanone beginnt mit 4 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit; welche Geschwindigkeit hat das Geschoß?

Antw.: 320 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

154. Wie groß ist das Gewicht eines Körpers, der durch eine Kraft von 360 kg in 45 sec die Geschwindigkeit $v = 12 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erhält?

Antw.: 13240 kg.

155. Welche Geschwindigkeit erhält ein 30 kg schwerer Körper in 45 sec durch eine Kraft von 1 kg?

Antw.: 14,715 $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

Zwölftes Buch.

Zentralbewegung.

168.

Wirkt auf einen durch irgend eine Ursache in der Richtung AB in Bewegung gesetzten materiellen Punkt A eine stetige, beständig nach dem außerhalb der Bewegungsrichtung AB liegenden festen Punkte C gerichtete Kraft, so nennt man die dadurch entstehende Bewegung des materiellen Punktes Zentralbewegung. Der feste Punkt C heißt der Mittelpunkt der Bewegung; die beständig nach dem Punkte C wirkende Kraft heißt Zentripetalkraft; die Strecke CA, die den Mittelpunkt mit dem materiellen Punkte verbindet, heißt Leitstrahl oder Radiusvektor.

Um die Umstände der Zentralbewegung genauer zu untersuchen, betrachten wir die Bewegung während unendlich kleiner, gleicher Zeitteilchen und denken uns die anziehende Kraft im Anfange eines jeden solchen Zeitteilchens ruckweise wirkend, so daß sie dem materiellen Punkte eine Bewegung nach dem Mittelpunkte C hin erteilen würde.

Stellen AB und AD (Fig. 53) die Wege dar, die der materielle Punkt in dem ersten Zeitteilchen zufolge der ihm erteilten Anfangsgeschwindigkeit und der ihn nach C hin bewegenden Kraft ausführen würde, so beschreibt A in diesem Zeitteilchen die Diagonale AE des aus AB und AD gebildeten Parallelogramms. Wirkte jetzt die Zentripetalkraft nicht weiter auf ihn, so würde er im zweiten Zeitteilchen zufolge der Trägheit allein sich in

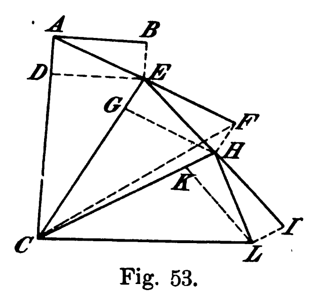


Fig. 53.

der durch die Anfangsrichtung AB und den Mittelpunkt C bestimmten Ebene und in der Richtung AE weiter um

$EF = AE$ bewegen; würde er aber infolge der im Anfange des zweiten Zeitteilchens wieder einwirkenden Zentripetalkraft allein im zweiten Zeitteilchen von E nach G bewegt, so beschreibt er infolge beider Bewegungen zugleich die Diagonale EH des aus EF und EG gebildeten Parallelogramms. Man übersieht leicht, wie die Bewegung weiter geht; im dritten Zeitteilchen würde er die Diagonale HL des aus $HI = EH$ und HK gebildeten Parallelogramms durchlaufen, usw.

Der Punkt A bewegt sich also auf der in der durch AB und C bestimmten Ebene liegenden gebrochenen Linie $AEHL\ldots$

Werden nun die Zeitteilchen immer kleiner und kleiner, so geht die ruckweise wirkende Anziehungskraft immer mehr in eine stetige über, auch die Richtungsänderungen der Bahn rücken immer näher aneinander und in dem Grenzfalle, bei dem die Zeitteilchen unendlich klein werden, wird die Anziehungskraft stetig und die Bahn eine Kurve.

Es ist also bei jeder Zentralbewegung die Bahn eine ebene Kurve, deren Ebene durch die Anfangsrichtung der Bewegung des materiellen Punktes und den Mittelpunkt der Zentripetalkraft bestimmt ist.

169.

Bei jeder Zentralbewegung beschreibt der Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume.

In dem ersten Zeitteilchen hat der Radiusvektor die Fläche des Dreiecks AEC beschrieben, im zweiten die Fläche des Dreiecks EHC. Nun ist, wenn man CF zieht, $\triangle AEC = \triangle EFC$, weil sie gleiche Grundlinien (AE und EF) und dieselbe Höhe (das von C auf AF gefällte Lot) haben; ferner ist $\triangle EFC = \triangle EHC$, weil ihre Spitzen F und H auf der zur gemeinsamen Grundlinie EC Parallelen FH liegen. Es ist also

$$\triangle AEC = \triangle EHC.$$

Ebenso zeigt man, daß $\triangle EHC = \triangle HLC$, usw. Da der Leitstrahl in den beiden unendlich kleinen, gleichen Zeitteilchen gleiche Flächenräume beschreibt, so beschreibt er

auch in gleichen Summen solcher kleinen Zeitteilchen, also in beliebig großen, aber gleichen Zeiten gleiche Flächenräume, oder die vom Leitstrahle beschriebene Fläche ist bei jeder Zentralbewegung der Zeit proportional, nach welchem Gesetze auch die Zentripetalkraft wirken möge. Bezeichnet F die Fläche, t die Zeit, so ist

$$F = f \cdot t,$$

wo f eine der betreffenden Zentralbewegung eigentümliche Konstante bezeichnet.

Anm. 1. Es sei noch hervorgehoben, daß der eben bewiesene Satz auch umgekehrt gilt und sich leicht beweisen läßt, daß nämlich jede Bewegung, bei der von dem von einem Punkte ausgehenden Leitstrahle in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschrieben werden, eine Zentralbewegung ist, bei der die Zentripetalkraft nach jenem Punkte gerichtet ist.

Anm. 2. Von dem Gesetze, nach dem die Anziehungskraft wirkt, hängt es ab, was für eine krumme Linie (ob Kreis, Parabel, Ellipse usw.) beschrieben wird. Ist die Anziehungskraft umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung des bewegten Punktes vom festen Mittelpunkte, so läßt sich durch die Infinitesimalrechnung zeigen, daß die Bahn nur ein Kegelschnitt und keine andere Kurve sein kann.

170.

Von den möglichen Zentralbewegungen betrachten wir nur den für die Theorie und für die Praxis sehr wichtigen speziellen Fall, daß die Bahn des materiellen Punktes ein Kreis um C als Mittelpunkt ist.

Da in diesem Falle die von dem Radiusvektor in gleichen Zeiten beschriebenen Kreissektoren nur dann gleich sind, wenn zu ihnen gleiche Bogen gehören, so muß die Bewegung auf der Peripherie des Kreises eine gleichförmige sein. Da ferner die Ablenkungen von der tangentialen Richtung in gleichen Zeiten dieselben sind, so muß die wirkende Zentripetalkraft konstant sein.

Unsere Aufgabe ist es nun, die Größe dieser Zentripetalkraft zu ermitteln; sie ist offenbar bestimmt durch den

Radius r des Kreises und die Geschwindigkeit v, mit der sich der materielle Punkt in der Kreisperipherie bewegt.

Da die Zentripetalkraft, die wir mit Z bezeichnen wollen, konstant ist, so würde sie, wenn sie allein wirkte, eine gleichförmig beschleunigte Bewegung des materiellen Punktes erzeugen. Können wir die Beschleunigung a dieser Bewegung angeben, so ist

$$Z = m \cdot a$$

das Maß für die Größe der Zentripetalkraft, wobei m die Masse des materiellen Punktes bedeutet.

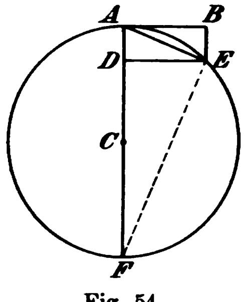


Fig. 54.

Wäre der materielle Punkt in A angekommen (Fig. 54) und hörte jetzt plötzlich die Wirkung der Zentripetalkraft auf, so würde der Punkt in der Richtung der Tangente in dem sehr kleinen Zeitteilchen τ den Weg $AB = v \cdot \tau$ zurücklegen. Soll der Punkt aber auf dem Kreise bleiben, so muß er durch die Zentripetalkraft in demselben Zeitteilchen τ um die Strecke AD zum Mittelpunkte hingezogen werden, so daß er durch die Zusammensetzung der beiden Bewegungen AB und AD wieder einen Punkt E des Kreises erreicht. Da a die durch die Zentripetalkraft erzeugte Beschleunigung ist, so ist

$$AD = \frac{1}{2} a \tau^2.$$

Je kleiner nun das Zeitteilchen τ gewählt wird, um so mehr fallen die Sehne AE und der Bogen AE und die Tangente AB zusammen, so daß man die eine Strecke für die andere setzen kann. Demnach ist

$$AB = \widehat{AE} = \overline{AE} = v \cdot \tau.$$

Verlängert man nun AC über C bis F und verbindet F mit E, so folgt aus dem bei E rechtwinkligen Dreieck die Gleichung

$$AE^2 = AD \cdot AF$$

oder

$$v^2 \cdot \tau^2 = \frac{1}{2} a \tau^2 \cdot 2r,$$

woraus

$$a = \frac{v^2}{r} \tag{1}$$

folgt. Diese Beschleunigung muß also die Zentripetalkraft dem materiellen Punkte erteilen, um ihn in der Kreisbahn zu erhalten. Setzt man diesen Wert von a in die Gleichung $Z = m \cdot a$ ein, so erhält man die Gleichung für die Größe der Zentripetalkraft

$$Z = \frac{m\, v^2}{r}. \tag{2}$$

Die zur Erhaltung der Kreisbahn nötige Zentripetalkraft ist also der Masse und dem Quadrate der Geschwindigkeit des materiellen Punktes direkt, dem Radius des Kreises umgekehrt proportional.

Führt man für die Umfangsgeschwindigkeit v die Winkelgeschwindigheit ω (vergl. § 16) ein, so nimmt die Formel (2), da v und ω durch die Gleichung

$$v = r \cdot \omega$$

verbunden sind, die Gestalt an

$$Z = m \cdot r \cdot \omega^2. \tag{3}$$

Bezeichnet ferner T die Umlaufszeit des Punktes A, so ist

$$v = \frac{2\,\pi\, r}{T},$$

und man erhält durch Einsetzen in (1) und (2) die neuen Gleichungen

$$a = \frac{4\,\pi^2\, r}{T^2} \tag{4}$$

$$Z = m \cdot \frac{4\,\pi^2\, r}{T^2}. \tag{5}$$

Ist endlich n, wie in der Technik gebräuchlich, die Bezeichnung für die Tourenzahl in der Minute, so ist $T = \frac{60}{n}$ und aus (5) wird die Gleichung

$$Z = m \cdot \frac{\pi^2\, r \cdot n^2}{900}. \tag{6}$$

171.

Zentrifugalkraft. Bei den meisten in der Natur vorkommenden kreisförmigen Bewegungen wird der bewegte Körper nicht durch eine Kraft, die im Zentrum des Kreises ihren Sitz hat, gezwungen, sich in kreisförmiger Bahn zu bewegen, sondern die Bewegung in der Kreisbahn wird durch einen Träger des bewegten Körpers veranlaßt.

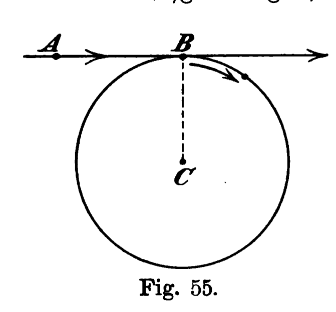


Fig. 55.

Um zu einer klaren Vorstellung und Auffassung der hierbei stattfindenden Vorgänge zu gelangen, nehmen wir an, es bewege sich aus irgend einer Ursache ein materieller Punkt mit der Masse m längs einer Geraden AB (Fig. 55) mit gleichförmiger Geschwindigkeit v. Kann nun der materielle Punkt, nachdem er in B angelangt ist, sich nicht weiter gleichförmig in der Richtung AB bewegen, sondern wird er gezwungen, wie z. B. eine Kugel in einer kreisförmigen Rinne, sich auf einem festen Kreise gleichförmig zu bewegen, der die Gerade AB in B berührt und dessen Mittelpunkt C sei, so muß der Grund für die Änderung seiner Bewegungsrichtung, da jede Änderung des Bewegungszustandes eines materiellen Punktes nur durch Kräfte erzeugt werden kann, in irgend einer Kraft gesucht werden, die von dem festen Kreise auf den bewegten Punkt ausgeübt wird. Nehmen wir zunächst an, der Punkt bewege sich auf der Innenseite des Kreises, so daß letzterer etwa wie ein gebogener Streifen aus festem Materiale der geradlinigen Fortsetzung der Bewegung des materiellen Punktes einen Widerstand entgegensetze, so muß die von dem Kreise wie ein Druck ausgeübte unbekannte Kraft genau gleich jeder andern Kraft sein, die die gleiche Änderung in der ursprünglichen Bewegung des materiellen Punktes erzeugen würde. Eine solche Kraft wäre aber, wie wir aus dem Vorhergehenden wissen, eine in C in der Richtung nach C wirkende Zentripetalkraft von der Größe $Z = \frac{m v^2}{r}$. Der vom Kreise an jeder Stelle auf den materiellen Punkt in der

Richtung nach dem Kreismittelpunkte ausgeübte Druck wird also ebenfalls die Größe $\frac{m\,v^2}{r}$ haben müssen.

Nach dem Gesetze der Wechselwirkung muß aber umgekehrt der materielle Punkt auf den Kreis an jeder Stelle einen gleich großen, entgegengesetzt gerichteten Druck ausüben. Diesen vom Zentrum des Kreises weggerichteten Druck nennt man die Schwungkraft oder Zentrifugalkraft des materiellen Punktes.

Bewegungsverhältnisse wie die eben geschilderten haben wir z. B. bei einem Eisenbahnwagen, der sich zunächst auf geradliniger Schiene bewegt und dann in eine Kurve übergeht. Der einer Zentripetalkraft gleiche Druck wird hier von den Schienen auf den Eisenbahnwagen ausgeübt, indem die Schienen die Bewegungsrichtung des Wagens ändern; der Wagen übt aber auf die Schienen den gleichen, nur entgegengesetzten Druck aus, wie man aus den Abnutzungen und Formveränderungen der Schienen direkt erkennen kann.

Genau dieselben Verhältnisse treten auf, wenn der materielle Punkt sich auf der Außenseite des Kreises bewegen würde, gleichsam als ob er von dem Kreise festgehalten würde, so daß der Kreis gewissermaßen einen Zug auf den materiellen Punkt ausübt Auch diese Kraft müßte gleich einer in C vorhandenen nach C gerichteten Zentripetalkraft von der Größe $Z = \frac{m\,v^2}{r}$ sein, weil diese genau dieselbe Bewegung des materiellen Punktes erzeugen würde. Jetzt würde der materielle Punkt seinerseits einen gleich großen nach außen gerichteten Zug ausüben; und dieser Zug ist jetzt die Zentrifugalkraft.

Solche Bewegungsverhältnisse haben wir, wenn eine schwere Kugel an einem an dem einen Ende befestigten festen Faden im Kreise herumgeschwungen wird. Die Befestigung des Fadens an dem einen Ende entspricht dann einer in dem Befestigungspunkte sitzenden Zentripetalkraft; die vorhandene Zentrifugalkraft zeigt sich in der Spannung des Fadens und kann von uns gefühlt werden, wenn wir das eine Fadenende in die Hand nehmen. Wird der Faden durch eine elastische Spiralfeder ersetzt, so zeigt sich der

von der Zentrifugalkraft ausgeübte Zug in einer Verlängerung der Feder, und durch diese Verlängerung läßt sich auch die Größe der Zentrifugalkraft messen.

172.

Wenn bei den im vorigen Paragraphen beschriebenen Bewegungsvorgängen plötzlich die Ursache wegfällt, die den bewegten materiellen Punkt zwingt, sich auf einem Kreise zu bewegen, so wird die Zentrifugalkraft sichtbar: denn der materielle Punkt verläßt dann sofort die kreisförmige Bahn und bewegt sich in der Richtung der augenblicklichen Kreistangente in gerader Linie weiter. Das geschieht, wenn z. B. im ersteren Falle der Kreis an einer Stelle eine Unterbrechung (Lücke) hat, im zweiten Falle, wenn der Faden plötzlich reißt.

Von den vielen und mannigfaltigen Erscheinungen, die auf der Zentrifugalkraft beruhen, seien nur einige erwähnt. Ein offenes Gefäß mit Wasser kann in einem vertikalen Kreise geschwungen werden, ohne daß ein Tropfen herausfällt; beim schnellen Fahren (Radfahren) oder Laufen im Kreise sind wir genötigt, den Oberkörper nach innen zu neigen, damit die Schwere der nach außen wirkenden Zentrifugalkraft das Gleichgewicht hält. Fährt ein Wagen rasch um eine Ecke, so kann er umfallen, und unachtsame Personen laufen Gefahr, hinauszufliegen; gegen diese Gefahr des Umstürzens schützt man sich bei Eisenbahnen durch die Erhöhung der äußern Schiene, während starke Krümmungen überhaupt vermieden werden müssen. Auf der Wirkung der Zentrifugalkraft beruht die früher als Kinderspielzeug benutzte, neuerdings auch im Zirkus als Sensationsnummer (looping the hoop) gezeigte Zentrifugalrutschbahn.

Die Bewegung, die durch die Zentrifugalkraft erzeugt wird, zeigt sich bei der Schleuder, wo sie den Stein in der Richtung der Tangente weiter treibt, beim Mühlsteine, wo sie das Korn von der Achse nach dem Rande hintreibt, beim Spritzen der Wagenräder und Schleifsteine.

In der Technik werden vielfache Anwendungen von ihr gemacht in den sogenannten Zentrifugalmaschinen (Zentrifugen) zur Gewinnung des Zuckers aus dem Rübensafte, zum

Trocknen von Wäsche und von Garnen, zur Reinigung von Kristallmassen in der Paraffinfabrikation, zum Trennen der Lohe von der Brühe in der Gerberei, zur Gewinnung des Rahms in der Milchwirtschaft, zur Gewinnung des Honigs (Honigschleuder) usw. usw.

Wegen einer Anzahl weiterer Erscheinungen müssen wir auf die in jedem Lehrbuche der Physik beschriebenen Versuche mit der Schwungmaschine verweisen.

173.

Auch bei einer freien Zentralbewegung einer Masse m um eine andere M (wie wir sie z. B. in der Bewegung des Mondes um die Erde haben) kann man von einer Zentrifugalkraft reden, freilich in einem etwas andern Sinne als das bisher geschehen ist. Die Zentripetalkraft ist hier die von M auf m ausgeübte Anziehungskraft. Nach dem Gesetze der Wechselwirkung der Kräfte stellt aber diese Anziehungskraft nur die eine der beiden auftretenden Kräfte dar; die andere ist die Anziehung, mit der die Masse m auf die Masse M wirkt und die der ersteren gleich ist; sie veranlaßt eine Beschleunigung der Masse M.

Häufig denkt man sich aber auch an der Masse m außer der Zentripetalkraft eine ihr gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete wirkend, und nennt sie Zentrifugalkraft. Der Vorteil dieser Fiktion beruht darin, daß dann Zentripetalkraft und Zentrifugalkraft im Gleichgewichte sind, und dadurch ein dynamisches Problem auf ein statisches zurückgeführt wird. Bei dieser Betrachtungsweise greifen beide Kräfte an der Masse m an, während bei der physikalisch wirklich existierenden Zentrifugalkraft beide Kräfte verschiedene Angriffspunkte haben.

174.

Einfluß der Rotation der Erde auf die Intensität der Schwerkraft und auf die Gestalt der Erde. Auch auf der Erdoberfläche zeigt sich wegen der Achsendrehung der Erde der Einfluß der Zentrifugalkraft in einer Verminderung der Schwerkraft. Ist A (Fig. 56) ein Punkt

des Äquators, so ist an ihm als Beschleunigung der Schwere durch Messungen gefunden worden $g_0 = 9{,}781 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ (vergl. § 352). Da sich aber die Erde in 24 Stunden Sternzeit = 86164 Sekunden mittlerer Zeit um ihre Achse dreht, so entsteht dadurch eine der Schwerkraft gerade entgegenwirkende Zentrifugalkraft, deren Beschleunigung aus $a = \frac{4 \pi^2 r}{T^2}$ gemessen wird, worin für den Erdradius $r = 6\,377\,400$ m zu setzen sind. Die Ausrechnung gibt

Fig. 56.

$$a = 0{,}03391 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2} \backsim 0{,}034 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

Vergleicht man diese Beschleunigung mit der der Schwere in A, so ergibt sich, daß die Zentrifugalkraft am Äquator nahe $^1/_{289}$ der Schwerkraft ist, und mithin auch das Gewicht der Körper um $^1/_{289}$ verringert. Ein Körper, der also unterm Äquator auf einer Federwage 288 kg wiegt, würde bei ruhender Erde 289 kg wiegen. Da $289 = 17^2$ ist, so folgt, daß, wenn die Erde sich 17 mal so schnell drehte (in $1^7/_{17}$ Stunden Sternzeit um die Achse), die Schwerkraft durch die Zentrifugalkraft gerade aufgehoben würde; alle Körper würden am Äquator kein Gewicht haben und, wenn sie nicht befestigt wären, in der Tangente davon fliegen.

Ist B ein Punkt der Erdoberfläche, dessen geographische Breite β ist, so beschreibt dieser bei der Achsendrehung der Erde einen Kreis mit dem Radius $r \cdot \cos \beta$; die Zentrifugalbeschleunigung in B ist also $a \cdot \cos \beta$, wenn a die am Äquator bedeutet. Zerlegt man diese in der Richtung $D\,B$ wirkende Beschleunigung in zwei Komponenten nach der Richtung $C\,B$ und nach der Tangente in B, so wirkt nur die erstere, deren Größe $a \cdot \cos^2 \beta$ ist, der in B in der Richtung $B\,C$ wirkenden Schwerkraft entgegen, so daß die Beschleunigung der Schwere in B nur um $a \cdot \cos^2 \beta$ vermindert wird.

Bezeichnet wie oben $g_0 = 9{,}781 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ die am Äquator vorhandene und gemessene Beschleunigung der Schwere,

so wäre am Äquator diese Beschleunigung bei ruhender Erde

$$g_0' = g_0 + a.$$

Da unter der Voraussetzung, daß die Erde eine homogene Kugel sei, g_0' an jeder Stelle der Erde denselben Wert hätte, so wäre die Beschleunigung der Schwere bei der sich drehenden Erde in der Breite β

$$\begin{aligned} g_\beta &= g_0 + a - a \cdot \cos^2 \beta \\ &= g_0 + a \cdot \sin^2 \beta = g_0 + 0{,}03391 \sin^2 \beta \\ &= g_0 (1 + 0{,}003436 \sin^2 \beta). \end{aligned}$$

Das ist nun aber mit der Wirklichkeit, wie sie genaue Beobachtungen ergeben haben, nicht übereinstimmend; vielmehr entspricht die Formel

$$g_\beta = g_0 + 0{,}0506 \sin^2 \beta = g_0 (1 + 0{,}005294 \sin^2 \beta)$$

den tatsächlichen Verhältnissen. Die Ursache dieser Abweichung ist in der Abplattung der Erde zu suchen. Ihr zufolge muß die Intensität der Schwere nach den Polen hin zunehmen, so daß die Zunahme nach den Polen zu größer sein muß, als die von uns nur aus der Zentrifugalkraft berechnete; und tatsächlich zeigt dies auch der aus den Beobachtungen gefundene Wert von g_β gegenüber dem von uns berechneten.

Auch die Abplattung der Erde läßt sich aus der Zentrifugalkraft schließen. Wird eine zäh-flüssige kugelförmige Masse (Plateaus Versuch: Ölkugel in Wasser-Weingeistmischung) in Drehung um eine Achse versetzt, so erfährt jeder Punkt derselben nach außen einen Zug, der sich am Äquator am meisten geltend macht; infolge des flüssigen Zustandes der Masse gibt diese dem Zuge nach und so verbreitert sich die Masse zufolge der Achsendrehung.

Nimmt man also einen früheren feurig-flüssigen Zustand der Erde an, so erklärt sich die Abplattung. Sie beträgt nach Bessel $^1/_{299}$, d. h. der Polardurchmesser der Erde ist um $^1/_{299}$ kleiner als der Äquatordurchmesser.

175.

Aufgabe. An den Enden einer gewichtslos gedachten, um eine durch C gehende Achse sich drehenden Stange be-

finden sich die Massen m_1 und m_2. Wie müssen sich diese in bezug auf ihre Entfernungen r_1 und r_2 von der Achse verhalten, damit diese durch die entgegengesetzten Zentrifugalkräfte keinen Druck erleidet (eine freie Achse wird)? (Fig. 57.)

Fig. 57.

Auflösung. Da die Umdrehungszeiten T für beide Massen gleich sind und die Zentrifugalkräfte gleich sein müssen, so hat man die Gleichung

$$m_1 \cdot \frac{4\pi^2 r_1}{T^2} = m_2 \cdot \frac{4\pi^2 r_2}{T^2}$$

und hieraus

$$m_1 \cdot r_1 = m_2 \cdot r_2$$

oder

$$m_1 : m_2 = r_2 : r_1,$$

d. h. die Massen müssen sich umgekehrt wie ihre Entfernungen von der Drehachse verhalten.

176.

Aufgabe I. Eine Stange von $r = 1{,}3$ m Länge, die ein Gewicht von $P = 3200$ kg tragen kann, ehe sie abreißt, dreht sich um das eine Ende in einem horizontalen Kreise. Am andern Ende ist ein Gewicht $Q = 20$ kg befestigt. Wie viele Touren kann diese Stange in der Minute machen, bevor sie durch die Zentrifugalkraft abgerissen wird?

Auflösung. Nach Formel (6) des § 170 beträgt, wenn n die Tourenzahl in der Minute bedeutet, die Zentrifugalkraft

$$Z = \frac{Q}{g} \cdot \frac{\pi^2 r \cdot n^2}{900},$$

und da diese nicht größer als P sein darf, so hat man die Gleichung

$$P = \frac{Q}{g} \cdot \frac{\pi^2 r \cdot n^2}{900},$$

aus der folgt

$$n = \sqrt{\frac{900\, P \cdot g}{Q \cdot \pi^2 \cdot r}} = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{P \cdot g}{Q \cdot r}} = \frac{120}{\pi} \sqrt{\frac{10\, g}{1{,}3}} = 331{,}8.$$

Aufgabe II. Mit welcher Kraft sucht sich das Gewicht $P = 1000$ kg, das sich an einer Stange von $r = 0{,}6$ m Länge um das andere Ende der Stange dreht, bei $n = 180$ Touren in der Minute vom Drehpunkte zu entfernen?

Auflösung. Die nämliche Formel (6) des § 170 gibt

$$Z = \frac{P}{g} \cdot \frac{\pi^2\, r \cdot n^2}{900} = \frac{1000\, \pi^2 \cdot 0{,}6 \cdot 180^2}{900\, g} \text{ kg} = 21\,730 \text{ kg}.$$

Man sieht hieraus, daß die Zentrifugalkraft die Festigkeit des Materials bedeutend in Anspruch nimmt. Eine Scheibe kann so schnell rotieren, daß sie in Stücke geht.

Aufgabe III. Mit welcher Geschwindigkeit müßte am Äquator in horizontaler Richtung eine Kugel abgeschossen werden, damit sie (ohne Luftwiderstand) nicht zu Boden fiele, sondern wie der Mond um die Erde kreiste?

Auflösung. In diesem Falle müßte das Gewicht der Kugel $P = m \cdot g$ gleich der Zentrifugalkraft $\frac{m \cdot v^2}{r}$ sein; aus der Gleichung

$$m \cdot g = \frac{m \cdot v^2}{r}$$

ergibt sich

$$v = \sqrt{g\, r} = \sqrt{9{,}781 \cdot 6377400}\ \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 7898\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

177.

Aufgabe. Um wieviel muß in einer horizontalen Eisenbahnkurve, deren Radius r ist, die äußere Schiene gegen die innere überhöht werden, damit sich bei einer bestimmten Geschwindigkeit v die Radflantschen an keine Schiene anlegen?

Auflösung. Da durch Erhöhung der äußeren Schiene der Wagen auf einer schiefen Ebene steht, so ist der Druck, mit der sich die Radflantschen an die innere Schiene anlegen, wenn m die Masse des Wagens ist,

$$m \cdot g \cdot \sin \alpha,$$

da $g \cdot \sin \alpha$ die Beschleunigung auf einer schiefen Ebene mit

dem Neigungswinkel α ist (§ 102). Bezeichnet nun s die Spurweite und h die Überhöhung der äußern Schiene, so ist (Fig. 58) $\sin\alpha = \frac{h}{s}$, also der Druck des Wagens auf die innere Schiene $m \cdot g \cdot \frac{h}{s}$. Zufolge der Zentrifugalkraft drücken aber die Radflantschen auf die äußere Schiene mit einer Kraft $\frac{m v^2}{r}$.

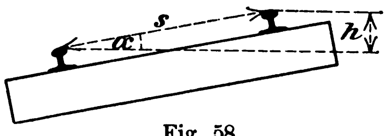


Fig. 58.

Beide Drucke müssen, damit sich die Radflantschen an keine Schiene anlegen, einander gleich sein, also muß sein

$$m \cdot g \cdot \frac{h}{s} = m \cdot \frac{v^2}{r},$$

woraus

$$h = \frac{v^2 \cdot s}{g \cdot r}$$

folgt.

Man erhält z. B. für die normale Spurweite $s = 1435$ mm, $r = 1000$ m und $v = 15 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ für die Überhöhung h den Wert

$$h = \frac{15^2 \cdot 1{,}435}{9{,}81 \cdot 1000} \text{ m} \sim 33 \text{ mm}.$$

Anm. Die Überhöhung kann in der Praxis jedesmal nur für eine ganz bestimmte Fahrgeschwindigkeit ausgeführt werden; ist die Fahrgeschwindigkeit größer, so legen sich die Räder an die äußeren Schienen an, bei kleinerer Fahrgeschwindigkeit aber an die inneren Schienen.

178.

Das Zentrifugalpendel. An einem als gewichtslos gedachten, in C befestigten Faden von der Länge l hänge eine kleine schwere Kugel (materieller Punkt). Denken wir uns diese Vorrichtung aus der Gleichgewichtslage CB (Fig. 59) in die Lage CA gebracht und dem materiellen Punkte senkrecht zur Ebene CBA etwa durch einen Stoß eine solche Geschwindigkeit v gegeben, daß er mit gleichförmiger Ge-

schwindigkeit den horizontalen Kreis mit dem Radius $BA = r$ beschreibt, so haben wir ein sogenanntes Zentrifugalpendel, das auch, weil der Faden CA eine Kegelfläche beschreibt, konisches Pendel genannt wird.

Wie groß muß die Geschwindigkeit v sein, und wie groß ist die Umlaufszeit T, d. h. die Zeit, in der der materielle Punkt die Kreisperipherie einmal durchläuft?

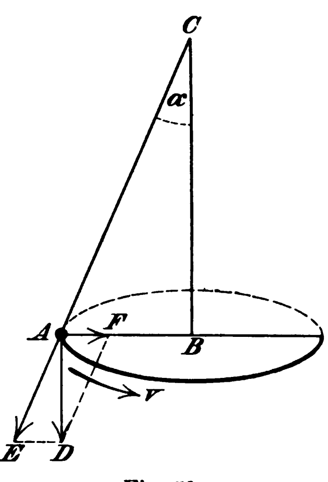


Fig. 59.

Zerlegen wir die auf den materiellen Punkt A wirkende Schwerkraft $AD = m \cdot g$ in zwei Komponenten, AE in der Richtung CA des Fadens und AF in der Richtung AB, so wird erstere durch den Widerstand des Fadens aufgehoben und gibt ihrerseits die Spannung S des Fadens an. Die letztere Komponente $AF = DE$ aber ist es, die den materiellen Punkt in der kreisförmigen Bahn erhält und deshalb gleich der dazu nötigen Zentripetalkraft $\frac{m\, v^2}{r}$ sein muß.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke CBA und ADE folgt aber

$$ED : DA = AB : BC$$

d. h., wenn die sogenannte Höhe des Zentrifugalpendels $CB = h$ gesetzt und für $ED = AF$ der Wert $\frac{m \cdot v^2}{r}$ eingeführt wird,

$$\frac{m \cdot v^2}{r} : m \cdot g = r : h,$$

woraus

$$v = r \sqrt{\frac{g}{h}} \tag{1}$$

folgt. Da nun die Umlaufszeit $T = \frac{2\pi r}{v}$ ist, so erhält man

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{h}{g}}. \tag{2}$$

Die Umlaufszeit ist also nur von h abhängig und nicht von der Länge l des Fadens, ist daher für verschiedene Längen des Fadens dieselbe, wenn nur h denselben Wert behält. Zugleich folgt, daß der Faden CA nie horizontal sein kann, da mit $h = 0$ auch $T = 0$ sein würde.

Speziell erhält man für

$$h = 1 \text{ m}; \quad T = 2{,}006 \text{ sec};$$
$$h = 0{,}1 \text{ m}; \quad T = 0{,}634 \text{ sec}.$$

Für die Spannung $S = AE$ des Fadens gibt das rechtwinklige Dreieck AED, in dem $\sphericalangle EAD = \alpha$ ist, den Wert

$$AE = \frac{AD}{\cos \alpha}$$

oder

$$S = \frac{m \cdot g}{\cos \alpha}. \tag{3}$$

179.

Der Zentrifugalregulator. Es stelle AX (Fig. 60) eine Drehungsachse, AB einen in einer Kurve gebogenen, mit der Achse in A fest verbundenen Draht vor, auf dem eine zentrisch durchbohrte Kugel P frei (ohne Reibung) beweglich sei. Diese Kugel stellen wir uns zunächst als materiellen Punkt vor.

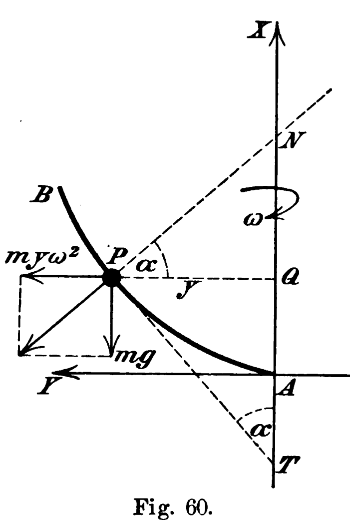


Fig. 60.

Im Zustande der Ruhe wird P infolge der Wirkung der Schwere an der Drehachse in A anliegen; sobald aber Rotation um AX stattfindet, wird die Kugel zufolge der bei der Rotation auftretenden Zentrifugalkraft auf der Zwangsführung AB in die Höhe von A weg sich bewegen. Nehmen wir nun an, daß für eine bestimmte Rotationsgeschwindigkeit die Kugel P an einer bestimmten Stelle in Ruhe bleibe. Wählen wir A als Anfang eines

rechtwinkligen Koordinatensystems und AX als Abszissenachse, so sind $AQ = x$ und $PQ = y$ die Koordinaten von P.

Soll P der Ruhepunkt sein, so muß die Resultante der auf P wirkenden Kräfte in P senkrecht auf der Kurve AB stehen, und nur als Druck oder Zug auf die feste Kurve wirken. Die in P angreifenden Kräfte sind die Schwere $m \cdot g$ und die (gedachte) Zentrifugalkraft $m \cdot y \cdot \omega^2$, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit der Rotation ist. Konstruieren wir nun in P an die Kurve AB die Tangente PT, bezeichnen mit α den Winkel dieser Tangente gegen die X-Achse, so bildet auch die Normale PN mit y den Winkel α, und es muß, damit die Resultante der in P angreifenden Kräfte in die Richtung der Normalen PN fällt,

$$tg\,\alpha = \frac{m \cdot g}{m \cdot y \cdot \omega^2},$$

oder

$$y \cdot tg\,\alpha = \frac{g}{\omega^2}$$

sein.

Da nun $y \cdot tg\,\alpha = QN$, gleich der Subnormale des Punktes P ist, so wird die Kugel P an allen denjenigen Punkten der Kurve AB in Ruhe, im Gleichgewichte sein, für die die Subnormale den Wert $\frac{g}{\omega^2}$ hat.

Nun hat die Parabel die Eigenschaft, daß bei ihr die Subnormale für jeden Punkt konstant, gleich dem Halbparameter p ist (höhere Geometrie § 46); gibt man daher dem Drahte AB die Form der Parabel, deren Gleichung

$$y^2 = \frac{2g}{\omega^2}\,x$$

ist, so ist auf ihr die Kugel P in jeder Lage im Gleichgewichte, sobald die Winkelgeschwindigkeit der Rotation gerade die Größe ω hat.

Sollen z. B. in der Minute n Touren gemacht werden, so ist $\omega = 0{,}105\,n$ (§ 16) und

$$2p = \frac{2g}{0{,}105^2 \cdot n^2} = \frac{1779{,}6}{n^2}$$

zu nehmen.

Ist dagegen die Rotationsgeschwindigkeit von der ganz bestimmten ω verschieden, so ist die Kugel an keiner Stelle im Gleichgewicht; ist die Winkelgeschwindigkeit größer als ω, so wird P steigen, ist sie kleiner als ω, so wird P sinken.

Verbindet man nun eine auf diese Weise für eine bestimmte Geschwindigkeit konstruierte Parabel mit einer vertikalen Welle, die von einer Dampfmaschine in Umdrehungen versetzt ist, und verbindet zugleich die Kugel mit der Dampfzuführung derart, daß bei zu schnellem Gange der Welle die steigende Kugel ein Schließen, bei zu langsamem Gange die sinkende Kugel ein Öffnen der Dampfzuführung herbeiführt, so kann diese Vorrichtung gebraucht werden, um den Gang der Maschine zu regeln.

Eine solche Vorrichtung ist der in Fig. 61 skizzierte Zentrifugalregulator (auch Schwungkugelregulator genannt) mit gekreuzten Armen, dessen Wirkungsweise als bekannt vorausgesetzt werden kann, da es sich hier nur um die Berechnung der Dimensionen handelt.

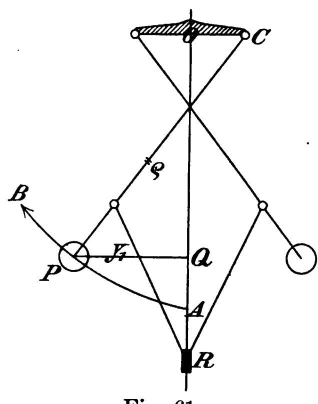


Fig. 61.

Da die Kugel P nur einen kleinen Bogen beschreibt, so tritt an Stelle des Parabelbogens (für die Praxis völlig ausreichend) der Bogen des Krümmungskreises der Parabel an der betreffenden Stelle; und anstatt die Kugel auf dem Drahte $A\,B$ gehen zu lassen, befestigt man sie an einer leichten Stange, die um den Mittelpunkt C des Krümmungskreises drehbar ist.

Um einen solchen Regulator für einen bestimmten Fall zu konstruieren, müssen gegeben sein

1. ω, die Winkelgeschwindigkeit, die die Welle bei normalem Gange haben soll;

2. y_1, ein mittlerer Abstand der Kugel von der Welle, der ganz beliebig je nach der Stärke der Welle und der Größe der Kugeln gewählt werden kann.

Zu berechnen sind $PC = \varrho$ und $OC = e$ (Fig. 62).

Für die Parabel ist der Winkel α, den die Tangente mit der Achse bildet, durch die Gleichung

$$tg\,\alpha = \frac{p}{y_1} = \frac{g}{\omega^2 \cdot y_1}$$

bestimmt.

Der Krümmungsradius im Punkte (x_1, y_1) hat den Wert

$$PC = \varrho = \frac{p}{sin^3\,\alpha} = \frac{g}{\omega^2 \cdot sin^3\,\alpha};$$

endlich folgt aus Dreieck PCD

$$e = OC = DQ = \varrho \cdot cos\,\alpha - y_1.$$

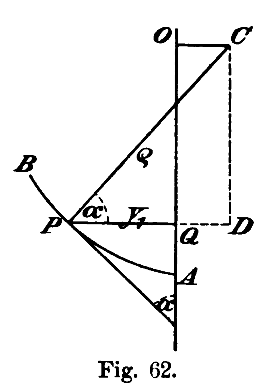


Fig. 62.

Soll z. B. die Welle $n = 35$ Umdrehungen in der Minute machen und $y_1 = 40$ cm sein, so erhält man

$$\omega = 0{,}105 \cdot 35 = 3{,}675;$$

$$tg\,\alpha = \frac{9{,}81}{3{,}675^2 \cdot 0{,}4};$$

woraus $\alpha = 61^0\,10'$ und

$$\varrho = 1{,}080 \text{ m};$$
$$e = 0{,}122 \text{ m}.$$

180.

Anwendung der Gesetze der Zentralbewegung auf die Mondbewegung. Zu den freien Zentralbewegungen gehört die des Mondes um die Erde. Der Mond bewegt sich in einer nahezu kreisförmigen Bahn in der mittleren Entfernung von 60,27 Erdradien zu 6377400 m in 27,32 Tagen um die Erde; danach ist die Beschleunigung der von der Erde auf den Mond ausgeübten Zentralkraft

$$a = \frac{4\,\pi^2\,r}{T^2} = \frac{4\,\pi^2 \cdot 60{,}27 \cdot 6377400}{(27{,}32 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60)^2}\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2} = 0{,}0027235\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}.$$

Die durch die Anziehungskraft der Erde bewirkte Beschleunigung eines materiellen Punktes auf ihrer Oberfläche ist $g = 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$. Die Vergleichung der beiden Beschleunigungen gibt

$$a : g = 0{,}0027235 : 9{,}81 = 1 : 3602.$$

Bezeichnet aber r den Erdhalbmesser, ϱ den Halbmesser der Mondbahn, so ist

$$r^2 : \varrho^2 = 1 : 60{,}27^2 = 1 : 3632{,}4,$$

d. h. es gilt mit großer Annäherung

$$a : g = r^2 : \varrho^2 = \frac{1}{\varrho^2} : \frac{1}{r^2}.$$

Nachdem Newton durch diese Rechnung nachgewiesen hatte, daß die Anziehungskraft der Erde, die wir als die irdische Schwere kennen, es auch ist, die den Mond in seiner Bahn festhält, unter der Annahme, daß diese Anziehung umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung vom Mittelpunkte der Erde ist, stellte er im Jahre 1686 hypothetisch das nach ihm benannte Newtonsche Gravitationsgesetz auf und suchte die weiteren Konsequenzen dieses Gesetzes auf.

Dieses Gravitationsgesetz lautet, daß die gegenseitige Anziehung zweier Körper direkt proportional dem Produkte ihrer Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate ihrer Entfernung ist, in Zeichen

$$k = \gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

wo m_1 und m_2 die Massen der Körper, r ihre Entfernung und γ eine Konstante, die sogenannte Gravitationskonstante ist.

Durch die Ausbildung dieser Theorie der Zentralbewegung erwarb sich Newton seine Unsterblichkeit und wurde der Begründer der physischen Astronomie oder, wie Laplace sie nennt, der Mechanik des Himmels (mécanique céleste), die allerdings nur ein großes Problem der allgemeinen Mechanik ist.

181.

Nach diesem Gravitationsgesetze ist der Wert g der Beschleunigung der Schwere nur für solche Punkte der Erdoberfläche gleich, die gleiche Entfernung vom Erdmittelpunkte haben, d. h. die im Meeresniveau liegen, wenn die Erde als vollkommene Kugel betrachtet wird; dagegen muß die Beschleunigung für Punkte in verschiedenen Höhen über dem Meeresspiegel verschieden sein.

Bezeichnet g die Beschleunigung der Schwere für eine Stelle im Meeresniveau, g_h die Beschleunigung in der Erhebung h m über dem Meeresspiegel, so gilt bei gleicher geographischer Breite

$$g : g_h = (r + h)^2 : r^2,$$

woraus

$$(1) \qquad g_h = \frac{r^2}{(r + h)^2} \cdot g$$

folgt. Führt man die Division aus und vernachlässigt die Glieder, die h^2, h^3, ... enthalten, die wegen der Kleinheit von h gegen r erst recht klein sind, so erhält man die für jede Praxis hinreichend genaue Formel

$$(2) \qquad g_h = \left(1 - \frac{2\,h}{r}\right) \cdot g = (1 - 0{,}0000003136\,h) \cdot g.$$

182.

Keplers Gesetze. Aus dem hypothetisch aufgestellten Gravitationsgesetze gelang es nun Newton die Gesetze abzuleiten, die Kepler als Erfahrungstatsachen aus seinen und Tycho de Brahes Beobachtungen der Planetenbewegungen für letztere aufgestellt hatte, und die da lauten:

I. die Planeten bewegen sich in Ellipsen, in deren einem Brennpunkte die Sonne steht;

II. der Radiusvektor einer jeden Planetenbahn überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (Sektoren);

III. die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten verhalten sich wie die Kuben ihrer mittleren Entfernungen von der Sonne.

Wir müssen es uns versagen, auf diese Ableitung an dieser Stelle weiter einzugehen oder auch nur die Folgerungen zu erwähnen, die daraus auf die Masse der Sonne und der Planeten u. dergl. m. gezogen worden sind. Erwähnt sei einzig die großartige Bestätigung, die das Newtonsche Gesetz durch die Entdeckung des Planeten Neptun gefunden hat, die mit Recht als einer der glänzendsten Triumphe der Wissenschaft gefeiert wird. Gelang es doch Leverrier aus den Störungen des Uranus durch Berechnungen, denen das Newtonsche Gesetz zu Grunde liegt, die von Mädler ausgesprochene Hoffnung, „daß die Analysis einst

diesen höchsten ihrer Triumphe feiern und durch ihr geistiges Auge Entdeckungen in Regionen machen werde, in die das körperliche bis dahin einzudringen nicht vermochte", zu verwirklichen. Gall, Observator an der Berliner Sternwarte, fand in der Nacht vom 23. zum 24. Septbr. 1846 den Neptun an der von Leverrier bezeichneten Stelle und stellte in der folgenden Nacht seine planetarische Natur fest.

Aufgaben.

156. Welche Beschleunigung muß eine Zentripetalkraft einem materiellen Punkte erteilen, der sich mit der Geschwindigkeit $v = 14 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ auf einem Kreise, dessen Radius $r = 10$ m ist, bewegen soll?

Antw.: $a = \frac{v^2}{r} = 19{,}6 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

157. Wie groß ist die Zentrifugalbeschleunigung eines Punktes am Rande eines Schwungrades von $d = 3000$ mm Durchmesser, das in $t = 3$ sec $n = 8$ Umdrehungen macht?

Antw.: $a = \frac{2\,\pi^2 . d . n^2}{1000 . t^2} = 421{,}1 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

158. Eine Bleikugel von $P = 20$ g Gewicht wird in je $1/2$ sec an einem $r = 85$ cm langen Faden einmal im Kreise geschwungen; wie groß ist ihre Zentrifugalkraft?

Antw.: $Z = \frac{P}{g} . \frac{4\,\pi^2 . r}{T^2} = 273{,}650$ g.

159. Wie groß müßte der Radius r einer vertikalen Zentrifugalbahn sein, damit ein Körper vom Gewichte $P = 100$ kg die Bahn mit $v = 6{,}5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit durchläuft, ohne an der höchsten Stelle herabzufallen?

Antw.: $r = \frac{v^2}{g} = 4{,}307$ m.

160. An einem Faden von 1 m Länge, der ein Gewicht von höchstens $P = 30$ kg tragen kann, wird eine Kugel im Kreise in der Minute $n = 120$ mal herumgeschwungen; wie groß kann das Gewicht der Kugel sein, ohne daß ein Zerreißen des Fadens eintritt?

Antw.: $Q = \frac{900\,P . g}{\pi^2\,r . n^2} = 1{,}864$ kg.

161. Eine vertikale Welle macht in einer Minute $n = 90$ Umdrehungen; an derselben hängt an einer $l = 0{,}75$ m langen Schnur eine

Kugel vom Gewichte $P = 50$ kg; welchen Winkel bildet die Schnur mit der Welle, und welche Spannung erleidet die Schnur?

Antw.: $\cos\alpha = \frac{g}{l} \cdot \left(\frac{30}{n\pi}\right)^2$; $\alpha \backsim 81^0\,30'$;

$$S = \frac{P}{\cos\alpha} = 339{,}5 \text{ kg}.$$

162. Wie groß muß die Geschwindigkeit v eines $P = 3$ kg schweren Körpers sein, der sich in einem Kreise mit dem Radius $r = 2$ m bewegt, wenn die Zentrifugalkraft $Z = 5$ kg ist?

Antw.: $v = \sqrt{\frac{Z \cdot g \cdot r}{P}} = 5{,}718 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

163. An den Enden einer $l = 45$ cm langen Stange sind zwei Messingkugeln von $P_1 = 12$ g und $P_2 = 15$ kg befestigt; die Stange soll horizontal gedreht werden, so daß die Kugeln bei der Drehung im Gleichgewichte sind; wo ist der Drehpunkt zu wählen?

Antw.: In der Entfernung 25 cm von der Kugel P_1.

164. Wie groß ist die Umlaufszeit eines Zentrifugalpendels, das an einem $l = 1{,}25$ m langen Faden hängt und einen Kreis mit dem Radius $r = 0{,}40$ m beschreibt?

Antw.: $T = 2\pi \frac{\sqrt[4]{l^2 - r^2}}{\sqrt{g}} = 2{,}19$ sec.

165. Mit welcher Maximalgeschwindigkeit darf ein Zug eine Kurve einer normalspurigen Gebirgsbahn ($s = 1435$ mm) durchfahren, wenn die Krümmung der Kurve $r = 300$ m ist, und die Überhöhung der äußern Schiene $h = 145$ mm beträgt?

Antw.: $v = \sqrt{\frac{g \cdot h \cdot r}{s}} = 17{,}25 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

166. Wie groß ist die Beschleunigung der Schwere in Berlin, dessen geographische Breite $\beta = 52^0\,30'$ ist?

Antw.: $9{,}813 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

167. Wie groß ist die Intensität der Schwere auf dem $h \backsim 1000$ m hohen Brocken, wenn sie im Meeresniveau in gleicher Breite $g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ beträgt?

Um den wievielten Teil wird also ein Gewicht leichter, wenn es vom Meeresniveau auf den Brocken gebracht wird?

Antw.: $g_h = 9{,}807 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$; um $\frac{1}{3270}$.

Dreizehntes Buch.

Die harmonische Schwingungsbewegung.

183.

Wird ein materieller Punkt aus seiner Ruhelage A durch einen Stoß in der Richtung AB entfernt, und wird durch diese Verschiebung eine Gegenkraft erregt, die den materiellen Punkt nach seiner Ruhelage zurückzieht, so entsteht eine schwingende Bewegung des materiellen Punktes.

Zunächst nämlich wirkt die anziehende Gegenkraft der dem materiellen Punkte erteilten Bewegung entgegen: der materielle Punkt bewegt sich mit abnehmender Geschwindigkeit, bis diese etwa in B zu Null geworden ist. Da aber die anziehende Gegenkraft weiter wirkt, so kehrt der materielle Punkt mit beschleunigter Bewegung in die Ruhelage A zurück und erhält dadurch eine Energie der Bewegung, die ihn über seine Ruhelage hinausbewegt und zwar mit derselben Geschwindigkeit, die ihm anfangs erteilt worden war. Da aber jetzt wieder die Gegenkraft auftritt, so nimmt die Geschwindigkeit des materiellen Punktes wieder ab, bis sie in C zu Null wird, wobei $AC = AB$ ist. In C kehrt der materielle Punkt wieder um, und nun wiederholt sich derselbe Bewegungsvorgang wie vorher, nur in umgekehrter Richtung. So wird sich der materielle Punkt fortwährend zwischen B und C hin- und herbewegen, wenn nicht Hindernisse die Bewegung hemmen.

184.

Eine solche hin- und hergehende Bewegung eines materiellen Punktes um seine Ruhelage heißt, wie schon gesagt, eine Schwingungsbewegung. Unter einer ganzen Schwingung versteht man den Bewegungsvorgang, der stattfindet, wenn sich der materielle Punkt von seiner Anfangslage A nach B, von B nach C und von C wieder nach A bewegt. Die Zeit, die der materielle Punkt zur Ausführung einer solchen ganzen Schwingung braucht, heißt die Schwingungszeit und werde im folgenden mit T bezeichnet. Den Abstand der äußersten Punkte der Bahn von der Ruhe-

lage, also die Länge AB oder AC, nennt man die **Schwingungsweite** oder **Schwingungsamplitude**, den jeweiligen Abstand des schwingenden Punktes von der Ruhelage seine **Elongation**; endlich nennt man **Schwingungsphase** den jeweiligen Bewegungszustand des materiellen Punktes, d. h. die Größe und Richtung seiner Geschwindigkeit und seinen Abstand von der Ruhelage.

Die Aufgabe besteht nun darin, die Schwingungsphase des materiellen Punktes zu jeder beliebigen Zeit t zu bestimmen.

185.

Diese Aufgabe läßt sich in dem Falle auf elementarem Wege lösen, wenn die Beschleunigung der durch die Verschiebung des materiellen Punktes hervorgerufenen Gegenkraft dem Abstande des materiellen Punktes von der Ruhelage proportional ist.

Die in diesem Falle entstehende Schwingung heißt **harmonische Schwingung** oder, wegen der sich ergebenden Resultate, auch **Sinusschwingung**.

Wird (Fig. 63) AB mit r, AX mit x bezeichnet und die Richtung AB als positive gewählt, bezeichnet ferner p die Beschleunigung, die durch die hervorgerufene Gegenkraft an der Masseneinheit in der Entfernung 1 erzeugt wird, so ist die Kraft, die auf den schwingenden materiellen Punkt mit der Masse m wirkt, wenn er in B ist, $-mpr$ und $-mpx$, wenn er in X ist. Der Kraft ist das negative Zeichen zu geben, weil ihre Richtung entgegengesetzt der Richtung ist, nach der sich der materielle Punkt aus der Ruhelage entfernt.

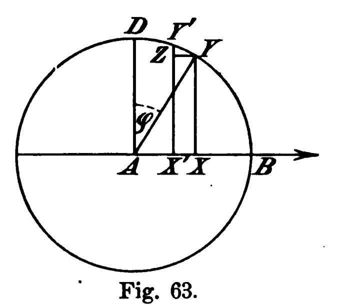


Fig. 63.

Wird nun durch die Kraft der materielle Punkt von B nach X gebracht, so ist die dabei geleistete Arbeit, da die Kraft proportional der Entfernung wächst,

$$\frac{1}{2}(-mpr - mpx)\cdot(-(r-x)) = \frac{m}{2}\cdot p\,(r^2 - x^2).$$

(Der Weg von B nach X ist nämlich negativ zu nehmen.) Diese Arbeit muß aber gleich der Wucht sein, die der materielle Punkt in X besitzt; bezeichnet daher v seine Geschwindigkeit in X, so besteht die Gleichung

$$\frac{m}{2} \cdot p\,(r^2 - x^2) = \frac{1}{2}\,m \cdot v^2,$$

aus der

$$v = \sqrt{p\,(r^2 - x^2)} = \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \sqrt{p}$$

folgt.

Schlägt man nun über $B\,C$ den Halbkreis und errichtet in X das Lot $X\,Y$, so ist $X\,Y = \sqrt{r^2 - x^2}$, oder, wenn man den Winkel $D\,A\,Y = \varphi$ setzt, $[D\,A \perp B\,C]$

$$A\,X = r \cdot \sin\varphi; \quad X\,Y = r \cdot \cos\varphi,$$

so daß man die beiden Gleichungen hat

$$x = r \cdot \sin\varphi; \tag{1}$$

$$v = r \cdot \cos\varphi \cdot \sqrt{p}. \tag{2}$$

Ist nun $X\,X'$ ein unendlich kleines Wegestück, τ die zum Durchlaufen dieses Weges erforderliche Zeit, so kann während derselben v als konstant angesehen werden, und es ist

$$v \cdot \tau = X\,X' = Y\,Z = Y\,Y' \cdot \cos\varphi,$$

woraus unter Berücksichtigung von (2) folgt

$$\tau = \frac{Y\,Y'}{r\sqrt{p}},$$

worin $Y\,Y'$ auch den Bogen statt der Sehne bedeuten kann.

Die zuletzt gefundene Formel sagt nun aus, daß die Zeit proportional dem Bogen $Y\,Y'$ ist, dessen Projektion XX' ist. Wenn daher ein fingierter Punkt sich mit der konstanten Geschwindigkeit $r \cdot \sqrt{p}$ auf der Peripherie des Kreises über $B\,C$ bewegt, so ist der schwingende materielle Punkt in jedem Augenblicke die Projektion dieses Punktes. Da nun der materielle Punkt in der Zeit $\frac{1}{2}\,T$ den Weg $B\,C$, der fingierte auf der Kreisperipherie den Weg $\pi\,r$ zurücklegt, so gilt die Gleichung

$$r\sqrt{p} \cdot \frac{1}{2}\,T = \pi\,r,$$

aus der

$$(3) \qquad T = 2\,\pi \cdot \sqrt{\frac{1}{p}}$$

folgt. Diese Formel lehrt, daß die Schwingungszeit unabhängig von der Amplitude ist.

186.

Bezeichnet nun t die Zeit, in der der fingierte Punkt auf der Kreisperipherie den Weg YD zurücklegt, so ist

$$YD = \frac{2\,\pi\,r \cdot t}{T},$$

während auch

$$YD = \pi\,r \cdot \frac{\varphi}{180}$$

ist. Daraus folgt

$$\varphi = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{2\,\pi\,t}{T}$$

oder in analytischem Maß (Bogenmaß) (§ 16, Anm. 1)

$$\varphi = \frac{2\,\pi\,t}{T}.$$

Nunmehr erhält man durch Einsetzen dieses Wertes in (1) und (2)

$$(4) \qquad x = r \cdot sin\,\frac{2\,\pi\,t}{T}$$

$$(5) \qquad v = r \cdot \frac{2\,\pi}{T} \cdot cos\,\frac{2\,\pi\,t}{T},$$

wozu noch für die Beschleunigung $a = -\,p\,x$ aus (3) und (4) kommt

$$(6) \qquad a = -\,r \cdot \frac{4\,\pi^2}{T^2} \cdot sin\,\frac{2\,\pi\,t}{T}.$$

Durch die Gleichungen (4), (5) und (6) ist nunmehr die eingangs gestellte Aufgabe gelöst.

187.

Um ein Bild von der Schwingungsbewegung des materiellen Punktes zu haben, geben wir t der Reihe nach die Werte

$$t = 0;\ t = \frac{1}{12}\,T;\quad t = \frac{2}{12}\,T;\ \ldots\ t = T.$$

Bezeichnen wir die Anfangsgeschwindigkeit oder die Geschwindigkeit in der Ruhelage mit v_0, so erhalten wir

folgende beliebig weit fortzusetzende Tabelle für die zusammengehörenden Werte von t, x und v:

$t =$	0	$\frac{1}{12}T$	$\frac{1}{6}T$	$\frac{1}{4}T$	$\frac{1}{3}T$	$\frac{5}{12}T$	$\frac{1}{2}T$
$=$	0	$\frac{1}{2}r$	$\frac{1}{2}r\sqrt{3}$	r	$\frac{1}{2}r\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}r$	0
$v =$	v_0	$\frac{v_0}{2}\sqrt{3}$	$\frac{v_0}{2}$	0	$-\frac{v_0}{2}$	$-\frac{v_0}{2}\sqrt{3}$	$-v_0$

$\frac{7}{12}T$	$\frac{2}{3}T$	$\frac{3}{4}T$	$\frac{5}{6}T$	$\frac{11}{12}T$	T
$-\frac{1}{2}r$	$-\frac{1}{2}r\sqrt{3}$	$-r$	$-\frac{1}{2}r\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}r$	0
$-\frac{v_0}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{v_0}{2}$	0	$\frac{v_0}{2}$	$\frac{v_0}{2}\sqrt{3}$	v_0

Auch läßt sich für die Elongationen des Punktes zu den verschiedenen Zeiten eine graphische Darstellung der zweiten Zeile dieser Tabelle in folgender Weise geben:

Beschreibt man nämlich einen Kreis (Fig. 64) mit dem Radius r, teilt seine Peripherie in 12 gleiche Teile und pro-

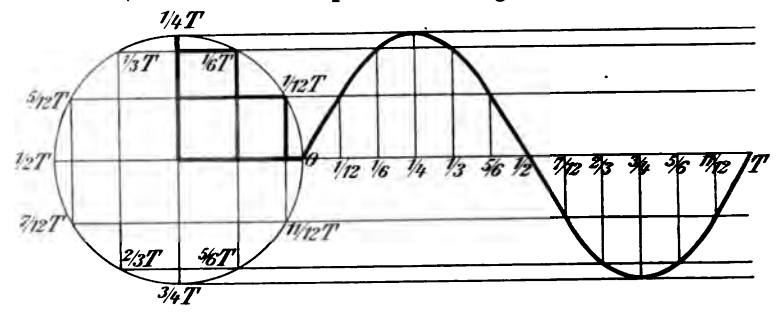


Fig. 64.

jiziert die Teilpunkte auf zwei senkrechte Durchmesser, so geben die senkrechten Projektionslinien die Elongationen an, während die wagerechten darstellen, wie sich die Geschwindigkeit ändert.

Verlängert man den wagerechten Durchmesser, und trägt auf der Verlängerung die Zeit $^1/_{12}$ T durch eine beliebige Einheit ab, errichtet in den einzelnen erhaltenen Punkten Lote gleich den betreffenden senkrechten Projektionslinien, so erhält man obige graphische Darstellung des Verlaufes der Elongation x. Die die Endpunkte der x verbindende Kurve ist eine sogenannte Sinuskurve.

Dritter Abschnitt.

Mechanik des starren Körpers.

Vierzehntes Buch.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte.

188.

Die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, die an einem starren Körper angreifen, ist, falls die Kräfte einen und denselben Angriffspunkt haben, genau dieselbe wie die Zusammensetzung und Zerlegung von Kräften, die an einem materiellen Punkte angreifen. Es ist deshalb überflüssig und unnötig, diesen Fall nochmals zu behandeln.

Andere Verhältnisse aber liegen vor, sobald die an einem starren Körper angreifenden Kräfte verschiedene (zerstreute) Angriffspunkte haben. Diesen Fall wollen wir, zunächst unter der besonderen Voraussetzung, daß die Kräfte in einer Ebene liegen, nunmehr behandeln, wobei wir von den folgenden zwei Grundsätzen öfters Gebrauch machen werden:

1. Nennt man mehrere an einem starren Körper angreifende Kräfte als Ganzes betrachtet ein Kraftsystem, so sind zwei Kraftsysteme gleich, aber entgegengesetzt, wenn sie an einem starren Körper im Gleichgewichte sind. Zwei Kraftsysteme sind ferner gleichwertig (äquivalent) und können miteinander vertauscht werden, wenn sie an einem und demselben Körper gleiche Wirkungen hervorbringen, insbesondere wenn sie einzeln mit einem dritten Kraftsysteme im Gleichgewichte sind.

2. Die Wirkungen irgend welcher an einem starren Körper angreifender Kräfte werden nicht geändert, wenn man

an irgend einem Punkte des Körpers beliebig viele Kräfte, die im Gleichgewichte sind, hinzugefügt oder weggenommen denkt.

189.

Der einfachste Fall ist der, daß an einem starren Körper in verschiedenen Punkten A_1 und A_2 (Fig. 65) zwei gleiche Kräfte P_1 und P_2 angreifen, deren Richtungen in die Verbindungslinie der Angriffspunkte A_1 und A_2 fallen, aber entgegengesetzt sind. Zwar werden diese Kräfte, je nachdem ihre Richtungen die in der Figur durch die Pfeile angedeuteten oder die entgegengesetzten sind, auf die einzelnen Teilchen des Körpers einen Zug oder einen Druck ausüben, allein diese Spannungswirkung kommt, da wir den Körper als starr voraussetzen, für uns nicht in Betracht. Da die Kräfte aber insbesondere eine dynamische Wirkung nicht haben, so sind sie im Gleichgewichte, gerade so als ob sie in demselben Punkte des Körpers angriffen.

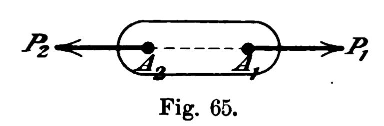


Fig. 65.

190.

Eine unmittelbare Folge aus dem Vorigen ist der Satz von der Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft, wonach die Wirkung einer Kraft an einem starren Körper dieselbe bleibt, wenn man, ohne Größe und Richtung der Kraft zu ändern, ihren Angriffspunkt beliebig in ihrer Richtung verlegt.

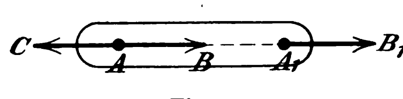


Fig. 66.

Denn ist A der Angriffspunkt der Kraft $P = A\,B$ (Fig. 66), so ist ihr die in A_1 angebrachte Kraft $A_1\,B_1 = P$ gleichwertig, weil sie beide einzeln mit der in A angebrachten Kraft $A\,C = P$ im Gleichgewichte sind.

191.

Greifen mehrere Kräfte P_1, P_2, P_3, . . ., deren Richtungen sämtlich in einer Geraden liegen, in verschiedenen

Punkten dieser Geraden A_1, A_2, A_3, . . . an (Fig. 67), so kann man die Angriffspunkte derselben sämtlich in denselben Punkt der Geraden z. B. nach A_1 verlegen und erhält das Resultat, daß die Resultante der Kräfte P_1, P_2, P_3, . . . ihre algebraische Summe ist, daß also die Kräfte im Gleichgewichte sind, wenn ihre algebraische Summe gleich Null ist.

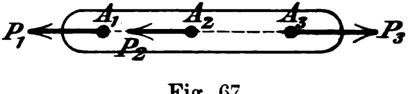


Fig. 67.

192.

Haben wir aber zwei Kräfte P_1 und P_2, die in den Punkten A_1 und A_2 angreifen und gegeneinander geneigt sind (Fig. 68), so verlegen wir ihre Angriffspunkte nach B, dem Schnittpunkte ihrer Richtungen, der zum starren Körper gehörig oder mit ihm starr verbunden gedacht wird, und konstruieren das Parallelogramm $BCED$ aus $BC = P_1$ und $BD = P_2$; die Diagonale BE dieses Parallelogramms ist der Größe und Richtung nach die Resultante R der Kräfte P_1 und P_2; ihr Angriffspunkt kann beliebig auf BE angenommen, z. B. auch in den Schnittpunkt M der Richtung BE mit der Linie $A_1 A_2$ verlegt werden.

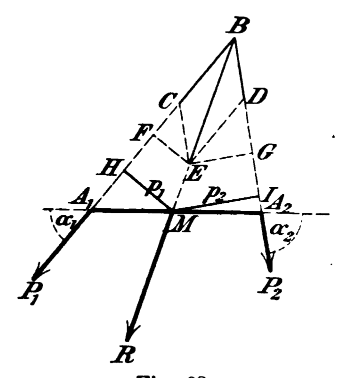


Fig. 68.

Hätte man an dem starren Körper noch eine dritte Kraft P_3, deren Angriffspunkt in der Geraden BE läge, die gleich R, aber der Richtung nach R entgegengesetzt wäre, so wären die drei Kräfte P_1, P_2 und P_3 am starren Körper im Gleichgewichte.

193.

Es ist leicht einzusehen, daß man durch Wiederholung dieses Verfahrens beliebig viele Kräfte, die in einer Ebene liegen und an zerstreuten Punkten eines Körpers angreifen. zu einer einzigen Kraft zusammensetzen kann. Schneiden sich im besonderen die Richtungslinien der Kräfte in einem

Punkte, so verlegt man die Angriffspunkte aller Kräfte in diesen Punkt und konstruiert die Resultante nach § 73.

Andernfalls konstruiert man erst die Resultante R_{1-2} der beiden ersten Kräfte P_1 und P_2, vereinigt diese mit der dritten Kraft P_3 zur Resultante R_{1-3}, diese mit der vierten Kraft P_4 zu R_{1-4}, usw., bis man sämtliche Kräfte berücksichtigt hat; in Fig. 69 ist die Konstruktion für vier Kräfte ausgeführt. Daß dabei die Reihenfolge gleichgültig ist, in der man die Kräfte zusammensetzt, ist leicht beweisbar.

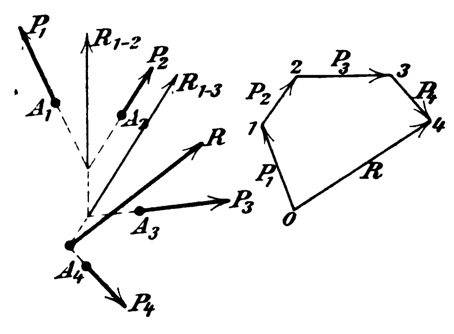


Fig. 69.

Die Größe und Richtung der Resultante erhält man auch durch Konstruktion des Kräftepolygons (§ 74) in einem Kräfteplane; auch das ist in Fig. 69 ausgeführt.

Ergibt sich die Größe der Resultante $R = 0$ (ist das Kräftepolygon ein geschlossenes), so sind die n Kräfte am Körper im Gleichgewichte.

Anm. Die Bewegung, die der starre Körper unter der Einwirkung von P_1 und P_2 oder ihrer Resultante R ausführt, kommt vorläufig gar nicht in Betracht. Auch sei noch hervorgehoben, daß die Resultante mehrerer Kräfte an einem starren Körper mehr die Bedeutung einer Rechnungsgröße, als eine physikalische Bedeutung hat. Denn sobald die inneren Kräfte, die im Körper durch angreifende Kräfte wachgerufen werden, mit in Rücksicht gezogen werden müssen, können zwei Kräfte nicht ohne weiteres durch ihre Resultante ersetzt werden.

194.

Rechnerische Behandlung derselben Aufgabe. Sind α_1 und α_2 die Winkel, die die Richtungen der Kräfte P_1 und P_2 mit den Verlängerungen der Verbindungsstrecke ihrer Angriffspunkte A_1 und A_2 bilden (siehe Fig. 68 des § 192),

so ist $\sphericalangle CBD = 180^0 - (\alpha_1 + \alpha_2)$ und $\sphericalangle BDE = \alpha_1 + \alpha_2$, und für die Größe der Resultante R erhält man den Wert

$$(1) \qquad R = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2 - 2\, P_1 \cdot P_2 \cdot \cos(\alpha_1 + \alpha_2)};$$

die Richtung von R oder die Winkel λ_1 und λ_2, die sie mit den Richtungen von P_1 und P_2 bildet, sind durch die Gleichungen gegeben

$$(2)\ \sin \lambda_1 = \frac{P_2 \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{R};\ \sin \lambda_2 = \frac{P_1 \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{R},$$

wie unmittelbar aus den Gleichungen (2) des § 71 folgt.

Fällt man, um die Lage von R zu finden, von E auf BA_1 und BA_2 die Lote BF und BG, so ist wegen der Kongruenz der Dreiecke BCE und EDB, wenn man $BC = P_1$ und $BD = P_2$ als Grundlinien ansieht,

$$P_1 \cdot EF = P_2 \cdot EG$$

oder in Form einer Proportion

$$(3) \qquad P_1 : P_2 = EG : EF;$$

diese Proportion bestimmt die Lage der Resultante vollständig. Will man aber im besonderen die Lage von M kennen, so fälle man von M auf BA_1 und BA_2 die Lote p_1 und p_2; da für diese die Proportion gilt

$$EG : EF = p_2 : p_1,$$

so gilt auch

$$(4) \qquad P_1 : P_2 = p_2 : p_1.$$

Bezeichnet man die Abstände des Punktes M von A_1 und A_2, deren Entfernung a sein möge, mit x und y, so ist

$$p_1 = x \cdot \sin \alpha_1; \qquad p_2 = y \cdot \sin \alpha_2,$$

und man hat, wenn man diese Werte in (4) einsetzt, zur Bestimmung von x und y das Gleichungssystem

$$x + y = a$$

$$\frac{x}{y} = \frac{P_2 \cdot \sin \alpha_2}{P_1 \cdot \sin \alpha_1},$$

aus dem leicht

$$(5) \quad \begin{cases} x = \dfrac{P_2 \cdot \sin \alpha_2}{P_1 \cdot \sin \alpha_1 + P_2 \cdot \sin \alpha_2} \cdot a \\[2ex] y = \dfrac{P_1 \cdot \sin \alpha_1}{P_1 \cdot \sin \alpha_1 + P_2 \cdot \sin \alpha_2} \cdot a \end{cases}$$

folgen.

195.

Ist schon, wie im § 76 hervorgehoben wurde, die Aufgabe, eine Kraft in zwei an demselben Punkte angreifende Komponenten zu zerlegen, im allgemeinen unbestimmt und in unendlich vielfacher Weise lösbar, so ist die Aufgabe der Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten, die zerstreute Angriffspunkte haben, erst recht unbestimmt und vieldeutig. Denn jetzt kommt zu der früheren Unbestimmtheit noch die willkürliche Wahl der beiden Angriffspunkte hinzu.

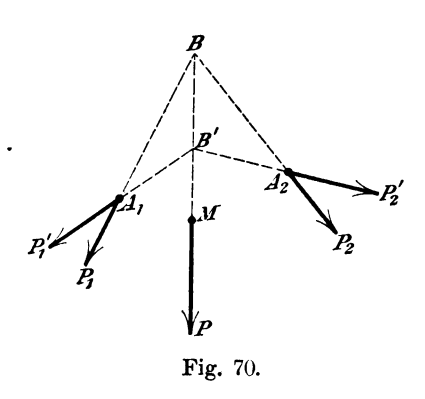


Fig. 70.

Aber auch, wenn die Angriffspunkte der Komponenten ihrer Lage nach gegeben sind, die Aufgabe bleibt immer unbestimmt, da man, wie Fig. 70 andeutet, die Richtungen der in A_1 und A_2 angreifenden Seitenkräfte P_1 und P_2 beliebig wählen kann, wenn nur die Bedingung erfüllt ist, daß sich die Richtungen der gegebenen zu zerlegenden Kraft P und der gesuchten Seitenkräfte P_1 und P_2 in einem Punkte B schneiden.

Diese Unbestimmtheit fällt aber weg, wenn die Richtung einer der beiden Komponenten, z. B. die von P_1 gegeben ist, weil dadurch der Punkt B, in dem sich die Richtungen von P, P_1 und P_2 schneiden müssen, gegeben und damit zugleich die Richtung der andern Komponente P_2 bestimmt ist. Die Konstruktion (und Berechnung) der Größe der Komponenten P_1 und P_2 folgt dann unmittelbar aus Fig. 68.

196.

Die im § 192 angegebene Konstruktion ist nicht mehr ausführbar, wenn die Richtungen der beiden Kräfte P_1 und P_2 parallel sind, da dann der Schnittpunkt B ins Unendliche fallen würde. Doch ist es nicht schwer, diesen besonders wichtigen Fall auf den des § 192 zurückzuführen, und

zwar setzen wir zunächst voraus, daß die Kräfte gleichgerichtet sind.

Fügt man nämlich (Fig. 71) dem Systeme der beiden Kräfte P_1 und P_2 zwei beliebig große, aber gleiche Kräfte Q hinzu, von denen die eine in A_1 in der Richtung $A_2\,A_1$, die andere in A_2 in der Richtung $A_1\,A_2$ angreift, so wird, da die hinzugefügten Kräfte im Gleichgewichte sind, nichts geändert. Die in A_1 angreifenden Kräfte P_1 und Q haben die Resultante $A_1\,J$, die in A_2 angreifenden Kräfte P_2 und Q die Resultante $A_2\,K$. Werden $A_1\,J$ und $A_2\,K$ in ihren Schnittpunkt B als $B\,C$ und $B\,D$ verlegt, dort wieder in je zwei Komponenten, von denen die eine $A_1\,A_2$, die andere P_1 oder P_2 parallel ist, also $B\,C$ in $B\,F$ und $B\,E$, $B\,D$ in $B\,H$ und $B\,G$ zerlegt, so folgt leicht aus kongruenten Dreiecken, daß

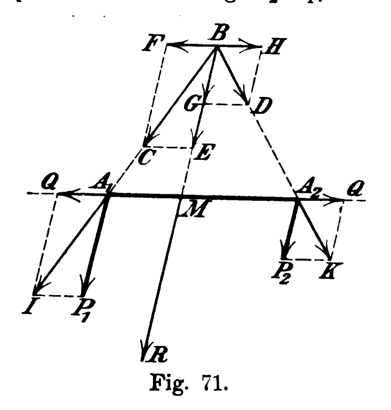


Fig. 71.

$$B\,F = Q;\quad B\,E = P_1;$$
$$B\,H = Q;\quad B\,G = P_2$$

ist. Nun sind BF und BH als gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte im Gleichgewichte, können also weggelassen werden, während $B\,E$ und $B\,G$ die Resultante $R = P_1 + P_2$ ergeben, deren Angriffspunkt beliebig in der Geraden $B\,E$, also besonders auch in den Schnittpunkt M dieser Geraden mit $A_1\,A_2$ verlegt werden kann.

Dieser Punkt M kann aber leicht bestimmt werden. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $B\,E\,C$ und $B\,M\,A_1$ einerseits und $B\,G\,D$ und $B\,M\,A_2$ andererseits folgen

$$\frac{M\,A_1}{M\,B} = \frac{E\,C}{E\,B} = \frac{Q}{P_1}$$

$$\frac{M\,B}{M\,A_2} = \frac{G\,B}{G\,D} = \frac{P_2}{Q}.$$

Durch Multiplikation erhält man hieraus

$$\frac{M\,A_1}{M\,A_2} = \frac{P_2}{P_1},$$

d. h. M teilt die Strecke $A_1 A_2$ von innen im umgekehrten Verhältnis der beiden Kräfte.

Das erhaltene Resultat kann also ausgesprochen werden: Zwei parallele und gleichgerichtete Kräfte haben eine ihnen parallele und gleichgerichtete Resultante, die gleich der **Summe** der beiden Kräfte ist und die Verbindungslinie der Angriffspunkte der beiden Kräfte im umgekehrten Verhältnisse der beiden Kräfte von **innen** teilt.

Die Lage des Punktes M ist unabhängig von der Richtung der parallelen Kräfte; solange also die Kräfte ihre Größe und Angriffspunkte nicht ändern und nur gleichmäßig ihre Richtung ändern, so daß sie parallel bleiben, geht ihre Resultante immer durch denselben Punkt M; er heißt deshalb der Mittelpunkt der parallelen Kräfte.

Anm. Die gefundenen Resultate ergeben sich auch aus den Formeln des § 194 als spezielle Fälle. Sind P_1 und P_2 parallel, so ist $\alpha_2 = 180^0 - \alpha_1$; $\alpha_1 + \alpha_2 = 180^0$; $\cos 180^0 = -1$, also

$$R = \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2 + 2\,P_1\,P_2} = P_1 + P_2;$$

da ferner $\sin \alpha_1 = \sin \alpha_2$, so folgt

$$\frac{x}{y} = \frac{P_2}{P_1}.$$

197.

Greifen mehr als zwei parallele und gleichgerichtete Kräfte an einem starren Körper an, so erhält man die Resultante aller Kräfte durch successive Anwendung der vorigen Konstruktion. Man ersetzt zunächst P_1 und P_2 durch die Resultante $P_1 + P_2$, die im Mittelpunkte dieser beiden Kräfte angreift; diese Resultante vereinigt man mit der dritten Kraft P_3 zu der Resultante $P_1 + P_2 + P_3$, die ebenfalls in einem bestimmten Punkte angreift. So fortfahrend erhält man die Resultante $P_1 + P_2 + P_3 + \ldots + P_n$, die durch den sich aus der Zeichnung ergebenden Mittelpunkt aller Kräfte hindurchgeht.

Da durch zwei parallele Gerade stets eine Ebene bestimmt ist, so sieht man ohne weiteres ein, daß dieses Ver-

fahren der Zusammensetzung paralleler Kräfte nicht nur für Kräfte gilt, die in einer Ebene liegen, sondern auch für parallele Kräfte, die beliebig im Raume liegen.

198.

Aufgabe. An den Enden einer geraden starren Linie $A_1 A_2 = a = 12$ m wirken nach derselben Seite zwei parallele Kräfte, $P_1 = 160$ kg in A_1 und $P_2 = 80$ kg in A_2. Wie groß ist ihre Resultante, und wie weit ist ihr Angriffspunkt M von A_1 entfernt?

Auflösung. Es ist zunächst

$$R = P_1 + P_2 = 240 \text{ kg};$$

dann hat man, wenn $A_1 M = x$, mithin $A_2 M = a - x$ gesetzt wird,

$$x : (a - x) = P_2 : P_1 = 1 : 2$$

und hieraus

$$x = \frac{1}{3} a = 4 \text{ m}.$$

199.

Auf Grund der Konstruktion des § 196 kann man auch die umgekehrte Aufgabe lösen, eine gegebene Kraft P mit dem Angriffspunkte A in zwei ihr parallele Seitenkräfte mit den Angriffspunkten A_1 und A_2 zu zerlegen, unter der Voraussetzung, daß A_1 und A_2 durch eine Gerade fest mit A verbunden sind.

Freilich ist die Aufgabe in dieser Allgemeinheit unbestimmt; denn sie enthält 4 Unbekannte, nämlich die Größen P_1 und P_2 der beiden Seitenkräfte und die Abstände x und y ihrer Angriffspunkte von A, während nur die zwei Gleichungen

$$P_1 + P_2 = P$$

$$\frac{x}{y} = \frac{P_2}{P_1}$$

gelten. Man kann daher entweder die Lage der beiden neuen Angriffspunkte A_1 und A_2 oder einen Angriffspunkt und die Größe einer Seitenkraft beliebig wählen.

200.

Aufgabe. An einer horizontalen, gewichtslos gedachten Stange $A\,B$ (Fig. 72) wirkt in C nach vertikaler Richtung eine Last $P = 200$ kg; wieviel haben die Stützpunkte A und B zu tragen, wenn $A\,C = p_1 = 6$ m und $B\,C = p_2 = 2$ m ist?

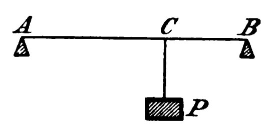


Fig. 72.

Auflösung. Ist P_1 der Druck, den der Stützpunkt A, P_2 der Druck, den B auszuhalten hat, so folgt aus

$$P_1 + P_2 = P$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{p_2}{p_1}$$

$$P_1 = \frac{p_2}{p_1 + p_2} \cdot P = 50\,\text{kg}; \quad P_2 = \frac{p_1}{p_1 + p_2} \cdot P = 150\ \text{kg}.$$

201.

Aufgabe. Eine Kraft $P = 1000$ kg drückt (vermittelst einer geraden Stange) unter dem Winkel $\alpha = 30^0$ auf einen Balken $A\,B$; welchen Druck haben die Stützpunkte A und B, und welchen Druck die in C mit $A\,B$ fest verbundene senkrechte Ebene $C\,D$ auszuhalten, wenn $A\,C = 2$ m; $A\,B = 10$ m ist? (Fig. 73.)

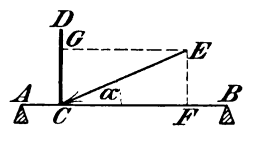


Fig. 73.

Auflösung. Stellt $E\,C$ die unter dem Winkel α gegen $A\,B$ geneigte Kraft P dar, so zerlege man diese in die Seitenkräfte $G\,C = P \cdot \sin \alpha$ senkrecht zu $A\,B$ und $F\,C = P \cdot \cos \alpha$ parallel zu $A\,B$.

Letztere Kraft drückt rechtwinklig auf die Ebene $C\,D$, und würde den damit verbundenen Balken $A\,B$ horizontal fortschieben, wenn er nicht an den Stützpunkten befestigt wäre. Erstere Kraft drückt senkrecht auf $A\,B$ und verteilt sich im umgekehrten Verhältnis der Entfernungen $A\,C$ und $B\,C$ auf die Stützpunkte A und B.

Für die gegebenen Zahlenwerte erhält man

$$P \cdot \cos \alpha \sim 866\ \text{kg}; \qquad P \cdot \sin \alpha = 500\ \text{kg},$$

von denen 400 kg auf A, 100 kg auf B drücken.

202.

Sind die beiden parallelen Kräfte verschieden gerichtet und voneinander verschieden, so daß etwa $P_1 > P_2$, so führt genau die nämliche Konstruktion wie im § 196 zum Ziele. In Fig 74 ist die Konstruktion ausgeführt, ganz entsprechend der Fig. 71; die Beschreibung der Konstruktion

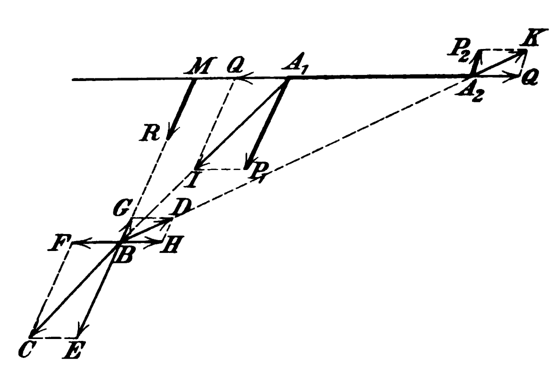


Fig. 74.

stimmt dann wörtlich mit der des § 196 überein und braucht hier nicht wiederholt zu werden. Auch die aus der Konstruktion sich ergebenden Schlüsse sind genau dieselben und liefern das Resultat:

Zwei parallele und entgegengesetzt gerichtete Kräfte von ungleicher Größe haben eine ihnen parallele und mit der größeren gleichgerichtete Resultante, die gleich der **Differenz** der beiden Kräfte ist und die Verbindungslinie der Angriffspunkte der beiden Kräfte im umgekehrten Verhältnisse der beiden Kräfte von **außen** teilt.

Es liegt also der Angriffspunkt der Resultante außerhalb der Strecke $A_1 A_2$ und zwar auf der Seite der größeren der beiden Kräfte.

203.

Aufgabe. An den Enden einer geraden Linie $A_1 A_2 = a = 10$ m wirken zwei parallele, entgegengesetzt gerichtete Kräfte, $P_1 = 100$ kg in A_1, $P_2 = 150$ kg in A_2. Wie groß

ist ihre Resultante R, und wie weit ist ihr Angriffspunkt C von A_2 entfernt?

Auflösung. Die Resultante

$$R = P_2 - P_1 = 50 \text{ kg};$$

ferner hat man, wenn $A_2\,C = x$, also $A_1\,C = a + x$ ist, die Proportion

$$x : (a + x) = P_1 : P_2 = 2 : 3$$

und hieraus

$$x = 2\,a = 20 \text{ m}.$$

204.

Sind aber die beiden parallelen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte P_1 und P_2 einander gleich, so führt die Konstruktion des § 202 zu keinem Ergebnis, da auch nach Hinzufügen der beiden Kräfte Q die Resultanten $A_1\,J$ und $A_2\,K$ parallel bleiben und keinen Schnittpunkt im Endlichen haben. Die Resultante $R = P_1 - P_2$ würde gleich Null sein und ihr Angriffspunkt M ins Unendliche fallen.

Es gibt also für ein solches System von zwei parallelen, gleichen und entgegengesetzt gerichteten Kräften keine Resultante; ein solches System kann nicht durch eine einzige Kraft ersetzt werden, d. h. die Wirkung eines solchen Systems kann keine fortschreitende Bewegung, sondern lediglich eine drehende sein.

Man nennt ein solches System ein Kräftepaar, wohl auch ein Drehungspaar (Drehzwilling); mit den Grundzügen der Theorie der Kräftepaare, die zuerst von Poinsot (élements de statique) entwickelt worden sind, werden wir uns später (XVI. Buch) beschäftigen.

205.

Wirken nun an einem starren Körper mehrere parallele Kräfte nach verschiedenen Richtungen, so kann man, mögen sie in einer Ebene oder beliebig im Raume zerstreut liegen, die Resultante R der nach der einen Seite gerichteten Kräfte (der positiven Kräfte) und die Resultante R' der nach der andern Seite gerichteten Kräfte (der negativen Kräfte) so-

wie ihre Angriffspunkte konstruieren. Es können dann folgende Fälle stattfinden:

1. die beiden entgegengesetzt gerichteten Resultanten R und R' sind verschieden groß und haben

a) einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt: sie haben eine neue Resultante gleich ihrer Differenz, die in demselben Punkte angreift;

b) verschiedene Angriffspunkte: sie haben eine neue Resultante gleich ihrer Differenz, deren Angriffspunkt nach § 202 bestimmbar ist.

2. die beiden entgegengesetzt gerichteten Resultanten R und R' sind gleich groß und haben

a) einen gemeinschaftlichen Angriffspunkt: ihre Resultante ist Null, das gesamte Kraftsystem ist im Gleichgewichte;

b) verschiedene Angriffspunkte: R und R' bilden ein Kräftepaar.

206.

Aufgabe. An einer starren Geraden greifen vier parallele Kräfte $P_1 = 5$ kg; $P_2 = 10$ kg; $P_3 = 3$ kg und $P_4 = 6$ kg in verschiedenen Punkten A_1, A_2, A_3, A_4 an; die Entfernungen ihrer Angriffspunkte betragen: $A_1 A_2 = a_1 = 3$ m; $A_2 A_3 = a_2 = 7$ m; $A_3 A_4 = a_3 = 2$ m; wie groß ist die Mittelkraft, und wo liegt ihr Angriffspunkt, wenn die Richtung von P_3 der der übrigen entgegengesetzt ist? (Fig. 75.)

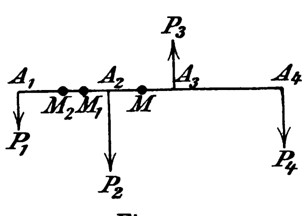


Fig. 75.

Auflösung. Die Vereinigung von P_1 und P_2 liefert eine Resultante $R_1 = P_1 + P_2 = 15$ kg, deren Angriffspunkt M_1 von A_1 die Entfernung

$$x_1 = \frac{P_2}{P_1 + P_2} \cdot a_1 = \frac{2}{3} a_1 = 2 \text{ m}$$

hat.

Die Vereinigung von R_1 und P_3 liefert die Resultante $R_2 = R_1 - P_3 = P_1 + P_2 - P_3 = 12$ kg; die Entfernung x_2

ihres Angriffspunktes von M_1 ist

$$x_2 = \frac{-P_3}{P_1 + P_2 - P_3} \cdot M_1 A_2 = -\frac{1}{4}(a_1 + a_2 - x_1) = -2\,\text{m};$$

(x_2 hat das Vorzeichen —, weil seine Richtung von M_1 aus der von A_1 nach A_4 entgegengesetzt ist).

Vereinigt man endlich R_2 und P_4, so erhält man die Resultante

$$R = R_2 + P_4 = P_1 + P_2 - P_3 + P_4 = 18\ \text{kg};$$

die Entfernung x_3 ihres Angriffspunktes M von M_2 ist

$$x_3 = \frac{P_4}{R} \cdot M_2 A_4$$

$$= \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3 - x_1 - x_2) = 4\,\text{m}.$$

Bezeichnet nun x die Entfernung $A_1 M$, so ist

$$x = x_1 + x_2 + x_3 = 4\ \text{m}.$$

Anm. Im nächsten Buche werden wir die Mittel kennen lernen, diese und ähnliche Aufgaben auf viel einfacherem Wege zu lösen.

Aufgaben.

168. An den Endpunkten einer $a = 1{,}5$ m langen Geraden $A_1 A_2$ greifen zwei Kräfte $P_1 = 20$ kg und $P_2 = 30$ kg an, deren Richtungen mit den Verlängerungen von $A_1 A_2$ die Winkel $\alpha_1 = 60^0$ und $\alpha_2 = 80^0$ bilden; es soll ihre Resultante der Größe und Richtung nach, sowie die Entfernung ihres Angriffspunktes von A_1 berechnet werden.

Antw.: $R = 471$ kg; $\lambda_1 = 24^0 10'$; $\lambda_2 = 15^0 50'$; $x = 0{,}95$ m.

169. An den Endpunkten einer geraden Stange $A_1 A_2$ von 2 m Länge greifen zwei parallele Kräfte $P_1 = 60$ kg; $P_2 = 40$ kg an; wie groß ist ihre Resultante, und wo liegt deren Angriffspunkt, wenn die Kräfte

a) gleich gerichtet; b) entgegengesetzt gerichtet

sind?

Antw.: a) $R = 100$ kg; $A_1 M = 0{,}8$ m;
b) $R = 20$ kg; $A_1 M = -4$ m.

170. Zwei Männer tragen an einer 5 m langen Stange eine Last von 150 kg; der eine ist 2 m, der andere 3 m vom Aufhängepunkte der Last entfernt; wieviel hat jeder zu tragen?

Antw.: Der erstere 90 kg, der andere 60 kg.

171. Eine Kraft $P = 25$ kg soll in zwei ihr parallele Seitenkräfte **zerlegt** werden, von denen die eine $P_1 = 15$ kg in einer Entfernung $a = 72$ cm vom Angriffspunkte der Kraft P angreift; wie groß ist die **andere** Seitenkraft, und wie weit ist ihr Angriffspunkt von dem von P **entfernt?**

Antw.: $P_2 = P - P_1 = 10$ kg; $x = 108$ cm.

172. Zwei Arbeiter sollen an einer 1,80 m langen Stange eine **Last** von 120 kg tragen; wegen ihrer ungleichen Körperstärke soll der **eine** nur halb soviel tragen als der andere; wo ist die Last an der **Stange** aufzuhängen?

Antw.: 60 cm vom Stärkeren entfernt.

173. Eine in A angreifende Kraft $P = 150$ kg soll in zwei ihr parallele, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte zerlegt werden, von denen die eine P gleichgerichtete $P_1 = 200$ kg ist und in der Entfernung $A\,A_1 = 1{,}50$ m von P angreift; wie groß ist die andere Seitenkraft, und wo greift sie an?

Antw.: $P_2 = P_1 - P = 50$ kg; $x = A\,A_2 = 6$ m.

Fünfzehntes Buch.

Die statischen Momente der Kräfte.

207.

Es sei ein starrer Körper um eine feste Achse (Drehungsachse) drehbar; an ihm greife eine Kraft P an, deren Richtung in einer zur Drehungsachse senkrechten Ebene liege. Geht die Richtung der Kraft durch die Drehungsachse, so wird die Wirkung der Kraft durch die Festigkeit der Achse aufgehoben, während sie im andern Falle den Körper zu drehen strebt.

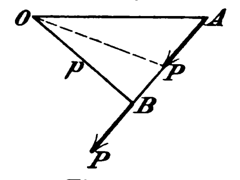


Fig. 76.

Ist O (Fig. 76) der Punkt, in dem die Drehungsachse auf der Ebene der Kraft normal steht, und fällt man von O auf die Kraftrichtung das Lot p, so nennt man das Produkt aus der Kraft P und dem von O auf die Kraftrichtung gefällten Lote p das statische Moment der Kraft P in bezug auf den Punkt O.

Das statische Moment M ist also durch die Gleichung

$$M = P \cdot p$$

definiert; man nennt p den Hebelarm (wohl auch Kraftarm) der Kraft P, O den Momentenpunkt.

Anm. Da der Flächeninhalt des Dreiecks, dessen Grundlinie die Kraft P und dessen Spitze der Momentenpunkt O ist, gleich $\frac{1}{2} P \cdot p$ ist, so kann die doppelte Fläche dieses Dreiecks als graphische Darstellung des statischen Momentes der Kraft P in bezug auf O angesehen werden.

208.

Da das statische Moment durch ein Produkt „Kraft mal Strecke" definiert ist, so ist seine Dimension

im technischen Maßsysteme $K L$;
im absoluten $M L^2 T^{-2}$,

also gleich der Dimension der Arbeit oder der Wucht.

Die Einheit des statischen Momentes ist daher im technischen Maßsysteme das mkg, im absoluten das Erg.

Weil übrigens der Angriffspunkt der Kraft P beliebig in ihrer Richtung verlegt werden kann, so kann man ihn auch in den Fußpunkt B des Perpendikels p verlegt denken, also annehmen, daß die Kraft im Endpunkte des Hebelarms auf diesem senkrecht steht.

209.

Liegt die Richtung der Kraft nicht in einer zur Drehungsachse senkrechten Ebene, so lege man durch den Angriffspunkt der Kraft eine Ebene senkrecht zur Drehungsachse und durch die Kraftrichtung eine zweite zu dieser Ebene senkrechte Ebene; zerlegt man nun die Kraft in zwei zueinander senkrechte Komponenten in diesen Ebenen, so ist die zweite Komponente der Drehungsachse parallel, erzeugt also keine Drehung, sondern ist bestrebt, den Körper längs der Drehungsachse zu verschieben, während die erste Komponente so liegt, wie wir vorausgesetzt haben. Es ist

daher in unserer Voraussetzung keine Beschränkung, wenn wir nur die drehende Wirkung der Kräfte ins Auge fassen wollen; wir können also die Kraftrichtungen stets in einer Perpendikularebene zur Drehungsachse wirkend ansehen.

210.

Je nach der Richtung, in der die an einem um eine feste Achse drehbaren Körper angreifenden Kräfte den Körper zu drehen bestreben, legt man den statischen Momenten verschiedene Vorzeichen bei; dabei ist es aber ganz gleichgültig, welche Drehung man positiv, und welche man negativ rechnet, wenn man nur an der einmal als positiv gewählten konsequent festhält. Da aber außerdem die Drehungsrichtung verschieden erscheint je nach der Seite, von der man die Ebene der Kraft betrachtet, so muß man auch auf der Drehungsachse eine positive und eine negative Richtung unterscheiden. Man ist nun übereingekommen, das Moment einer Kraft positiv zu rechnen, wenn die Kraft von der positiven Seite der Drehungsachse gesehen eine Drehung nach rechts herum, also im Sinne der Bewegung des Uhrzeigers, hervorzubringen strebt, mithin das Moment einer entgegen der Bewegung des Uhrzeigers drehenden Kraft negativ zu nehmen.

Geht die Kraft P durch den Momentenpunkt O, so ist der Hebelarm p und damit auch das statische Moment gleich Null.

211.

Äquivalenz zweier Kräfte in bezug auf Drehung. Wenn an einem um eine Achse drehbaren starren Körper zwei in derselben zur Drehungsachse senkrechten Ebene liegende Kräfte P_1 und P_2 in den Punkten A_1 und A_2 senkrecht zu ihren Hebelarmen $O A_1 = p_1$ und $O A_2 = p_2$ angreifen (Fig. 77), die den Körper in demselben Sinne zu drehen bestrebt sind, so werden diese Kräfte in bezug auf die Drehung als äquivalent angesehen werden müssen, wenn sie an dem Körper die gleiche Winkelbeschleunigung γ erzeugen. Die Gleichheit der Kräfte aber wird durch die Gleichheit der von ihnen in derselben, wenn auch noch so kleinen Zeit geleisteten Arbeiten gemessen. Da der Punkt A_1 unter allei-

niger Wirkung der Kraft P_1 die Beschleunigung $p_1 \cdot \gamma$ erhält, also in der Zeit τ den Weg $\frac{1}{2} p_1 \cdot \gamma \cdot \tau^2$ zurücklegt, so ist, da wir diesen Weg in der unendlich kleinen Zeit τ als mit der Richtung der Kraft zusammenfallend ansehen können, die auf diesem Wege geleistete Arbeit $P_1 \cdot \frac{1}{2} p_1 \cdot \gamma \cdot \tau^2$. Ebenso hat P_2, wenn A_2 unter ihrem Einflusse bei gleicher Winkelbeschleunigung γ die lineare Beschleunigung $p_2 \cdot \gamma$ erhält und in der kleinen Zeit τ den Weg $\frac{1}{2} p_2 \cdot \gamma \cdot \tau^2$ zurücklegt, die Arbeit $P_2 \cdot \frac{1}{2} p_2 \cdot \gamma \cdot \tau^2$ geleistet. Die Gleichsetzung dieser Arbeiten gibt nach Weglassung der gleichen Faktoren die Gleichung

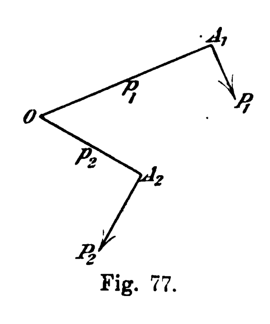


Fig. 77.

$$P_1 \cdot p_1 = P_2 \cdot p_2,$$

d. h. zwei Kräfte, die in einer zur Drehungsachse eines starren Körpers senkrechten Ebene an verschiedenen Punkten angreifen, sind in bezug auf die Drehung des Körpers um diese Achse gleichwertig, wenn ihre statischen Momente in bezug auf den Fußpunkt der Drehungsachse gleich sind.

212.

Eine Folgerung aus dem eben bewiesenen Satze ist die, daß man eine in einem Punkte A unter schiefem Winkel gegen OA angreifende Kraft P ersetzen kann durch ihre Projektion $AC = P'$ auf das in A auf OA errichtete Lot. Denn aus der Ähnlichkeit der Dreiecke OAB und APC (Fig. 78) folgt sofort, wenn OA mit a bezeichnet wird,

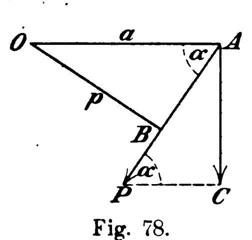


Fig. 78.

$$P' : P = p : a$$

oder

$$P' \cdot a = P \cdot p.$$

Setzt man $\measuredangle\, OAP = \alpha$, so ist $P' = P \cdot \sin\alpha$; $a = \frac{p}{\sin\alpha}$; es wird also P auf $P \cdot \sin\alpha$ vermindert, der Hebelarm aber auf

$\frac{p}{\sin \alpha}$ vergrößert, während der Wert des Produktes $P \cdot p$ ungeändert bleibt.

213.

Greifen nun in dem Punkte A (Fig. 79) zwei in einer zur Drehungsachse senkrechten Ebene liegende Kräfte P_1 und P_2 an, deren Resultante R ist und liegt der Momentenpunkt O zunächst außerhalb des von den Kraftrichtungen P_1 und P_2 eingeschlossenen Winkels, projiziert man ferner P_1, P_2 und R als P_1', P_2' und R' auf das in A auf $OA = a$ errichtete Lot und nennt die zu P_1, P_2 und R gehörigen Hebelarme p_1, p_2 und r, so gelten nach dem vorigen Paragraphen die Gleichungen

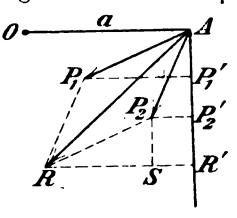


Fig. 79.

$$R' \cdot a = R \cdot r$$
$$P_1' \cdot a = P_1 \cdot p_1$$
$$P_2' \cdot a = P_2 \cdot p_2.$$

Da nun aber, wie aus der Figur leicht ersichtlich [zieht man $P_2 S \parallel A R'$, so ist $\triangle R P_2 S \sim P_1 A P_1'$]

$$R' = P_1' + P_2',$$

so ist auch

$$R' \cdot a = P_1' \cdot a + P_2' \cdot a$$

oder

$$R \cdot r = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2.$$

Liegt aber der Momentenpunkt O innerhalb des von P_1 und P_2 eingeschlossenen Winkels und verfährt man genau wie eben, so folgt aus Fig. 80

$$R' = P_1' - P_2'$$

und daher

$$R \cdot r = P_1 \cdot p_1 - P_2 \cdot p_2$$
$$= P_1 \cdot p_1 + (- P_2 \cdot p_2);$$

da aber, wie aus der Figur folgt, das Moment von P_2 negativ ist, so gilt der Satz:

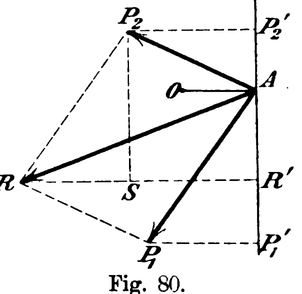


Fig. 80.

Das statische Moment der Resultante zweier in einer Ebene an demselben Punkte eines starren Kör-

pers angreifender Kräfte in bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene als Momentenpunkt ist gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte.

214.

Da die Zusammensetzung mehrerer in einem Punkte A angreifender, in derselben Ebene liegender Kräfte nur eine Wiederholung derselben Konstruktion ist, so gilt der am Schlusse des vorigen Paragraphen ausgesprochene Satz auch für beliebig viele in A angreifende Kräfte.

Da ferner die Zusammensetzung zweier Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten genau so erfolgt wie die Zusammensetzung zweier in einem Punkte angreifender Kräfte, und da die Zusammensetzung beliebig vieler in einer Ebene liegender Kräfte mit zerstreuten Angriffspunkten nur eine Wiederholung des gleichen Verfahrens ist, so kann der Satz, der sogenannte **Momentensatz**, in folgender allgemeiner Fassung ausgesprochen werden:

Greifen an einem starren Körper beliebig viele in einer Ebene liegende Kräfte an, so ist in bezug auf einen beliebigen Punkt der Ebene als Momentenpunkt das statische Moment der Resultante der Kräfte gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte.

In Zeichen kann man diesen Satz kurz schreiben

$$R \cdot r = \Sigma P_h \cdot p_h.$$

Anm. Der Momentensatz hat für die Mechanik des starren Körpers dieselbe fundamentale Bedeutung wie der Satz des Kräfteparallelogramms für die Mechanik des materiellen Punktes. Wir hätten ihn zwar bereits in der Mechanik des materiellen Punktes ableiten können, dort aber wäre seine Nützlichkeit und Fruchtbarkeit nicht eingesehen worden.

215.

Die Gleichung des Momentensatzes

$$R \cdot r = \Sigma P_h \cdot p_h$$

kann auch noch in anderer Weise aufgefaßt werden. Die

Kraft R braucht nämlich nicht gerade die Resultante der Kräfte $P_1, P_2 \ldots$ zu sein, sie braucht nur irgend eine Kraft zu bedeuten, die in bezug auf Drehung dem Systeme der Kräfte P äquivalent ist.

Es kann daher die obige Gleichung dazu benutzt werden

entweder die Größe der Kraft zu berechnen, die an dem gegebenen Hebelarme r dem Systeme der Kräfte P in bezug auf Drehung äquivalent ist,

oder die Größe des Hebelarmes zu berechnen, für den eine gegebene Kraft R dem Systeme der P in bezug auf Drehung äquivalent ist. Soll z. B. $R = \Sigma P_h$ sein, so erhält man für den Kraftarm den Wert

$$r = \frac{\Sigma P_h \cdot p_h}{\Sigma P_h}.$$

Schließlich kann $R \cdot r$ auch als das statische Moment einer Kraft von der Größe $(R \cdot r)$ und dem Hebelarme gleich der Längeneinheit aufgefaßt werden.

216.

Von besonderer Wichtigkeit teils wegen seiner Anwendung auf praktische Aufgaben teils wegen seiner Anwendung auf die Schwere ist der Momentensatz für parallele Kräfte. Daß er auch für diese gilt, wird man ohne weiteres annehmen können, da ja die parallele Lage nur ein besonderer Fall der allgemeinen Lage ist, doch läßt sich seine Gültigkeit in diesem besonderen Falle leicht direkt zeigen.

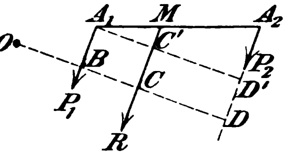


Fig. 81.

Wählt man den beliebigen Momentenpunkt O (Fig. 81) und fällt auf die Richtungen der parallelen Kräfte und ihrer Resultante die Lote $OB = p_1$; $OC = r$; $OD = p_2$, so ist, wenn $A_1 D' \parallel BD$ gezogen wird, $A_1 C' = r - p_1$ und $C' D' = p_2 - r$, und es gilt die Proportion

$$(r - p_1) : (p_2 - r) = A_1 M : M A_2 = P_2 : P_1,$$

aus der

$$(r - p_1) P_1 = (p_2 - r) P_2$$

oder

$$r (P_1 + P_2) = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2$$

folgt; da aber $P_1 + P_2 = R$ ist, so hat man

$$R \cdot r = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2,$$

und das ist der Momentensatz für parallele Kräfte.

Durch wiederholte Anwendung kann man ihn auf beliebig viele parallele Kräfte in einer Ebene erweitern und erhält das Resultat:

Greifen an einem starren Körper beliebig viele in einer Ebene liegende parallele Kräfte in zerstreuten Punkten an, so ist das statische Moment ihrer Resultante in bezug auf einen beliebigen Momentenpunkt der Ebene der Kräfte gleich der algebraischen Summe der statischen Momente aller Einzelkräfte in bezug auf denselben Momentenpunkt.

217.

Aufgabe. Den Mittelpunkt irgend welcher paralleler Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ zu finden, die rechtwinklig an verschiedenen Punkten $A_1, A_2, \ldots A_n$ einer starren Geraden wirken.

Auflösung. Man wähle auf der Geraden den beliebigen Punkt O, messe die Abstände der Angriffspunkte $A_1, A_2, \ldots A_n$ von O (es sei $O A_1 = a_1$; $O A_2 = a_2$; ... $O A_n = a_n$) und bezeichne den Abstand $O M$ des Mittelpunktes der parallelen Kräfte mit x; dann gilt, da $R = P_1 + P_2 + \ldots + P_n$, die Momentengleichung

$$x(P_1 + P_2 + \ldots + P_n) = P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + \ldots + P_n \cdot a_n,$$

aus der

$$x = \frac{P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2 + \ldots + P_n \cdot a_n}{P_1 + P_2 + \ldots + P_n} = \frac{\Sigma P_h \cdot a_h}{\Sigma P_h}$$

folgt.

Anm. Hätte man den beliebigen Punkt O, von dem aus die Entfernungen $a_1, a_2, \ldots a_n$ gemessen werden, innerhalb der parallelen Kräfte angenommen (was übrigens stets vermieden werden kann), so ist natürlich auf das Vorzeichen der Momente Rücksicht zu nehmen (vergl. § 210).

Ergibt sich $R = 0$ und $x = \infty$, so würde dies das Vorhandensein eines Kräftepaares anzeigen.

Zusatz. Wendet man die obige Lösung auf die Aufgabe des § 206 an, so erhält man, da dort A_1 als Momentenpunkt gewählt ist,

$$x(P_1 + P_2 - P_3 + P_4) = P_1 \cdot 0 + P_2 \cdot a_1 - P_3(a_1 + a_2) + P_4(a_1 + a_2 + a_3),$$

woraus nach Einsetzen der numerischen Werte

$$x = 4 \text{ m},$$

genau wie im § 206, nur viel kürzer und einfacher als dort, folgt.

218.

Der Momentensatz setzt uns in die Lage, die Verallgemeinerung der Aufgabe des § 199 zu lösen; diese Verallgemeinerung lautet: die Größe zweier ihrer Lage nach gegebenen Parallelkräfte R_1 und R_2 zu bestimmen, durch die eine beliebige Anzahl gegebener Parallelkräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$, die in einer Ebene liegen, ersetzt werden können.

Es seien z. B. Fig. 82 drei Kräfte P_1, P_2 und P_3 gegeben, die durch die Kräfte X und Y ersetzt werden sollen, wenn die in der Figur eingezeichneten Entfernungen a_1, a_2, a_3 und a_4 gegeben sind.

Fig. 82.

Wählt man den Angriffspunkt von Y als Momentenpunkt, so muß in bezug auf ihn das statische Moment der Kraft X gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der Einzelkräfte sein; man hat also die Gleichung

$$X(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = P_1(a_2 + a_3 + a_4) + P_2(a_3 + a_4) + P_3 \cdot a_4.$$

Ebenso erhält man in bezug auf den Angriffspunkt von X als Momentenpunkt die Gleichung

$$Y(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) = P_1 \cdot a_1 + P_2(a_1 + a_2) + P_3(a_1 + a_2 + a_3);$$

aus beiden Gleichungen können X und Y leicht berechnet werden.

Als Probe für die Richtigkeit der Rechnung hat man die Gleichung

$$X + Y = P_1 + P_2 + P_3.$$

Wie die Aufgabe bei mehr als drei Kräften, von denen auch einige die entgegengesetzte Richtung haben können, gelöst wird, ist ohne weiteres klar.

219.

Die im vorigen Paragraphen gelöste Aufgabe ist für die Praxis von außerordentlicher Wichtigkeit.

Ruht nämlich ein horizontaler Stab (Balken) auf zwei Unterstützungspunkten A und B und wirken an ihm beliebig viele parallele (in der Praxis meistens vertikale), in derselben Ebene liegenden Kräfte, so üben diese auf die Stützpunkte Drucke, sogenannte Auflagerdrucke, aus, die durch gleich große Gegendrucke, Stützdrucke, aufgehoben werden (§ 47).

Die Ermittelung dieser Drucke ist die in die Praxis umgesetzte Aufgabe des vorigen Paragraphen.

Aufgabe. Ein eiserner Träger von $P = 250$ kg Gewicht ist in seinen beiden Endpunkten A und B, deren Entfernung $l = 3{,}6$ m beträgt, unterstützt und trägt die Lasten $P_1 = 640$ kg und $P_2 = 900$ kg in den Entfernungen $a_1 = 90$ cm und $a_2 =$ 210 cm von A; wie groß sind die Auflagerdrucke in A und B?

Auflösung. Wie wir sehen werden (XVIII. Buch), kann das Gewicht des Balkens als eine im Mittelpunkte von AB angreifende Last betrachtet werden; bezeichnen daher X und Y die Auflagerdrucke in A und B, so gilt für A als Momentenpunkt

$$Y \cdot l = P \cdot \frac{l}{2} + P_1 \cdot a_1 + P_2 \cdot a_2$$

und für B als Momentenpunkt

$$X \cdot l = P \cdot \frac{l}{2} + P_1 (l - a_1) + P_2 (l - a_2),$$

aus denen nach Einsetzen der gegebenen Werte leicht folgt:

$$X = 980 \text{ kg}; \; Y = 810 \text{ kg}.$$

220.

Aufgabe. Ein Balken AC liegt mit dem einen Ende C auf einer horizontalen, mit dem anderen Ende A gegen eine vertikale Wand, so daß eine Ebene durch ihn rechtwinklig zu den beiden Wänden gelegt werden kann. In D hängt eine Last P; welche Drucke wird dieselbe auf die Wände in A und C ausüben, wenn der Balken in C nicht gleiten kann und von der Reibung und dem Gewichte des Balkens abgesehen wird?

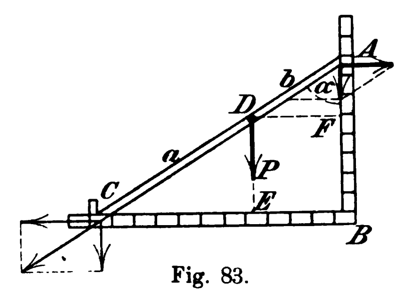


Fig. 83.

Es sei $CD = a$; $AD = b$; $\measuredangle\, CAB = \alpha$. (Fig. 83.)

Auflösung. Nennen wir den Punkt, in dem die Richtung der Kraft die Horizontale CB schneidet, E, die Teile, in die sich P in C und A zerlegt, X und Y und bezeichnen die gesuchten Wanddrucke in C und A mit V_1 und V_2, so gilt in bezug auf A die Momentengleichung

$$X \cdot CB = P \cdot EB.$$

Nun ist

$$CB = (a + b) \cdot \sin \alpha; \; EB = DF = b \cdot \sin \alpha,$$

so daß

$$X = \frac{b}{a + b} \cdot P.$$

In bezug auf C als Momentenpunkt folgt $Y \cdot CB = P \cdot CE$, woraus, da $CE = a \cdot \sin \alpha$,

$$Y = \frac{a}{a + b} \cdot P.$$

Diesen in A vertikal wirkenden Zug zerlegen wir in zwei Komponenten, die eine senkrecht zu AB, die andere in der Richtung AC; die erstere ist $Y \cdot tg\, \alpha$, die andere $\frac{Y}{\cos \alpha}$.

Die erstere stellt den gesuchten Druck V_2 in A auf die Wand AB dar, so daß also

$$V_2 = \frac{a}{a + b} \cdot tg\, \alpha \cdot P.$$

Die Komponente $\frac{Y}{\cos\alpha}$ verlegen wir von A nach C und zerlegen sie dort in zwei Komponenten, senkrecht und parallel zu CB; erstere ist

$$\frac{Y}{\cos\alpha}\cdot\cos\alpha = Y,\ \text{letztere}\ \frac{Y}{\cos\alpha}\cdot\sin\alpha = Y\cdot tg\,\alpha.$$

Dadurch ergibt sich der Gesamtdruck in C

$$V_1 = X + Y = P.$$

Der Horizontalschub in C dagegen ist $\frac{a}{a+b}\cdot tg\,\alpha\cdot P$, also gerade so groß als der Druck in A. (Beide werden in der Baukunst Sparrenschub genannt.)

Anm. Berücksichtigt man das Gewicht G des Balkens, so hat man dieses als eine zweite Last in der Mitte von AC vertikal nach unten wirkend zu denken. Die Rechnung ist die entsprechende, doch mag sie dem Leser überlassen werden; die Resultate sind

$$V_1 = P + G;\ V_2 = \left(\frac{a}{a+b}\cdot P + \frac{G}{2}\right)\cdot tg\,\alpha$$

und ebenso groß wie V_2 wäre der Horizontalschub in C.

221.

Aufgabe. Druck und Schub zu bestimmen, wenn der Balken mit einem Ende A auf der vertikalen Wand aufliegt, die Last P in der Mitte des Balkens wirkt und von der Reibung abgesehen wird. (Fig. 84.)

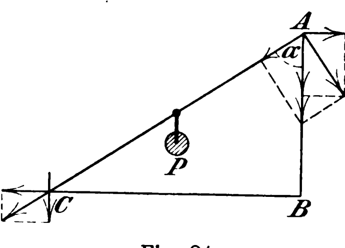


Fig. 84.

Auflösung. Zufolge des Momentensatzes können wir statt P in der Mitte von AC parallel mit ihr $\frac{1}{2}P$ in C und $\frac{1}{2}P$ in A wirken lassen. Das in A angreifende $\frac{1}{2}P$ zerlegen wir in die Komponenten $\frac{1}{2}P\cdot\cos\alpha$ in der Richtung AC und

$\frac{1}{2} P \cdot \sin \alpha$ senkrecht zu AC. Die letztere zerlegt sich wieder in zwei Komponenten; in eine vertikale von der Größe $\frac{1}{2} P \cdot \sin^2 \alpha$, die den Druck auf die vertikale Wand AB angibt, und in die horizontale $\frac{1}{2} P \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4} P \cdot \sin 2 \alpha$.

Der in A in der Richtung AC wirkende Druck zerlegt sich in C in zwei Komponenten, eine senkrecht zu BC von der Größe $\frac{1}{2} P \cdot \cos^2 \alpha$, die andere parallel zu BC von der Größe $\frac{1}{2} P \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{1}{4} P \cdot \sin 2 \alpha$.

Der gesuchte vertikale Druck in C ist nunmehr

$$\frac{1}{2} P + \frac{1}{2} P \cdot \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} P \ (1 + \cos^2 \alpha).$$

Anm. Es mag dem Leser überlassen werden, die Aufgabe für den Fall zu behandeln, daß ein Stück des Balkens über A hinausragt. Die Aufgabe entspricht dann der vorigen, insofern als, wenn $2l$ die Länge des Balkens, a das über A hinausragende Stück ist, das Gewicht P nicht im Mittelpunkte von AC, sondern in der Entfernung l von C und in der Entfernung $(l - a)$ von A angreift.

222.

Liegen die an einem starren, um eine feste Achse $O_1 O_2$ drehbaren Körper angreifenden Kräfte nicht mehr in einer zur Drehungsachse senkrechten Ebene, so kann man nicht mehr von dem statischen Momente der Kräfte in bezug auf einen in ihrer Ebene liegenden Punkt als Momentenpunkt reden. Man hat vielmehr den Begriff des statischen Momentes in sinngemäßer Weise zu erweitern.

Zunächst kann man auch jetzt unbeschränkt der Allgemeinheit, aus demselben Grunde wie früher (§ 209), annehmen, daß die Kräfte in Ebenen liegen, die senkrecht zur Drehungsachse sind, und versteht dann unter dem statischen Momente einer Kraft in bezug auf die Drehungsachse als Momentenachse das Produkt aus der Kraft und dem vom Schnittpunkte der Kraftebene

mit der Drehungsachse auf die Richtung der Kraft gefällten Lote. Dieses Lot heißt auch jetzt der Hebelarm der Kraft.

Über das Vorzeichen der statischen Momente bleibt alles im § 210 Gesagte bestehen.

223.

Zu einer analytischen Darstellung des Momentes einer Kraft in bezug auf eine Achse gelangt man in folgender Weise:

Wir nehmen ein beliebiges Koordinatensystem im Raume an, dessen Z-Achse mit der der Drehungsachse $O_1\ O_2$ zusammenfalle (Fig. 85), und dessen Anfangspunkt ein beliebiger Punkt O dieser Achse sei. Die in A_1 (x_1, y_1, z_1) angreifende Kraft P_1 liegt alsdann in einer zur X-Y-Ebene parallelen Ebene, die die Drehungsachse in C_1 schneiden möge. Wird P_1 in dieser Ebene in zwei zu der X- und der Y-Achse parallele Komponenten X_1 und Y_1 zerlegt, so sind die statischen Momente dieser Komponenten in bezug auf die Achse $O_1\ O_2$

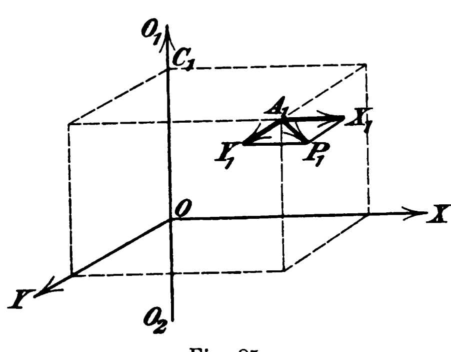


Fig. 85

$$- X_1 \cdot y_1 \text{ und } Y_1 \cdot x_1.$$

Da aber diese Momente mit den Momenten in bezug auf C_1 als Momentenpunkt identisch sind, so gilt der Momentensatz, also ist das statische Moment von P_1 in bezug auf die Drehungsachse $O_1\ O_2$ durch

$$Y_1 \cdot x_1 - X_1 \cdot y_1$$

bestimmt.

224.

Daß auch für zwei in verschiedenen Ebenen, die senkrecht zur Drehungsachse $O_1\ O_2$ sind, liegende parallele Kräfte der Momentensatz gilt, läßt sich leicht zeigen.

Es sei (Fig. 86) $O_1\ O_2$ die Drehungsachse des Körpers, an dem die parallelen Kräfte P_1 und P_2, die in verschiedenen zu $O_1\ O_2$ senkrechten Ebenen liegen, angreifen. Konstruieren wir die Hebelarme $C_1\ A_1 = p_1$ und $C_2\ A_2 = p_2$ der Kräfte und verlegen die Angriffspunkte der Kräfte in die Fußpunkte A_1 und A_2 der Hebelarme, so liegen die vier Punkte A_1, A_2, C_1 und C_2 in einer Ebene. Verbinden wir nun A_1 und A_2 und konstruieren die Resultante R der Kräfte P_1 und P_2, so ist diese gleich $P_1 + P_2$ und den Richtungen von P_1 und P_2 parallel, während ihr Angriffspunkt M auf $A_1\ A_2$ durch die Proportion

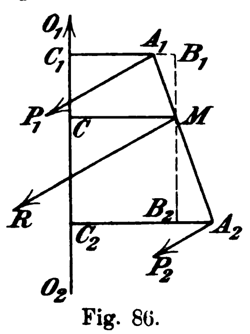


Fig. 86.

$$A_1\ M : M A_2 = P_2 : P_1$$

bestimmt ist. Fällt man von M auf $O_1\ O_2$ den Hebelarm $MC = r$ von R und zieht $B_1\ B_2 \parallel O_1\ O_2$ durch M, so folgt leicht

$$A_1\ B_1 : A_2\ B_2 = A_1\ M : M\ A_2 = P_2 : P_1.$$

Nun ist aber

$$A_1\ B_1 = r - p_1;\ A_2\ B_2 = p_2 - r_1,$$

so daß die Proportion auch lautet

$$(r - p_1) : (p_2 - r) = P_2 : P_1,$$

aus der

$$(P_1 + P_2)\, r = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2$$

oder

$$R \cdot r = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2$$

folgt. Es gilt also auch der Momentensatz für zwei parallele, in verschiedenen Ebenen liegende Kräfte.

Die Ausdehnung dieses Satzes auf beliebig viele parallele und in parallelen, zu $O_1\ O_2$ senkrechten Ebenen liegende Kräfte ist nun dem Früheren analog durchzuführen.

Anm. Da zwei in verschiedenen Ebenen liegende, nicht parallele (windschiefe) Kräfte nicht durch eine Resultante ersetzt werden können (§ 245), so gilt für diese Kräfte der Momentensatz nicht mehr.

225.

Aufgabe. Den Mittelpunkt eines Systems paralleler Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ zu finden, deren Angriffspunkte $A_1, A_2, \ldots A_n$ sämtlich in einer Ebene liegen.

Auflösung. Wir nehmen in der Ebene zwei beliebige aufeinander senkrechte Koordinatenachsen OX und OY an (Fig. 87), bestimmen die Koordinaten der Angriffspunkte A_i in bezug auf diese Achsen, bezeichnen die von A_i mit x_i und y_i und die Koordinaten des gesuchten Mittelpunktes M mit x und y.

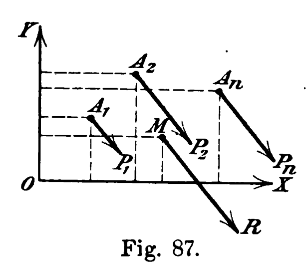


Fig. 87.

Da wir annehmen können, daß die parallelen Kräfte auf der Koordinatenebene senkrecht wirken (§ 196), so gilt der Momentensatz sowohl auf die Achse OY wie auf OX als Momentenachsen, und wir erhalten die Gleichungen

$$R = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = \Sigma P_h$$
$$R \cdot x = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \ldots + P_n \cdot x_n = \Sigma P_h \cdot x_h$$
$$R \cdot y = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + \ldots + P_n \cdot y_n = \Sigma P_h \cdot y_h,$$

woraus man erhält

$$x = \frac{\Sigma P_h \cdot x_h}{\Sigma P_h}; \quad y = \frac{\Sigma P_h \cdot y_h}{\Sigma P_h}.$$

Anm. Es braucht wohl kaum bemerkt zu werden, daß man in diesen Formeln Rücksicht auf die Vorzeichen der Koordinaten und der Kräfte zu nehmen hat.

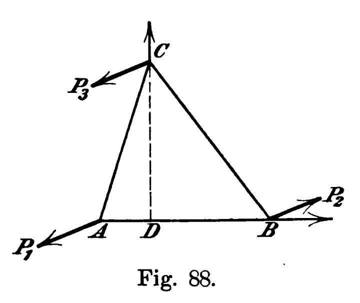


Fig. 88.

226.

Aufgabe. In den Ecken eines vertikalen Dreiecks ABC wirken Kräfte senkrecht auf der Ebene des Dreiecks; in A die Kraft $P_1 = 8$ kg nach vorn; in B die Kraft $P_2 = 12$ kg nach hinten; in C die Kraft $P_3 = 9$ kg nach vorn. Wo liegt der Mittelpunkt dieser Parallelkräfte?

Vom Dreieck seien die Höhe $CD = h = 0{,}9$ m und die durch sie gebildeten Abschnitte der Grundlinie $BD = p = 0{,}7$ m; $AD = q = 0{,}5$ m gegeben (Fig. 88).

Auflösung. Es ist zunächst

$$R = 8 - 12 + 9 = 5 \text{ kg}$$

nach vorn wirkend. Wählt man AB und DC als Momentenachsen und bezeichnet mit ξ den Abstand des Angriffspunktes von R von DC, mit η den Abstand von AB, so erhält man die Gleichungen

$$\xi = \frac{-P_1 \cdot q - P_2 \cdot p + P_3 \cdot 0}{R} = -\frac{12{,}4}{5} \text{ m} = -2{,}48 \text{ m}$$

$$\eta = \frac{P_1 \cdot 0 - P_2 \cdot 0 + P_3 \cdot h}{R} = \frac{8{,}1}{5} \text{ m} = 1{,}62 \text{ m}.$$

227.

Aufgabe. Auf einer in drei Punkten unterstützten horizontalen Ebene (z. B. einem dreibeinigen Tische) wird in M ein vertikaler Druck $R = 1000$ kg ausgeübt. Wie verteilt sich dieser auf die drei Stützpunkte?

Auflösung. Hier ist die umgekehrte Aufgabe gestellt, R in drei parallele Komponenten, deren Angriffspunkte gegeben sind, zu zerlegen. In bezug auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem seien die Koordinaten von M $\xi = 12$; $\eta = 6$, die Koordinaten der Stützpunkte

$$\begin{array}{lll} A_1 & x_1 = 4; & y_1 = 8; \\ A_2 & x_2 = 14; & y_2 = 2; \\ A_3 & x_3 = 16; & y_3 = 10. \end{array}$$

Die allgemeinen Gleichungen des § 225 lauten

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 + P_3 &= 1000 \\ 4\,P_1 + 14\,P_2 + 16\,P_3 &= 12000 \\ 8\,P_1 + 2\,P_2 + 10\,P_3 &= 6000, \end{aligned}$$

aus denen die Werte folgen:

$$P_1 = 260^{20}/_{23} \text{ kg}; \quad P_2 = 434^{18}/_{23} \text{ kg}; \quad P_3 = 304^{8}/_{23} \text{ kg}.$$

Anm. Hätte man den Druck auf vier oder mehr Stützpunkte einer starren Ebene zu verteilen, so wäre die Aufgabe eine unbestimmte gewesen, weil nur drei Gleichungen aufgestellt werden können. Dasselbe gilt, wenn der senkrechte Druck auf eine starre Gerade (Balken) auf drei oder mehr Stützpunkte verteilt werden sollte, weil in diesem Falle nur zwei Bedingungsgleichungen vorhanden sind.

228.

Von den statischen Momenten der Kräfte in bezug auf einen Punkt oder in bezug auf eine Achse, die man auch Drehungsmomente nennt, sind wohl zu unterscheiden die statischen Momente von Kräften in bezug auf eine Ebene, die für die Lösung mancher Aufgaben von Bedeutung sind.

Greifen beliebige Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ an beliebigen Punkten $A_1, A_2, \ldots A_n$ eines starren Körpers an und sind $p_1, p_2, \ldots p_n$ die von den Angriffspunkten auf eine beliebige Ebene gefällten Lote, so nennt man das Produkt $P_h \cdot p_h$ das statische Moment der Kraft P_h in bezug auf jene Ebene als Momentenebene.

Sind insbesondere die Kräfte parallel — und nur diesen Fall werden wir in den Anwendungen haben — so gilt auch hinsichtlich der jetzt definierten Momente der Momentensatz, wie leicht bewiesen werden kann.

229.

Ist M_1 der Angriffspunkt der Resultante R_{1-2} der in A_1 und A_2 angreifenden, parallelen, sonst aber irgend wie gerichteten Kräfte P_1 und P_2 (Fig. 89), so gilt die Proportion

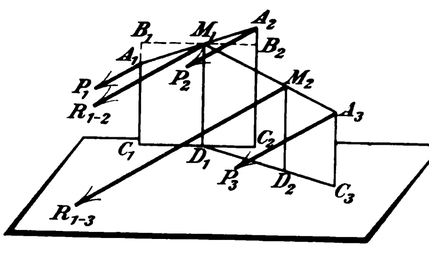


Fig. 89.

$$A_1 M_1 : M_1 A_2 = P_2 : P_1$$

Sind $A_1 C_1 = p_1$, $A_2 C_2 = p_2$, $M_1 D_1 = r_1$ die von A_1, A_2 und M_1 auf die Momentenebene gefällten Lote und zieht man $B_1 B_2 \parallel C_1 C_2$ durch M_1, so ist $A_1 B_1 = r_1 - p_1$; $A_2 B_2 = p_2 - r_1$, und es gelten

$$A_1 M_1 : M_1 A_2 = A_1 B_1 : A_2 B_2,$$

also

$$P_2 : P_1 = (r_1 - p_1) : (p_2 - r_1),$$

woraus

$$R_{1-2} \cdot r_1 = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2$$

folgt, da

$$R_{1-2} = P_1 + P_2$$

ist.

Ist nun M_2 der Angriffspunkt der Resultante R_{1-3} von R_{1-2} und P_3, einer dritten parallelen, in dem beliebig liegenden Punkte A_3 angreifenden Kraft und r_2 der Abstand des Punktes M_2 von der Momentenebene, so gilt ebenso

$$R_{1-3} \cdot r_2 = R_{1-2} \cdot r_1 + P_3 \cdot p_3 = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 + P_3 \cdot p_3.$$

So weiter schließend findet man

$$R \cdot r = P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 + \ldots + P_n \cdot p_n,$$

d. h. für jede beliebige als Momentenebene gewählte Ebene ist das statische Moment der Resultante beliebig vieler paralleler Kräfte gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte.

Es mag daran erinnert werden, daß der Angriffspunkt der Resultante, d. h. der Punkt, durch den die Richtung der Resultante geht, wenn auch die Kräfte ihre Richtung gleichmäßig ändern, so lange sie nur parallel bleiben, der Mittelpunkt der parallelen Kräfte heißt. Vergl. § 196.

230.

Aufgabe. Den Mittelpunkt M eines Systems paralleler Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ zu finden, die einen starren Körper in beliebigen Punkten $A_1, A_2, \ldots A_n$ angreifen.

Auflösung. Wählt man ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem im Raume und sind x_i, y_i, z_i die gegebenen Koordinaten des Punktes A_i in bezug auf dieses Koordinatensystem, x_0, y_0, z_0 aber die gesuchten Koordinaten des Mittelpunktes M, so kann man jede der drei Koordinatenebenen als Momentenebene ansehen und hat, wenn R die Resultante der Kräfte P ist, für die YZ-Ebene als Momentenebene die Gleichung

$$R \cdot x_0 = P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \ldots + P_n \cdot x_n;$$

ebenso folgt für die XZ-Ebene

$$R \cdot y_0 = P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + \ldots + P_n \cdot y_n$$

und für die XY-Ebene

$$R \cdot z_0 = P_1 \,.\, z_1 + P_2 \,.\, z_2 + \ldots + P_n \cdot z_n;$$

da außerdem $R = \Sigma P_i$ ist, so hat man zur Bestimmung von x_0, y_0, z_0 das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} R &= P_1 + P_2 + \ldots + P_n \\ R \cdot x_0 &= P_1 \cdot x_1 + P_2 \cdot x_2 + \ldots + P_n \cdot x_n \\ R \cdot y_0 &= P_1 \cdot y_1 + P_2 \cdot y_2 + \ldots + P_n \cdot y_n \\ R \cdot z_0 &= P_1 \cdot z_1 + P_2 \cdot z_2 + \ldots + P_n \cdot z_n, \end{aligned}$$

aus dem die Werte folgen

$$x_0 = \frac{\Sigma P_h \cdot x_h}{\Sigma P_h}; \qquad y_0 = \frac{\Sigma P_h \cdot y_h}{\Sigma P_h}; \qquad z_0 = \frac{\Sigma P_h \cdot z_h}{\Sigma P_h}.$$

Zusatz 1. Diese Gleichungen sind offenbar ganz allgemein gültig, wenn auch die parallelen Kräfte teilweise entgegengesetzt wirken oder wenn der Anfangspunkt O des Koordinatensystems innerhalb der Angriffspunkte angenommen ist; nur hat man die Vorzeichen der Kräfte und der Koordinaten zu berücksichtigen.

Zusatz 2. Die abgeleiteten Gleichungen spielen eine wesentliche Rolle in der Schwerpunktsbestimmung zusammengesetzter Körper (XVIII. Buch), wenn man die Schwerpunkte der einzelnen Teile der Körper kennt.

Aufgaben.

174. Das statische Moment einer Kraft $P = 50$ kg in bezug auf einen Punkt O ist $M = 37^1/_2$ mkg; wie groß ist der Hebelarm p der Kraft?

Antw.: $p = \frac{M}{P} = 0{,}75$ m.

175. Wie groß ist das statische Moment M einer Kraft $P = 450$ kg in bezug auf einen vom Angriffspunkte der Kraft um $a = 1{,}50$ m entfernten Punkt, wenn die Verbindungslinie dieser beiden Punkte mit der Richtung der Kraft den Winkel $\alpha = 30^0$ bildet?

Antw.: $M = P \,.\, a \,.\, \sin \alpha = 337{,}5$ mkg.

176. An einem um eine feste Achse drehbaren Körper wirken in einer zur Drehungsachse senkrechten Ebene drei Kräfte $P_1 = 8$ kg;

$P_2 = 5$ kg und $P_3 = 12$ kg an den Hebelarmen $p_1 = 50$ cm; $p_2 = 20$ cm und $p_3 = 40$ cm; sie sollen durch eine einzige Kraft R am Hebelarme $r = 1$ m ersetzt werden; wie groß ist diese, wenn

a) das Moment der drei Kräfte positiv;

b) das Moment von P_1 und P_2 positiv, das von P_3 negativ ist?

Antw.: a) $R = \frac{P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 + P_3 \cdot p_3}{r} = 9{,}800$ kg;

b) $R = \frac{P_1 \cdot p_1 + P_2 \cdot p_2 - P_3 \cdot p_3}{r} = 0{,}200$ kg.

177. Ein eiserner I-Träger von $l = 3{,}6$ m Länge und $G = 180$ kg Gewicht ist an beiden Enden A und B auf $a = 10$ cm gelagert und trägt eine Last $P = 1000$ kg, deren Angriffspunkt vom linken Ende A des Trägers die Entfernung $p = 1{,}45$ m hat; wie groß sind die Auflagerdrucke X in A und Y in B, wenn man, wie üblich, annimmt, daß sie in der Mitte der Auflagefläche wirken, und wenn das Gewicht als eine in der Mitte von $A\,B$ wirkende Last angesehen wird?

Antw.: $X = \frac{P\left(l - p - \frac{a}{2}\right)}{l - a} + \frac{1}{2}\,G = 690$ kg;

$Y = \frac{P\left(p - \frac{a}{2}\right)}{l - a} + \frac{1}{2}\,G = 490$ kg.

178. Ein Balken $A\,B$ von der Länge $l = 2{,}5$ m und dem Gewichte 200 kg ist bei A um die Strecke $A\,C = a = 0{,}50$ m eingemauert und trägt am andern Ende B eine Last $P = 500$ kg; wie groß sind die Stützdrucke X und Y in den Punkten A und C? (Zu beachten ist, daß die Stützdrucke umgekehrt gerichtet sind, in C aufwärts, in A abwärts).

Antw.: $X = \frac{G\left(\frac{l}{2} - a\right) + P\,(l - a)}{a} = 2300$ kg;

$Y = \left(\frac{1}{2}\,G + P\right) \cdot \frac{l}{a} = 3000$ kg;

179. Eine Welle $A\,B$ von der Länge $l = 3{,}00$ m ist in A und C gelagert, so daß $A\,C = a = 2{,}40$ m; an ihr wirken in den Punkten D und B die Lasten $P_1 = 700$ kg und $P_2 = 500$ kg; wie groß sind die von diesen Lasten herrührende Auflagerdrucke X und Y in A und C, wenn $A\,D = b = 1{,}80$ m ist?

Antw.: $X = \frac{(a - b) \cdot P_1 - (l - a) \cdot P_2}{a} = 50$ kg;

$Y = \frac{b \cdot P_1 + l \cdot P_2}{a} = 1150$ kg.

Anm. Wäre die Last P_2 größer, etwa 800 kg, oder wäre l größer, während a und b unverändert blieben, so würde der Auflagerdruck in A negativ werden, die Welle würde dann um den Stützpunkt C umkippen, wenn sie in A nur aufgelagert und nicht befestigt wäre.

180. In dem durch seine rechtwinkligen Koordinaten gegebenen Punkte A (x_1, y_1, z_1) greift eine Kraft P an, deren Komponenten nach den Achsen des Koordinatensystems X, Y und Z sind; wie groß sind die Drehungsmomente dieser Kraft in bezug auf die drei Koordinatenachsen?

$$x_1 = 30 \text{ cm}; \quad X = 25 \text{ kg};$$
$$y_1 = 20 \text{ cm}; \quad Y = 35 \text{ kg};$$
$$z_1 = 10 \text{ cm}; \quad Z = 45 \text{ kg}.$$

Antw.: $M_x = 5{,}5$ mkg; $M_y = -11$ mkg; $M_z = +5{,}5$ mkg.

181. In den Ecken eines Quadrats $A\,B\,C\,D$ mit der Seite a greifen vier parallele und gleichgerichtete Kräfte $P_1 = 5$ kg; $P_2 = 7$ kg; $P_3 = 8$ kg; $P_4 = 4$ kg an; in welchen Entfernungen von $A\,B$ und $A\,D$ liegt der Mittelpunkt dieser parallelen Kräfte?

Antw.: $^1/_2\, a$ und $^5/_8\, a$.

182. In den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks mit der Seite a greifen parallele und gleichgerichtete Kräfte P_1, P_2 und P_3 an; welche Entfernungen von den drei Seiten hat der Mittelpunkt dieser Kräfte?

Antw: $\frac{P_1}{P_1 + P_2 + P_3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$; $\frac{P_2}{P_1 + P_2 + P_3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}$;

$$\frac{P_3}{P_1 + P_2 + P_3} \cdot \frac{a}{2}\sqrt{3}.$$

183. Eine kreisförmige Platte ist in drei Punkten ihrer Peripherie A_1, A_2 und A_3, die ein gleichseitiges Dreieck bilden, gestützt; wie verteilt sich auf die drei Stützen der Druck einer Last $P = 100$ kg, die auf der Platte in der Mitte des nach A_1 gezogenen Radius liegt?

Antw.: $66^2/_3$ kg; $16^1/_6$ kg; $16^1/_6$ kg.

Sechzehntes Buch.

Von den Kräftepaaren.

231.

Zwei gleiche parallele, aber entgegengesetzt gerichtete Kräfte P, die an verschiedenen Punkten eines starren Körpers angreifen und nicht durch eine einzige Kraft ersetzt werden können (§ 204), heißen ein Kräftepaar. Der senk-

rechte Abstand $A\,B = p$ der beiden Kraftrichtungen, in dessen Endpunkten man sich die Kräfte angebracht denken kann, da sie ja in jeden beliebigen Punkt ihrer Richtung verlegt werden können, heißt der Hebelarm oder kürzer der Arm des Kräftepaares, und das Produkt aus einer der Kräfte P und dem Arme p, also die Größe $P \cdot p$ heißt das Moment des Kräftepaares. Das Moment wird positiv für rechtsdrehende, negativ für linksdrehende Paare gerechnet.

Der Kürze halber bezeichnen wir das Kräftepaar durch „$(+\,P, \,-\,P)$ am Arme p".

Die Dimension des Momentes eines Kräftepaares ist dieselbe wie die des statischen Momentes oder die der Arbeit (Kraft mal Strecke). Die Einheit des Momentes ist das mkg oder das Erg.

232.

Nimmt man einen beliebigen Punkt O in der Ebene eines Kräftepaares an, so läßt sich leicht beweisen, daß das Moment des Kräftepaares gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der einzelnen Kräfte in bezug auf O als Momentenpunkt ist.

Liegt O außerhalb des Kräftepaares (Fig. 90), und ist e sein Abstand von der Richtung der in B angreifenden Kraft $-\,P$, also $p + e$ sein Abstand von der in A angreifen-

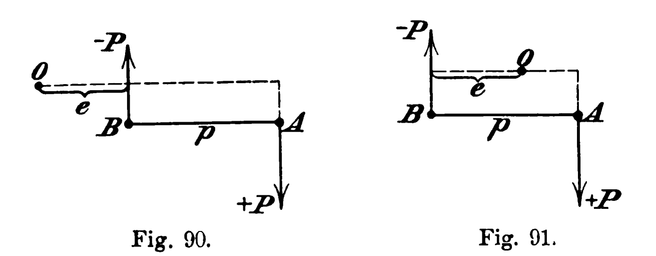


Fig. 90. Fig. 91.

den Kraft $+\,P$, so ist $P \cdot (p + e)$ das statische Moment der in A angreifenden Kraft, $-\,P \cdot e$ das statische Moment der in B angreifenden Kraft in bezug auf O; ihre Summe aber ist $P \cdot p$.

Liegt O innerhalb des Kräftepaares (Fig. 91), so ist bei derselben Bezeichnung wie vorher $P \cdot (p - e)$ das statische Moment der in A angreifenden Kraft, $(-\,P) \cdot (-\,e)$

$= P \cdot e$ das statische Moment der in B angreifenden Kraft in bezug auf O; ihre Summe ist wieder, wie behauptet, $P \cdot p$.

Aus dem Vorstehenden folgt, daß das auf einen Punkt bezogene statische Moment der Kräfte eines Paares von der Entfernung des Momentenpunktes von den Kraftrichtungen unabhängig ist.

Auch ist unmittelbar einleuchtend, daß zwei Kräftepaare entgegengesetzt gleich und daher im Gleichgewichte sind, wenn ihre Kräfte an demselben Arme entgegengesetzt gleich sind.

233.

Bei einem Kräftepaare kommt es also auf dreierlei an:

a) auf die Ebene, in der das Kräftepaar wirkt;

b) auf die Richtung, in der es zu drehen strebt;

c) auf das Moment.

Was das erste anlangt, so ist leicht zu beweisen, daß ein Kräftepaar nicht nur beliebig in seiner Ebene verlegt werden kann, sondern daß es auch aus seiner Ebene in eine andere parallele Ebene verlegt werden kann, sofern letztere mit der ersteren starr verbunden ist.

Um das erstere zu beweisen, zeigen wir, daß ein Kräftepaar in seiner Ebene sich selbst parallel verschoben und um den Mittelpunkt seines Armes gedreht werden kann.

Um zu zeigen, daß die Kräftepaare $(+P, -P)$ am Arme AB und $(+Q, -Q)$ am Arme CD, wenn $AB \# CD$ und $P = Q$ ist (Fig. 92), gleichwertig sind, denken wir uns am Arme CD ein drittes, dem Paare $(+Q, -Q)$ entgegengesetzt gleiches $(+S, -S)$ angebracht, so daß $(+Q, -Q)$ und $(+S, -S)$ im Gleichgewichte sind, weil sie einander direkt aufheben. Aber auch $(+P, -P)$ ist mit $(+S, -S)$ im Gleichgewichte, denn $+P$ und $+S$ können durch eine im Mittelpunkte von AD wirkende Resultante $+2P$ und $-P$ und $-S$ durch eine im Mittelpunkte von BC wirkende $-2P$ ersetzt werden; beide Mittelpunkte aber fallen nach M, weil $ABDC$ ein Parallelogramm ist, so daß $+2P$ und $-2P$ in M im Gleichgewichte sind.

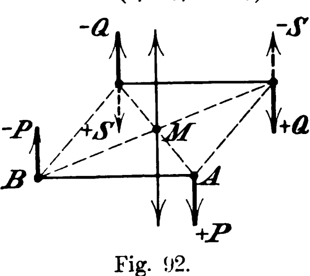


Fig. 92.

Ferner sind die Kräftepaare ($+P$, $-P$) am Arme AB und ($+Q$, $-Q$) am Arme CD, wenn $P = Q$, $AB = CD$ und M der gemeinsame Mittelpunkt beider Arme ist (Fig. 93) gleichwertig, weil sie beide mit einem am Arme CD gedachten, dem Paare ($+Q$, $-Q$) entgegengesetzt gleichen Paare ($+S$, $-S$) im Gleichgewichte sind. ($+Q$, $-Q$) und ($+S$, $-S$) heben einander direkt auf. Daß auch ($+P$, $-P$) und ($+S$, $-S$) im Gleichgewichte sind, erkennt man, wenn man $+P$ und $-S$ in ihrem Schnittpunkte E, $-P$ und $+S$ in ihrem Schnittpunkte F vereinigt. Die entstehenden Resultanten sind gleichgroß und beider Richtungen gehen entgegengesetzt durch M, da sie die Winkel AEC und BFD halbieren.

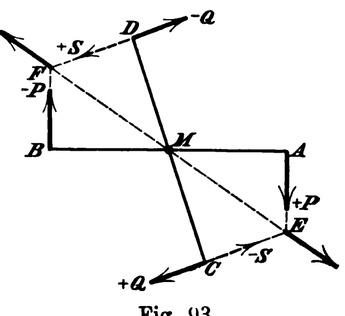


Fig. 93.

Auch die zweite Behauptung wird genau so bewiesen; es seien E_1 und E_2 (Fig. 94) zwei parallele Ebenen; in E_1 wirke das Kräftepaar ($+P$, $-P$) am Arme AB, in E_2 das Paar ($+Q$, $-Q$) am Arme CD, und es sei $P = Q$ und $AB \# CD$. Man denke sich in E_2 das dem Paare ($+Q$, $-Q$) entgegengesetzt gleiche ($+S$, $-S$) angebracht, das mit ($+Q$, $-Q$) direkt im Gleichgewichte ist. Vereinigt man $+P$ und $+S$ zu $+2P$ im Mittelpunkte von AD, $-P$ und $-S$ zu $-2P$ im Mittelpunkte von BC, so heben sich diese auf, da die Mittelpunkte von AD und BC als der Diagonalen des Parallelogramms $ABDC$ in M zusammenfallen.

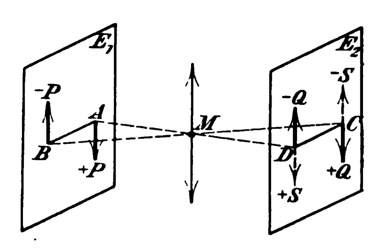


Fig. 94.

234.

Lehrsatz. Ein Kräftepaar ($+P$, $-P$) am Arme $AB = p$ kann in ein in gleichem Sinne wirkendes ($+Q$, $-Q$) am Arme $BC = q$ verwandelt werden, vorausgesetzt, daß die Momente $P \cdot p$ und $Q \cdot q$ beider Paare gleich sind.

Beweis. Fügt man nämlich (Fig. 95) in den Punkten B und C die vier gleichen, P parallelen und zunächst beliebig großen Kräfte $+ Q$, $- Q$, $+ Q$, $- Q$ hinzu, so wird an dem Kraftsysteme nichts geändert. Vereinigt man aber die in A und C nach unten wirkenden Kräfte $+ P$ und $+ Q$, so fällt der Angriffspunkt ihrer Resultante $P + Q$ dann und nur dann in den Punkt B, wenn

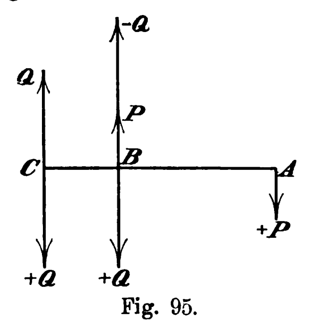


Fig. 95.

$$Q \cdot q = P \cdot p$$

ist. Unter dieser Voraussetzung ist aber die Resultante $P + Q$ mit der in B wirkenden Kraft $-(P + Q)$ im Gleichgewichte, so daß nur das Kräftepaar $(+ Q, \; - Q)$ am Arme $B\,C$ wirksam bleibt.

Anm. Man nennt diesen wichtigen Satz den Satz von der Änderung eines Kräftepaares. Nach ihm kann man insbesondere jedes Kräftepaar $(+ P, \; - P)$ am Arme p verwandeln in ein Kräftepaar $(+ P \cdot p, \; - P \cdot p)$ am Arme 1; ein solches Kräftepaar pflegt man auch ein reduziertes Kräftepaar zu nennen.

235.

Um weitere Untersuchungen über Kräftepaare ausführen zu können, hat Poinsot eine symbolische Darstellung derselben eingeführt.

Errichtet man auf der Ebene eines Kräftepaares ein Lot nach derjenigen Seite der Ebene, von der aus das Kräftepaar rechtsdrehend (positiv) erscheint und wählt die Länge dieses Lotes entsprechend dem Momente des Kräftepaares oder entsprechend der Größe der Kraft des reduzierten Kräftepaares, so nennt man dieses Lot die Achse des Kräftepaares (Fig. 96).

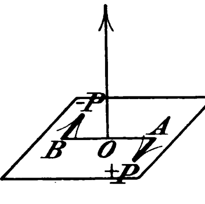


Fig. 96.

Da das Kräftepaar beliebig in der Ebene verlegt werden kann, so ist es beliebig, in welchem Punkte man die Achse errichten will. Die Achse stellt also sowohl die Ebene als auch die Drehungsrichtung und das Moment des

Kräftepaares, d. h. alles dar, was für ein Kräftepaar wesentlich ist. Die in § 233 und 234 bewiesenen Sätze können nunmehr kurz ausgesprochen werden:

Kräftepaare mit gleichen und gleichgerichteten Achsen sind gleichwertig; ferner sind Kräftepaare mit gleichen und entgegengesetzt gerichteten Achsen im Gleichgewichte.

236.

Zusammensetzung von Kräftepaaren. Durch die Darstellung eines Kräftepaares durch seine Achse ist, wie wir sehen werden, die Zusammensetzung von Kräftepaaren genau dieselbe wie die Zusammensetzung der Kräfte.

Sind zwei Kräftepaare $(+P_1, -P_1)$ am Arme p_1 und $(+P_2, -P_2)$ am Arme p_2 in derselben oder in parallelen Ebenen gegeben, so können sie beide auf den Arm 1 reduziert und in einer Ebene an den Arm 1 gelegt werden; die an jedem Ende dieses Armes angreifenden Kräfte $P_1 . p_1$ und und $P_2 . p_2$ setzen sich dann zu der algebraischen Summe $P_1 . p_1 + P_2 . p_2$ zusammen; es ist daher auch die Achse des resultierenden Kräftepaares gleich der algebraischen Summe der Achsen der einzelnen Kräftepaare.

Ganz analog verfährt man mit mehr als zwei in derselben oder in parallelen Ebenen liegenden Kräftepaaren. Es gilt also der Satz:

Kräftepaare in derselben Ebene oder in parallelen Ebenen lassen sich zu einem Kräftepaare vereinigen, dessen Achse gleich der algebraischen Summe der Achsen der einzelnen Kräftepaare ist.

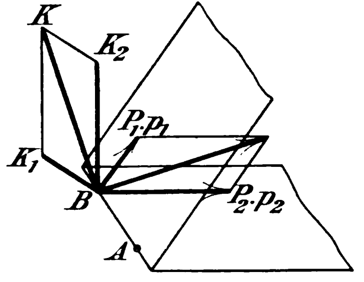


Fig. 97.

Liegen ferner zwei Kräftepaare $(+P_1, -P_1)$ am Arme p_1 und $(+P_2, -P_2)$ am Arme p_2 in zwei einander schneidenden Ebenen, so kann man beide auf den Arm 1 reduzieren und sie dann jedes in seiner Ebene so verlegen, daß sie den gemeinsamen Arm $1 = A\,B$ (Fig. 97) in der Schnittkante ihrer beiden Ebenen haben.

Im Punkte A wirken dann die Kräfte $+ P_1 . p_1$ und $+ P_2 . p_2$, in B die Kräfte $- P_1 . p_1$ und $- P_2 . p_2$ unter einem Winkel, der gleich dem Neigungswinkel α der Ebenen ist. Vereinigt man je die in A und die in B wirkenden Kräfte, so gibt diese Vereinigung ein Kräftepaar mit dem Arme 1 und den Kräften, die durch das Kräfteparallelogramm aus $P_1 . p_1$ und $P_2 . p_2$ und dem Winkel α der Ebenen bestimmt sind.

Denkt man sich aber das Parallelogramm z. B. in B um 90^0 gedreht, so stehen die Seiten $B K_1$ und $B K_2$ des Parallelogramms in der neuen Lage senkrecht auf den Ebenen der Kräftepaare $(+ P_1, - P_1)$ und $(+ P_2, - P_2)$, stellen also die Achsen der Kräftepaare dar, da sie die Größen $P_1 \cdot p_1$ und $P_2 \cdot p_2$ haben; ebenso steht aber die Diagonale $B K$ senkrecht auf der Ebene des resultierenden Kräftepaares und ist, da es gleich der Kraft des reduzierten Kräftepaares ist, die Achse derselben.

Hat man also zwei Kräftepaare in zwei unter einem Winkel geneigten Ebenen, so stellt die Diagonale des aus den beiden Achsen der Kräftepaare und dem Neigungswinkel der Ebenen konstruierten Parallelogramms die Achse des resultierenden Kräftepaares dar.

Genau ebenso werden mehrere Kräftepaare, deren Ebenen sich in derselben oder in parallelen Kanten schneiden, durch Konstruktion des Achsenpolygons zu einem einzigen zusammengesetzt.

Genau wie bei den Kräften folgt dann, daß zwei Kraftpaare, deren Achsen einen Winkel bilden, nie im Gleichgewichte sein können, daß aber mehrere Kräftepaare an einem starren Körper im Gleichgewichte sind, wenn das aus ihren Achsen gebildete Polygon ein geschlossenes ist.

Hat man weiter drei Kräftepaare, deren Ebenen sich in drei durch einen Punkt gehenden Kanten schneiden, so erhält man die Achse des resultierenden Kräftepaares als die Diagonale des aus den drei Achsen der gegebenen Kräftepaare gebildeten Parallelepipeds.

237.

Zerlegung eines Kräftepaares. Umgekehrt muß also auch die Aufgabe der Zerlegung eines Kräftepaares in zwei Paare, deren Achsen gegebene Richtungen haben sollen,

genau der entsprechenden Aufgabe der Zerlegung einer Kraft in zwei Komponenten nach gegebenen Richtungen gleich sein. Ein weiteres Eingehen auf diese Zerlegung ist daher vollständig überflüssig. Ebenso kann jedes Kräftepaar im Raume in drei Kräftepaare zerlegt werden, deren Achsen rechtwinklig aufeinander stehen.

Wie die Zusammensetzung und Zerlegung der Kräftepaare genau die gleiche wie die der Kräfte geworden ist, so ist auch die Berechnung der Achse des resultierenden Kräftepaares der Größe und Richtung nach aus den Achsen der einzelnen Kräftepaare (und umgekehrt) genau in derselben Weise und nach denselben Formeln wie bei den Kräften zu bewerkstelligen.

238.

Verlegung des Angriffspunktes einer Kraft in einen beliebigen Punkt. Greift an einem starren Körper in dem Punkte A (Fig. 98) eine Kraft P an, so wird an ihrer Wirkung offenbar nichts geändert, wenn man in einem beliebigen andern Punkte B des starren Körpers in der durch die Richtung der Kraft P und den Punkt B gegebenen Ebene zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte $+P_1$ und $-P_1$ anbringt, deren Größe gleich P und deren Richtung der von P parallel ist. Die drei Kräfte sind also der in A allein wirkenden gleichwertig.

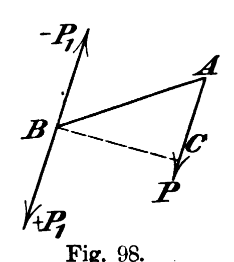


Fig. 98.

Nun kann man aber das System dieser drei Kräfte auch auffassen als eine in B angreifende Kraft P_1 und als ein Kräftepaar $(+P, -P_1)$, dessen Arm das von B auf die Richtung von P gefällte Lot $BC = p$ ist.

Jede in irgendeinem Punkte eines starren Körpers angreifende Kraft kann also ersetzt werden durch eine andere ihr parallele, gleiche und gleichgerichtete Kraft, die an irgendeinem anderen Punkte des starren Körpers angreift, und durch ein Kräftepaar mit denselben Kräften an einem Arme, der gleich ist dem Abstande des neuen Angriffspunktes von der Richtung der Kraft im ersten Punkte.

239.

Aufgabe. An einem mit der in den Pfannenlagern A und B drehbaren Achse $AB = a$ fest verbundenen rechtwinkligen Arme $CD = b$ wirkt in D eine Kraft P parallel mit der Achse AB; es soll der Druck in den Pfannenlagern berechnet werden (Fig. 99).

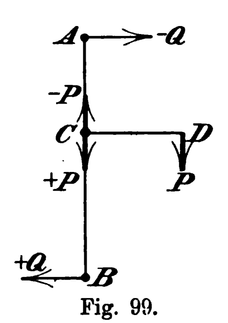


Fig. 99.

Auflösung. Denkt man sich in C in der Richtung der Achse zwei gleiche entgegengesetzte Kräfte $+P$ und $-P$ angebracht, so ist dadurch nichts geändert. Die erstere Kraft $+P$ drückt die Achse nach der Richtung AB gegen die Pfanne B. Die andere Kraft $-P$ bildet mit der in D angreifenden Kraft P das Kräftepaar $(+P, -P)$ am Arme b. Verwandelt man dieses in ein anderes $(+Q, -Q)$ am Arme a, so muß $Q = \frac{b}{a} P$ sein.

In den Pfannenlagern wirkt also senkrecht zur Achse der Druck $-\frac{b}{a} P$ in A und $+\frac{b}{a} P$ in B; der Druck ist also um so geringer, je kleiner b gegen a ist. (Je weiter die Angeln einer Tür voneinander entfernt sind, desto besser halten sie.)

Anm. Ist die in D wirkende Kraft nicht parallel der Achse, so hat man sie erst in eine zur Achse parallele und eine zur Achse senkrechte Komponente zu zerlegen.

240.

Die Robervalsche Wage bietet eine Erscheinung, die scheinbar gegen statische Gesetze, namentlich gegen die Theorie der Momente streitet und deshalb auch das statische Paradoxon genannt wird.

Sie besteht aus vier ein Parallelogramm bildenden Stangen AB, CD, AC und BD (Fig. 100), die in den Ecken drehbar verbunden sind und von denen AB und CD genau um ihre Mitten E und F an einer vertikalen Stütze drehbar

sind. Wie dann auch die Stangen $A\,B$ und $C\,D$ gedreht werden, sie bleiben parallel, während die Querstangen $A\,C$ und $B\,D$, da sie gleich und parallel $E\,F$ sind, stets vertikal bleiben. Befestigt man nun an diesen Querstangen zwei zu ihnen senkrechte Arme $G\,H$ und $K\,I$ und bringt an deren Enden gleiche Gewichte P an, so zeigt sich der merkwürdige Umstand, daß die Vorrichtung in jeder Lage im Gleichgewichte ist, ganz abgesehen davon, ob die Arme $G\,H$ und $K\,I$ gleiche oder verschiedene Länge haben.

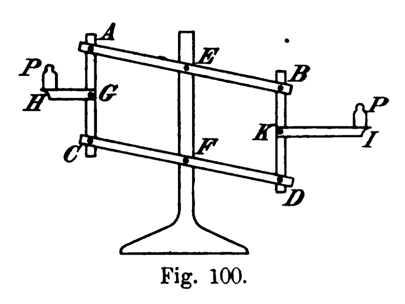


Fig. 100.

Poinsot zeigt durch die Theorie der Kräftepaare die Notwendigkeit des Gleichgewichts in folgender Weise.

In K lasse man zwei vertikale, dem Gewichte P gleiche Kräfte $+ P'$ und $- P'$ angreifen, dann hat man außer der Kraft P' in K das Kräftepaar $(+ P, - P')$ am Arme $K\,I$. Dieses kann in ein anderes $(+ Q, - Q)$ am Arme $B\,D$ verwandelt werden, das offenbar durch die festen Stützpunkte E und F vernichtet wird, so daß in K nur noch die Kraft $P' = P$ wirkt. Ebenso ist es auf der anderen Seite.

Das Gleichgewicht findet auch noch statt, wenn man den einen horizontalen Arm, z. B. $G\,H$, innerhalb des Parallelogramms $A\,C\,F\,E$ anbringt.

Aufgaben.

184. An den Endpunkten einer $a = 1{,}20$ m langen starren Geraden wirken senkrecht zur Geraden zwei gleiche entgegengesetzt gerichtete Kräfte $P = 18$ kg; wie groß ist das Moment dieses Kräftepaares?

Antw.: $M = P \,.\, a = 21{,}6$ mkg.

185. Wie groß ist das Moment eines Kräftepaares (+ 15 kg, — 15 kg), wenn die Verbindungslinie der Angriffspunkte der Kräfte die Länge $l = 0{,}80$ m hat und mit der Richtung der Kräfte den Winkel $\alpha = 30^0$ bildet?

Antw.: $M = 15 \,.\, l \,.\, \sin \alpha = 6$ mkg.

186. Ein Kräftepaar (+ 30 kg, — 30 kg) am Arme 1,50 m soll in ein anderes (+ 45 kg, — 45 kg) verwandelt werden. Wie groß ist der Arm dieses Paares?

Antw.: $x = 1$ m.

187. **Ein Kräftepaar (+ 10 kg, — 10 kg) am Arme $p = 2{,}25$ m wird in ein anderes am Arme $q = 1{,}25$ m verwandelt; wie groß sind die Kräfte dieses Paares?**

Antw.: + 18 kg, — 18 kg.

188. An einem starren Körper wirken in derselben Ebene zwei Kräftepaare in gleichem Sinne, das eine (+ 10 kg, — 10 kg) am Arme 1 m, das andere (+ 15 kg, — 15 kg) am Arme 1,6 m; beide sollen zu einem Kräftepaare (+ 25 kg, — 25 kg) vereinigt werden; wie groß ist der Arm dieses Kräftepaares?

Antw.: 1,36 m.

189. Eine in A angreifende Kraft $P = 80$ kg soll in einen Punkt B verlegt werden, der von A die Entfernung $e = 0{,}40$ m hat und dessen Verbindungslinie mit A gegen die Richtung von P unter dem Winkel $\alpha = 45^0$ geneigt ist. Wie groß ist das Moment des hinzukommenden Kräftepaares?

Antw.: $M = P \,.\, e \,.\, \sin\alpha = 22{,}628$ mkg.

Siebzehntes Buch.

Allgemeine Bedingungen für das Gleichgewicht der Kräfte am starren Körper.

241.

Nachdem bereits im Vorhergehenden, besonders im XIV. Buche, an mehreren Stellen die Bedingungen angegeben sind, unter denen Kräfte am starren Körper in besonderen Lagen im Gleichgewichte sind, sind wir nunmehr imstande, die allgemeinen Bedingungen aufzustellen, unter denen beliebig viele an einem starren Körper wirkende Kräfte, die nicht mehr wie bisher in einer Ebene zu liegen brauchen, im Gleichgewichte sind.

Den Körper können wir uns dabei in Ruhe denken. Zwar ist es möglich, daß sich der Körper unter dem Einflusse anderer Kräfte, die nicht mit Gegenstand der Untersuchung sind, in irgendeinem Bewegungszustande befindet;

wenn aber die betrachteten Kräfte im Gleichgewichte sind, so können sie an diesem Bewegungszustande nichts ändern. Wenn daher die Kräfte am ruhenden Körper im Gleichgewichte sind, so sind sie es auch am bewegten; wenn sie dagegen an dem ruhenden eine Bewegung erzeugen, so erzeugen sie zufolge des Prinzips der Unabhängigkeit der Bewegungen genau dieselbe Bewegung auch am bewegten Körper, wie auch immer seine bisherige Bewegung beschaffen war.

242.

Wenn nun an dem Körper n Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ in den beliebig zerstreuten Punkten $A_1, A_2, \ldots A_n$ wirken, so können wir nach der im § 238 gelehrten Weise die Angriffspunkte aller Kräfte in den beliebig gewählten Punkt B verlegen. Dadurch erhalten wir in B n Kräfte, die den Kräften $P_1, P_2, \ldots P_n$ an Größe und Richtung gleich sind, und die durch eine einzige Kraft, ihre Resultante R, ersetzt werden können. Außerdem führt jede Kraft P_h noch auf ein Kräftepaar $(+P_h, -P_h)$, dessen Moment $P_h \cdot p_h$ und dessen Achse der Größe und Richtung nach durch die Lage des gewählten Punktes B und durch die gegebenen Kräfte vollständig bestimmt ist. Diese n Kräftepaare, deren Achsen $K_1, K_2, \ldots K_n$ ihren Fußpunkt in B haben, lassen sich zu einem einzigen Kräftepaare K nach den im vorigen Buche gefundenen Methoden vereinigen.

Da nun das Kräftepaar K nicht durch eine einzige Kraft ersetzt werden kann, so sind die Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ dann und nur dann im Gleichgewichte, wenn sowohl die Mittelkraft wie das resultierende Kräftepaar, jedes für sich zu Null werden, so daß die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen durch die zwei Gleichungen

$$R = 0 \tag{1}$$

$$K = 0 \tag{2}$$

ausgedrückt werden.

243.

Als gegeben haben wir die n Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ ihrer Größe und Richtung nach und die Lage ihrer Angriffspunkte $A_1, A_2, \ldots A_n$ anzusehen. Unsere Aufgabe ist es

nunmehr, jene zwei allgemeinen Gleichungen durch die gegebenen Stücke auszudrücken.

Zu diesem Zwecke wählen wir ein beliebiges Koordinatensystem mit den Achsen $O\,X$, $O\,Y$ und $O\,Z$ (Fig. 101) und nehmen an, es seien die Koordinaten von A_h durch x_h, y_h, z_h gegeben.

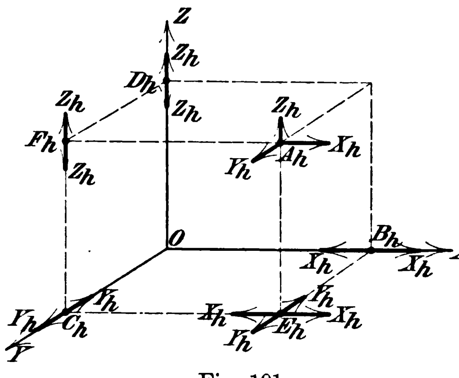


Fig. 101.

Eine jede Kraft P_h soll ferner ihrer Richtung nach durch die Winkel α_h, β_h, γ_h bestimmt sein, die sie mit den Achsen bildet.

Zerlegen wir jetzt die in A_h angreifende Kraft P_h in ihre Komponenten X_h, Y_h, Z_h nach den drei Achsenrichtungen, so sind diese durch die Gleichungen

$$X_h = P_h \cdot \cos \alpha_h; \quad Y_h = P_h \cdot \cos \beta_h; \quad Z_h = P_h \cdot \cos \gamma_h$$

mit P_h; α_h; β_h; γ_h mitgegeben.

Fällen wir nun von A_h auf die Koordinatenachsen die Lote $A_h B_h \perp O\,X$; $A_h C_h \perp O\,Y$; $A_h D_h \perp O\,Z$, so können wir in B_h zwei X_h parallele und gleiche, einander entgegengesetzt gerichtete Kräfte, in C_h zwei Y_h parallele und gleiche, einander entgegengesetzt gerichtete Kräfte und in D_h zwei Z_h parallele und gleiche, einander entgegengesetzt gerichtete Kräfte angebracht denken. Fällen wir ferner $A_h E_h$ senkrecht auf die $X\,Y$-Ebene und $A_h F_h$ senkrecht auf die $Y\,Z$-Ebene und bringen in E_h sowohl zwei X_h parallele und gleiche, einander entgegengesetzt gerichtete Kräfte als auch zwei Y_h parallele und gleiche, einander entgegengesetzt gerichtete Kräfte und endlich in F_h zwei Z_h parallele und gleiche, einander entgegengesetzt gerichtete Kräfte an, so haben wir, ohne daß eine Änderung eingetreten ist, anstatt jeder der Komponenten X_h, Y_h, Z_h je fünf Kräfte, die wir auch folgendermaßen auffassen können:

An Stelle der in A_h nach rechts wirkenden Kraft X_h haben wir

eine in B_h nach rechts wirkende Kraft X_h, die ohne weiteres nach O verlegt werden kann;

ein Kräftepaar, bestehend aus den Kräften X_h in A_h nach rechts und X_h in E_h nach links, am Arme $A_h E_h = z_h$, dessen Achsenrichtung die Y-Achse, und dessen Moment $X_h \cdot z_h$ ist;

ein Kräftepaar, bestehend aus den Kräften X_h in E_h nach rechts und X_h in B_h nach links, am Arme $E_h B_h = y_h$, dessen Achsenrichtung die Z-Achse und dessen Moment $- X_h \cdot y_h$ ist.

An Stelle der in A_h nach vorn wirkenden Kraft Y_h haben wir

eine in C_h nach vorn wirkende Kraft Y_h, die ohne weiteres nach O verlegt werden kann;

ein Kräftepaar, bestehend aus den Kräften Y_h in C_h nach hinten und Y_h in E_h nach vorn, am Arme $C_h E_h = x_h$, dessen Achsenrichtung die Z-Achse und dessen Moment $Y_h \cdot x_h$ ist;

ein Kräftepaar, bestehend aus den Kräften Y_h in E_h nach hinten und Y_h in A_h nach vorn, am Arme $A_h E_h = z_h$, dessen Achsenrichtung die X-Achse und dessen Moment $- Y_h \cdot z_h$ ist.

An Stelle der in A_h nach oben wirkenden Kraft Z_h haben wir

eine in D_h nach oben wirkende Kraft Z_h, die ohne weiteres nach O verlegt werden kann;

ein Kräftepaar, bestehend aus den Kräften Z_h in D_h nach unten und Z_h in F_h nach oben, am Arme $D_h F_h = y_h$, dessen Achsenrichtung die X-Achse und dessen Moment $Z_h \cdot y_h$ ist;

ein Kräftepaar, bestehend aus den Kräften Z_h in F_h nach unten und Z_h in A_h nach oben, am Arme $F_h A_h = x_h$, dessen Achsenrichtung die Y-Achse und dessen Moment $- Z_h \cdot x_h$ ist.

Vereinigen wir die Kräftepaare, deren Achsen in gleiche Richtung fallen, so haben wir

anstatt der Kraft P_h in A_h:

drei Kräfte X_h, Y_h, Z_h angreifend in O in den Richtungen der Koordinatenachsen,

drei Kräftepaare, deren Achsen in die Richtungen der Koordinatenachsen $O\,X$, $O\,Y$ und $O\,Z$ fallen und die Größen

$$Z_h \cdot y_h - Y_h \cdot z_h; \; X_h \cdot z_h - Z_h \cdot x_h; \; Y_h \cdot x_h - X_h \cdot y_h$$

haben.

Wie die Kräfte X_h, Y_h, Z_h die Komponenten einer einzigen Kraft sind, so können auch die drei Kräftepaare als die Komponenten eines einzigen Kräftepaares angesehen werden.

Verfahren wir analog mit den übrigen Kräften P, so erhalten wir entsprechend dieselben Resultate; die Vereinigung der Ergebnisse gibt dann

drei Kräfte X, Y, Z, angreifend in O in den Richtungen der Achsen und von den Größen:

$$X = \Sigma X_h;$$
$$Y = \Sigma Y_h;$$
$$Z = \Sigma Z_h;$$

und drei Kräftepaare L, M, N, deren Achsen die Richtungen der Koordinatenachsen und die Größen

$$L = \Sigma (Z_h \cdot y_h - Y_h \cdot z_h);$$
$$M = \Sigma (X_h \cdot z_h - Z_h \cdot x_h);$$
$$N = \Sigma (Y_h \cdot x_h - X_h \cdot y_h)$$

haben. Aus den Kräften erhält man die Resultante R durch die Formel

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

und aus den Achsen der Kräftepaare die Achse des resultierenden Kräftepaares durch die Formel

$$K = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2}.$$

244.

Als allgemeine Gleichgewichtsbedingungen waren nun im § 242 die beiden Gleichungen

$$R = 0 \text{ und } K = 0$$

aufgestellt worden. Wie ersichtlich, zerfallen diese zwei Gleichungen in sechs, denn R und K können nur verschwinden, wenn die unter dem Wurzelzeichen stehenden Quadrate einzeln zu Null werden. Das vollständige System der Be-

dingungsgleichungen dafür, daß die n Kräfte $P_1, P_2, \ldots P_n$ am starren Körper im Gleichgewichte sind, ist also

$$\Sigma X_h = 0; \tag{1}$$
$$\Sigma Y_h = 0; \tag{2}$$
$$\Sigma Z_h = 0; \tag{3}$$
$$\Sigma (Z_h \cdot y_h - Y_h \cdot z_h) = 0; \tag{4}$$
$$\Sigma (X_h \cdot z_h - Z_h \cdot x_h) = 0; \tag{5}$$
$$\Sigma (Y_h \cdot x_h - X_h \cdot y_h) = 0. \tag{6}$$

Nun ist aber $Y_h \cdot x_h - X_h . y_h$ das statische Moment der Kraft P_h in bezug auf die Achse $O\,Z$ als Momentenachse (vergl. § 223), $\Sigma (Y_h . x_h - X_h . y_h)$ die algebraische Summe der statischen Momente aller Kräfte in bezug auf die Achse $O\,Z$ als Momentenachse. Da in gleicher Weise auch die Summen in (4) und (5) interpretiert werden können, da ferner die Lage des Koordinatensystems eine ganz beliebige war, so können wir den Inhalt der gefundenen sechs Bedingungsgleichungen in folgender Weise aussprechen:

Damit die an einem starren Körper angreifenden Kräfte im Gleichgewichte sind, muß für jede von irgend drei zueinander rechtwinkligen Koordinatenachsen

sowohl die algebraische Summe der bei der Zerlegung der Kräfte nach den Achsen in diese Achse fallenden Komponenten der Kräfte,

wie auch die algebraische Summe der statischen Momente der Kräfte in bezug auf diese Achse als Momentenachse gleich Null sein.

245.

Nunmehr ist es nicht schwer zu beweisen, daß zwei windschiefe Kräfte P_1 und P_2 nicht durch eine einzige Kraft ersetzt werden können. (§ 224, Anm.)

Wählen wir einen beliebigen Punkt A und verlegen an ihn die Kräfte P_1 und P_2, so erhalten wir in A die zwei Kräfte P_1 und P_2 von verschiedener, nie gleicher oder entgegengesetzter Richtung, die durch eine einzige Kraft, ihre Resultante ersetzt werden können; außerdem aber zwei Kräftepaare, das eine $(+P_1, -P_1)$, dessen Achse in A auf der durch A und die Richtung von P_1 bestimmten Ebene

senkrecht steht, das andere $(+ P_2, - P_2)$, dessen Achse in A auf der durch A und die Richtung von P_2 bestimmten Ebene lotrecht steht. Da die Richtungen beider Kräfte windschief sind, können diese Ebenen nie zusammenfallen, es können also auch nie die Achsen der Kräftepaare in eine Gerade fallen, sondern müssen stets einen Winkel bilden; daher können die Kräftepaare einander nicht aufheben, sondern geben durch ihre Zusammensetzung stets wieder ein Kräftepaar.

Die Zusammensetzung zweier windschiefer Kräfte liefert daher stets eine Resultante und ein Kräftepaar.

246.

Bei der Ableitung der Bedingungen für das Gleichgewicht von Kräften, die an einem starren Körper angreifen, ist vorausgesetzt worden, daß der Körper frei beweglich sei. Ist das nicht der Fall, so erleiden die allgemeinen Bedingungen gewisse Einschränkungen. Ein Körper ist z. B. nicht frei beweglich, wenn er um einen festen Punkt drehbar ist, oder wenn er um zwei feste Punkte, oder was dasselbe, um die diese beiden festen Punkte verbindende feste Gerade drehbar ist, oder wenn er mit einem oder mehreren Punkten auf einer festen Ebene oder einer festen Oberfläche aufliegt. Obgleich es keine Schwierigkeit bereitet, aus den allgemeinen Bedingungen die besonderen für den einen oder anderen dieser Fälle abzuleiten, so müssen wir es uns doch versagen, näher auf diese Dinge einzugehen, da sie uns zu sehr ins einzelne führen würden.

247.

Die allgemeinen Bedingungen für das Gleichgewicht von Kräften, die an zerstreuten Punkten eines starren Körpers angreifen, gestatten die Lösung einer anderen Frage.

Wenngleich man nach dem Vorhergehenden von der Resultante beliebig vieler Kräfte nicht reden kann, da im allgemeinen die Zusammensetzung beliebiger Kräfte auf eine Resultante und ein Kräftepaar führt, kann man doch in den Fällen, in denen man weiß, daß die Kräfte eine Resultante haben, diese aus den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen durch folgende Überlegung bestimmen: Weiß man, daß die

Kräfte P_1, P_2, ... P_n eine Resultante R haben, und fügt man zu den Kräften P eine dieser Resultante gleiche, aber entgegengesetzt gerichtete Kraft hinzu, so hat man offenbar ein Kraftsystem, das im Gleichgewichte ist. Stellt man nun die Gleichgewichtsbedingungen für dieses Kraftsystem auf, so erhält man sechs Gleichungen, aus denen Größe, Richtung und Lage der Resultante bestimmt werden können.

248.

Wir wollen das an einem Beispiele zeigen, von dem wir wissen, daß eine Resultante existiert.

Greifen an einem Körper in den beliebigen Punkten A_1, A_2, ... A_n die beliebigen parallelen und gleichgerichteten Kräfte P_1, P_2, ... P_n an, sind x_h, y_h, z_h die auf ein räumliches rechtwinkliges Koordinatensystem bezogenen Koordinaten des Angriffspunktes A_h und α, β, γ die Winkel, die die Kraftrichtung mit den Koordinatenachsen bildet, so sind die Komponenten von P_h nach den Achsen

$$X_h = P_h \cdot \cos\alpha; \qquad Y_h = P_h \cdot \cos\beta; \qquad Z_h = P_h \cdot \cos\gamma,$$

und zwischen den Richtungskosinus besteht die Gleichung

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Ist R nun die Resultante, α_0, β_0, γ_0 die Winkel, die sie mit den Achsen bildet, so sind

$$R \cdot \cos\alpha_0; \qquad R \cdot \cos\beta_0; \qquad R \cdot \cos\gamma_0$$

die Komponenten nach den Achsen. Fügen wir diese negativ zu den Kräften P hinzu, so ist Gleichgewicht, und die ersten drei Gleichgewichtsbedingungen lauten

$$\begin{aligned} \cos\alpha \cdot \Sigma P_h - R \cdot \cos\alpha_0 &= 0; \\ \cos\beta \cdot \Sigma P_h - R \cdot \cos\beta_0 &= 0; \\ \cos\gamma \cdot \Sigma P_h - R \cdot \cos\gamma_0 &= 0 \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} R \cdot \cos\alpha_0 &= \cos\alpha \cdot \Sigma P_h; \\ R \cdot \cos\beta_0 &= \cos\beta \cdot \Sigma P_h; \\ R \cdot \cos\gamma_0 &= \cos\gamma \cdot \Sigma P_h. \end{aligned}$$

Quadriert und addiert man diese Gleichungen, so erhält man

$$\begin{aligned} & R^2 \cdot (\cos^2\alpha_0 + \cos^2\beta_0 + \cos^2\gamma_0) \\ & = (\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma) \cdot [\Sigma P_h]^2, \end{aligned}$$

woraus, da auch

$$\cos^2 \alpha_0 + \cos^2 \beta_0 + \cos^2 \gamma_0 = 1$$

ist, folgt

$$R = \Sigma P_h,$$

d. h. **die Resultante ist gleich der Summe der Kräfte.**

Setzt man den Wert von R in die drei Gleichungen ein, so erhält man

$$\cos \alpha_0 = \cos \alpha; \qquad \cos \beta_0 = \cos \beta; \qquad \cos \gamma_0 = \cos \gamma,$$

also ist R den P_h parallel.

Um den Angriffspunkt (x_0, y_0, z_0) zu bestimmen, wenden wir die drei anderen Gleichgewichtsbedingungen an und erhalten:

$$\begin{aligned}
&\Sigma (P_h \,.\, \cos\gamma \,.\, y_h - P_h \,.\, \cos\beta \,.\, z_h) \\
&- (R \,.\, \cos\gamma \,.\, y_0 - R \,.\, \cos\beta \,.\, z_0) = 0; \\
&\Sigma (P_h \,.\, \cos\alpha \,.\, z_h - P_h \,.\, \cos\gamma \,.\, x_h) \\
&- (R \,.\, \cos\alpha \,.\, x_0 - R \,.\, \cos\gamma \,.\, x_0) = 0; \\
&\Sigma (P_h \,.\, \cos\beta \,.\, x_h - P_h \,.\, \cos\alpha \,.\, y_h) \\
&- (R \,.\, \cos\beta \,.\, x_0 - R \,.\, \cos\alpha \,.\, y_0) = 0;
\end{aligned}$$

diese Gleichungen können auch geschrieben werden:

$$\begin{aligned}
&\cos\gamma \,.\, [\Sigma P_h \,.\, y_h - R \,.\, y_0] - \cos\beta \,.\, [\Sigma P_h \,.\, z_h - R \,.\, z_0] = 0; \\
&\cos\alpha \,.\, [\Sigma P_h \,.\, z_h - R \,.\, z_0] - \cos\gamma \,.\, [\Sigma P_h \,.\, x_h - R \,.\, x_0] = 0; \\
&\cos\beta \,.\, [\Sigma P_h \,.\, x_h - R \,.\, x_0] - \cos\alpha \,.\, [\Sigma P_h \,.\, y_h - R \,.\, y_0] = 0.
\end{aligned}$$

Da es aber nur darauf ankommt, irgendeinen Punkt in der Richtung der Resultante zu bestimmen, so kann man setzen

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma P_h \,.\, x_h &= R \,.\, x_0 \\
\Sigma P_h \,.\, y_h &= R \,.\, y_0 \\
\Sigma P_h \,.\, z_h &= R \,.\, z_0
\end{aligned}\right\} \quad \text{oder} \quad
\begin{aligned}
x_0 &= \frac{\Sigma P_h \,.\, x_h}{\Sigma P_h}; \\
y_0 &= \frac{\Sigma P_h \,.\, y_h}{\Sigma P_h}; \\
z_0 &= \frac{\Sigma P_h \,.\, z_h}{\Sigma P_h},
\end{aligned}$$

da die Gleichungen durch diese Werte erfüllt werden. Auch dieses Resultat stimmt mit dem früher auf anderem Wege gefundenen überein.

Auch die Einführung des Namens **Mittelpunkt der parallelen Kräfte** für den Punkt (x_0, y_0, z_0) findet im vorstehenden ihre Erklärung. Da jene Gleichungen durch

die Werte von x_0, y_0 und z_0 identisch für jedes Wertsystem von α, β und γ erfüllt sind, so bleiben die Werte für x_0, y_0 und z_0 dieselben, wenn man die Werte von α, β und γ, d. h. die Richtung der Kräfte ändert; es geht also die Resultante stets durch denselben Punkt (x_0, y_0, z_0).

Achtzehntes Buch.

Vom Schwerpunkte.

249.

Ein wichtiges Beispiel an einem Körper angreifender, paralleler und gleichgerichteter Kräfte bietet uns die Natur in der Schwerkraft, durch die alle Teilchen eines Körpers angezogen werden. Zwar sind diese Anziehungskräfte sämtlich nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet, doch können sie in praktischer Hinsicht wegen der großen Entfernung des Erdmittelpunktes (über 6370 km) und wegen der im Vergleich zur Erde mäßigen Dimensionen der irdischen Körper als parallel angesehen werden (Geometrie § 209). Wir können daher diese sämtlichen Anziehungskräfte, wenn wir auch ihre Anzahl nicht angeben können, nach § 248 zu einer einzigen Mittelkraft vereinigt denken, die ihnen parallel und gleich ihrer Summe ist. Diese Mittelkraft ist daher ebenfalls nach dem Mittelpunkte der Erde gerichtet, wirkt also vertikal und hat einen Angriffspunkt von ganz bestimmter Lage.

Diesen Angriffspunkt der Mittelkraft, den Mittelpunkt sämtlicher Schwerkräfte, nennt man den Schwerpunkt des betreffenden Körpers.

250.

Aus den allgemeinen Eigenschaften des Mittelpunktes paralleler Kräfte ergeben sich die Eigenschaften des Schwerpunktes von Körpern als Folgerungen; bemerkenswert sind namentlich die folgenden Eigenschaften:

1. Jeder Körper hat in allen Lagen nur einen Schwerpunkt. Denn dreht man den Körper, so ist das dasselbe,

als ob man die Richtung der Kräfte in bezug auf den Körper drehe; der Mittelpunkt der parallelen Kräfte wird aber durch eine Drehung der Kräfte nicht geändert.

2. Wird der Schwerpunkt unterstützt, so ist der Körper im Gleichgewichte (in Ruhe). Denn die Resultante paralleler Kräfte wird aufgehoben, wenn man in ihrer Richtung eine ihr gleiche, aber entgegengesetzte Kraft anbringt, die auch durch eine Stütze, die einen der Resultante gleichen Gegendruck erzeugt, ersetzt werden kann. Da aber jede Kraft beliebig in ihrer Richtung verschoben werden kann, so ist der Schwerpunkt unterstützt, wenn entweder er selbst oder irgendein Punkt vertikal über oder unter ihm fest mit der Erde verbunden ist.

3. Die Wirkung der Schwerkraft auf einen Körper kann durch sein im Schwerpunkte angreifendes Gewicht ersetzt werden. Denn die Wirkung der Schwerkraft auf die einzelnen Teilchen eines Körpers ist das Gewicht dieser Teilchen und die Resultante ist gleich ihrer Summe, also gleich dem Gewichte des Körpers.

251.

Daß ein Körper, der in einem andern Punkte als im Schwerpunkte unterstützt ist, dann und nur dann im Gleichgewichte sein kann, wenn dieser Stützpunkt mit dem Schwerpunkte in einer vertikalen Geraden liegt, läßt sich leicht zeigen.

Es sei S der Schwerpunkt, C der Unterstützungspunkt, oberhalb oder unterhalb des Schwerpunktes. (Fig. 102.) Da

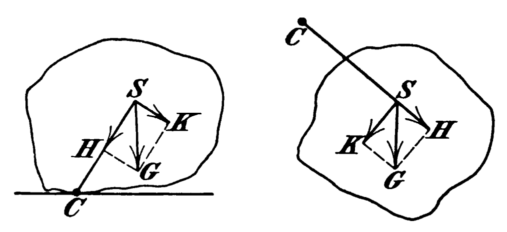


Fig. 102.

man nun das ganze Gewicht des Körpers als im Schwerpunkte S wirkend und alle übrigen Teilchen des Körpers als gewichtlos annehmen kann, so kann man, wenn die vertikale

Strecke $S\,G$ das Gewicht des Körpers darstellt, dasselbe in zwei Komponenten zerlegen, eine $S\,H$ nach der Richtung der den Schwerpunkt S und den Stützpunkt verbindenden Geraden und die andere $S\,K$ senkrecht zu dieser Geraden. Die erstere Komponente wird durch den Widerstand des Stützpunktes C aufgehoben, die zweite aber bewirkt offenbar eine Drehung des Körpers um den Stützpunkt C.

Ist aber der Schwerpunkt selbst unterstützt, so ist der Körper in jeder Lage im Gleichgewichte.

252.

Um Mißverständnissen und Unklarheiten vorzubeugen, sei ausdrücklich hervorgehoben, daß der Schwerpunkt eines Körpers kein Punkt ist, in dem etwa besondere physikalische Eigenschaften des Körpers vereinigt wären; der Schwerpunkt ist lediglich ein fingierter, mathematisch bestimmter Punkt, der auch außerhalb des Körpers liegen kann, wie z. B. bei einem Ringe, dann freilich mit dem Körper starr verbunden gedacht werden muß.

Durch die Einführung des Schwerpunktes, in dem die gesamte Masse eines Körpers vereinigt gedacht werden kann, ist die Möglichkeit gegeben, einen Körper als materiellen Punkt anzusehen, wodurch eine wesentliche Vereinfachung vieler mechanischer Probleme entsteht. Hierin beruht die eigentliche mechanische Bedeutung des Schwerpunktes.

253.

Nennt man jede durch den Schwerpunkt eines Körpers gehende Gerade eine Schwergerade und jede durch den Schwerpunkt gehende Ebene eine Schwerebene, so ist der Schwerpunkt eines Körpers bestimmt entweder durch zwei Schwergerade oder durch eine Schwerebene und eine (sie schneidende) Schwergerade oder durch drei Schwerebenen; er ist der Schnittpunkt der beiden Geraden oder der Geraden und der Ebene oder der drei Ebenen.

Hierauf und auf den Bemerkungen des § 250 beruht das in der Physik gelehrte praktische Verfahren, die Lage des Schwerpunktes eines Körpers zu ermitteln:

Man lasse den Körper an einem Faden hängen und ins Gleichgewicht (zur Ruhe) kommen; alsdann ist der Faden

vertikal gespannt und der Schwerpunkt liegt in der Richtung des Fadens. Befestigt man dann einen anderen Punkt des Körpers an dem Faden und läßt den Körper daran hängend abermals ins Gleichgewicht kommen, so liegt der Schwerpunkt wiederum in der Richtung des Fadens, er ist also der Schnittpunkt beider Richtungen.

Oder man lege den Körper in drei verschiedenen Berührungslinien so auf eine gerade scharfe Kante, daß er jedesmal im Gleichgewichte ist; dann liegt der Schwerpunkt im Durchschnittspunkte der drei durch diese Berührungslinien (Stützlinien) gedachten Vertikal-Ebenen.

254.

Die Bestimmung der Lage des Schwerpunktes materieller Körper durch Rechnung geschieht gemäß den Formeln des § 248 wie folgt.

Sind m_1, m_2, m_3, . . . die Massen der einzelnen Teilchen des materiellen Körpers, so sind $m_1\, g$, $m_2\, g$, $m_3\, g$, . . . die auf sie wirkenden Schwerkräfte. Bezeichnen also x_h, y_h, z_h die Koordinaten des $h$ten Teilchens, d. h. seine Abstände von drei zueinander rechtwinkligen Ebenen, x_0, y_0, z_0 die Koordinaten des Schwerpunktes in bezug auf dieselben Ebenen, so liefern die Gleichungen des § 248 für die Koordinaten des Schwerpunktes die Werte

$$x_0 = \frac{m_1\, g \,.\, x_1 + m_2\, g \,.\, x_2 + m_3\, g \,.\, x_3 + \ldots}{m_1\, g + m_2\, g + m_3\, g + \ldots};$$

$$y_0 = \frac{m_1\, g \,.\, y_1 + m_2\, g \,.\, y_2 + m_3\, g \,.\, y_3 + \ldots}{m_1\, g + m_2\, g + m_3\, g + \ldots};$$

$$z_0 = \frac{m_1\, g \,.\, z_1 + m_2\, g \,.\, z_2 + m_3\, g \,.\, z_3 + \ldots}{m_1\, g + m_2\, g + m_3\, g + \ldots}.$$

Läßt man den allen Gliedern gemeinsamen Faktor g weg, so lauten die Gleichungen einfacher:

$$(1)\quad \left\{ \begin{aligned} x_0 &= \frac{m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}; \\ y_0 &= \frac{m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}; \\ z_0 &= \frac{m_1 \,.\, z_1 + m_2 \,.\, z_2 + m_3 \,.\, z_3 + \ldots}{m_1 + m_2 + m_3 + \ldots}. \end{aligned} \right.$$

Der Abstand des Schwerpunktes von irgendeiner Ebene wird also erhalten, wenn man die algebra-

ische **Summe der statischen Momente der einzelnen Massenteilchen des Körpers in bezug auf diese Ebene als Momentenebene durch die gesamte Masse des Körpers dividiert.**

Bezeichnet man die Gesamtmasse mit M und schreibt die Gleichungen (1) in der Form

$$(2)\quad \begin{cases} M \cdot x_0 = m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 + m_3 \cdot x_3 + \ldots; \\ M \cdot y_0 = m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + \ldots; \\ M \cdot z_0 = m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot z_3 + \ldots, \end{cases}$$

so sagen diese Gleichungen aus, daß eine Summe von Produkten aus Massenteilchen und ihren Abständen von einer bestimmten Ebene durch das Produkt aus der Gesamtmasse und dem Schwerpunktsabstand von dieser Ebene ersetzt werden kann. Dieser Satz gilt offenbar auch noch, wenn man nur einen Teil des gesamten Massensystems nimmt. Man kann daher einen materiellen Körper in Teile zerlegt denken, für diese einzeln die Schwerpunkte bestimmen und dann nach denselben Formeln den Schwerpunkt der in den Schwerpunkten der einzelnen Teile vereinigten Massen berechnen.

255.

Die Bestimmung des Schwerpunktes materieller Körper geht in eine rein geometrische Betrachtung über, wenn die Dichtigkeit d des Körpers überall **dieselbe** ist, oder wenn, wie man in diesem Falle sagt, der Körper **homogen** ist.

Ist V das Volumen des Körpers, v_h das eines Teiles des Körpers mit der Masse m_h, so kann man

$$M = V \cdot d, \quad m_h = v_h \cdot d$$

setzen; bezeichnen ferner x_h, y_h, z_h die als **bekannt vorausgesetzten** Koordinaten des Schwerpunktes dieses Körperteiles, so gehen die Gleichungen (1), wenn man den in allen Gliedern auftretenden Faktor d wegläßt, über in

$$(3)\quad \begin{cases} x_0 = \dfrac{v_1 \cdot x_1 + v_2 \cdot x_2 + v_3 \cdot x_3 + \ldots}{v_1 + v_2 + v_3 + \ldots}; \\[2ex] y_0 = \dfrac{v_1 \cdot y_1 + v_2 \cdot y_2 + v_3 \cdot y_3 + \ldots}{v_1 + v_2 + v_3 + \ldots}; \\[2ex] z_0 = \dfrac{v_1 \cdot z_1 + v_2 \cdot z_2 + v_3 \cdot z_3 + \ldots}{v_1 + v_2 + v_3 + \ldots}. \end{cases}$$

An Stelle der Massenteile sind in diesen Formeln die Volumenteile des Körpers getreten, so daß bei homogenen Körpern die Lage des Schwerpunktes einzig und allein von der Gestalt des Körpers abhängt. Dieselbe Lage, die der Schwerpunkt z. B. in einer homogenen Kugel aus Eisen hat, muß er auch in einer geometrisch gleichen homogenen Kugel aus jedem andern Stoffe (Kupfer, Holz, Glas) haben; man kann daher einen homogenen Körper ganz wie einen geometrischen behandeln und deshalb auch von dem Schwerpunkte eines geometrischen Körpers reden.

256.

Dieser Begriff kann auch auf die anderen Raumgrößen, auf Flächen und Linien, ausgedehnt werden.

Denkt man sich eine Fläche als eine Platte von überall gleicher Dicke, so daß sich die Raumteile wie die Flächenteile verhalten, und sind f_1, f_2, f_3, . . . die Teile der Fläche, so erhält man aus (3) die Gleichung

$$x_0 = \frac{f_1 \cdot x_1 + f_2 \cdot x_2 + f_3 \cdot x_3 + \dots}{f_1 + f_2 + f_3 + \dots}$$

und entsprechende für die andern Koordinaten y_0 und z_0.

Denkt man sich eine Linie als einen dünnen, überall gleich starken Draht, so ist die Masse der Länge proportional, und an Stelle der Volumenelemente v_h treten in den Gleichungen (3) die Linienelemente l_h, so daß man jetzt

$$x_0 = \frac{l_1 \cdot x_1 + l_2 \cdot x_2 + l_3 \cdot x_3 + \dots}{l_1 + l_2 + l_3 + \dots}$$

und entsprechende Gleichungen für y_0 und z_0 hat.

257.

Die allgemeinen Gleichungen (3) zur Bestimmung des Schwerpunktes geometrischer Gebilde vereinfachen sich wesentlich, wenn es gelingt, das Koordinatensystem so zu wählen, daß eine der Koordinaten des Schwerpunktes den Wert Null erhält, wenn also eine der Koordinatenebenen eine Schwerebene ist. Da in bezug auf jede Schwerebene als Momentenebene die algebraische Summe der statischen Momente der einzelnen Körperteile gleich Null ist, so kann man die

Wahl des Koordinatensystems ohne weitere Rechnung in zwei Fällen in der gewünschten Weise treffen.

Liegen nämlich erstens die Schwerpunkte der sämtlichen Körperteile v_h in einer Ebene, so kann man diese als XY-Ebene wählen; dann sind alle z_h und damit auch z_0 gleich Null. Das ist insbesondere der Fall, wenn das geometrische Gebilde, dessen Schwerpunkt bestimmt werden soll, eine ebene Fläche oder eine ebene Kurve ist. Ist zweitens der Körper so gestaltet, daß er durch eine Ebene in zwei kongruente oder symmetrische Teile zerlegt wird, so sind die Momente der Teile des Körpers auf der einen Seite dieser Ebene in bezug auf diese Ebene positiv, die auf der anderen Seite negativ und heben wegen der Symmetrie des Körpers zur Ebene einander auf. Wählt man diese Ebene als XY-Ebene, so braucht man nur ein ebenes Koordinatensystem und hat nur zwei Schwerpunktskoordinaten zu bestimmen.

Liegen nun ferner in dieser Ebene die Schwerpunkte der einzelnen Teile des geometrischen Gebildes in einer Geraden oder symmetrisch zu einer geraden Linie, so kann man auf Grund ganz derselben Schlußweise, wie eben geschehen, diese Gerade als eine der Koordinatenachsen wählen und hat dann nur eine einzige Schwerpunktskoordinate zu bestimmen.

Genaueres hierüber ist aus den folgenden Schwerpunktsbestimmungen zu ersehen.

I. Schwerpunkte von Systemen materieller Punkte.

258.

Aufgabe. Den Schwerpunkt zweier materieller Punkte zu bestimmen.

Auflösung. Sind P_1 und P_2 (Fig. 103) die Punkte mit den Massen m_1 und m_2, deren Entfernung a sei, so liegt der Schwerpunkt S derselben auf der Verbindungslinie von P_1 und P_2. Wählt man diese als X-Achse, eine durch P_1 gehende zu ihr senkrechte Gerade als Y-Achse und bezeichnet mit x die Abscisse des Schwerpunktes, so gilt in bezug

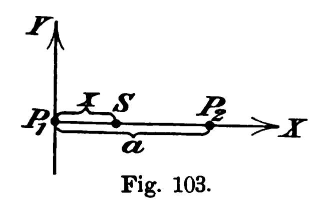


Fig. 103.

auf die Y-Achse als Drehungsachse die Momentengleichung

$$(m_1 + m_2) \cdot x = m_1 \,.\, 0 + m_2 \,.\, a,$$

woraus

$$P_1 S = x = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \,.\, a$$

folgt; für den Abstand $P_2 S = a - x$ findet man

$$S P_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \,.\, a;$$

daher teilt S die Strecke $P_1 P_2$ im umgekehrten Verhältnis der Massen.

Ist z. B. $m_1 = 1$; $m_2 = 3$; $a = 24$ cm, so ist

$$P_1 S = \frac{3}{4} \,.\, 24 \text{ cm} = 18 \text{ cm}$$

$$P_2 S = \frac{1}{4} \,.\, 24 \text{ cm} = 6 \text{ cm}.$$

Anm. Genau so ist die Aufgabe für mehrere in einer Geraden liegende materielle Punkte zu lösen.

259.

Aufgabe. Den Schwerpunkt dreier materieller Punkte zu bestimmen.

Auflösung. Durch die drei Punkte P_1, P_2 und P_3 mit den Massen m_1, m_2 und m_3 ist eine Ebene bestimmt, in der ihr Schwerpunkt S liegt. In dieser Ebene nehmen wir ein Koordinatensystem an, dessen X-Achse die Verbindungslinie der Punkte $P_1 P_2$ und dessen Y-Achse die auf ihr in P_1 senkrecht stehende Gerade sei (Fig. 104).

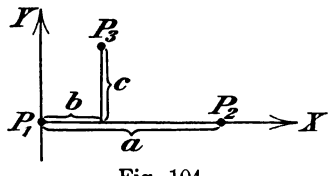


Fig. 104.

Die Koordinaten von P_1 in bezug auf dieses Koordinatensystem sind $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; die von P_2 seien $x_2 = a$; $y_2 = 0$; die von P_3 seien $x_3 = b$; $y_3 = c$.

Für die Koordinaten x_0 und y_0 des Schwerpunktes liefern

dann die Momentengleichungen in bezug auf die Y-Achse und in bezug auf die X-Achse die Werte

$$x_0 = \frac{m_1 \,.\, 0 + m_2 \,.\, a + m_3 \,.\, b}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_2 \,.\, a + m_3 \,.\, b}{m_1 + m_2 + m_3};$$

$$y_0 = \frac{m_1 \,.\, 0 + m_2 \,.\, 0 + m_3 \,.\, c}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{m_3 \,.\, c}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

Anm. Bezeichnen h_1, h_2, h_3 die von P_1, P_2 und P_3 auf die gegenüberliegenden Seiten des durch P_1, P_2 und P_3 gebildeten Dreiecks gefällten Lote, so daß z. B. h_3 mit c identisch ist, so erhält man aus den Momentengleichungen in bezug auf die Seiten für die Abstände e_1, e_2 und e_3 des Schwerpunktes von den Seiten $P_2\,P_3$, $P_3\,P_1$ und $P_1\,P_2$ leicht die Gleichungen:

$$e_1 = \frac{m_1 \cdot h_1}{m_1 + m_2 + m_3}; \qquad e_2 = \frac{m_2 \cdot h_2}{m_1 + m_2 + m_3};$$

$$e_3 = \frac{m_3 \cdot h_3}{m_1 + m_2 + m_3}.$$

II. Schwerpunkte von Linien.

260.

Lehrsatz. Der Schwerpunkt einer homogenen Strecke ist ihr Mittelpunkt.

Beweis. Soll die algebraische Summe der statischen Momente in bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende zur Strecke senkrechte Achse gleich Null sein, so muß zu jedem materiellen Punkte auf der einen Seite des Schwerpunktes ein gleichweit entfernter auf der anderen Seite liegen, der durch sein negatives statisches Moment das positive des ersteren aufhebt; das aber ist nur möglich, wenn der Schwerpunkt der Mittelpunkt der Strecke ist.

Anm. Die nämliche Überlegung zeigt, daß bei homogener Massenverteilung für alle Figuren, die einen geometrischen Mittelpunkt haben, dieser Mittelpunkt der Schwerpunkt ist.

261.

Lehrsatz. Der Schwerpunkt des Umfanges eines Dreiecks ist der Mittelpunkt des Inkreises desjenigen Dreiecks, das durch die Verbindungslinien der Mitten der Seiten gebildet wird.

Beweis. Die Schwerpunkte der Seiten BC, CA und AB sind deren Mittelpunkte D, E und F (Fig. 105); in diesen Punkten hat man sich die Massen der Seiten, die ihren Längen proportional sind, angebracht zu denken. Bezeichnet p die Masse der Längeneinheit der Dreiecksseiten, so ist in D die Masse $BC \cdot p$, in E die Masse $CA \cdot p$ und in F die Masse $AB \cdot p$ zu denken.

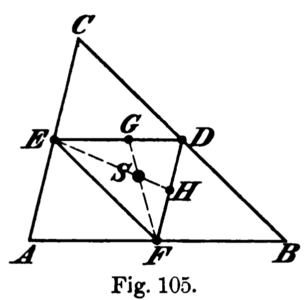


Fig. 105.

Der Schwerpunkt G der beiden Massenpunkte D und E teilt die Strecke DE im umgekehrten Verhältnis der in den Punkten D und E vereinigt gedachten Massen; also gilt

$$EG : GD = BC \cdot p : CA \cdot p = BC : CA,$$

oder, da $EF = \frac{1}{2} BC$ und $DF = \frac{1}{2} CA$ ist,

$$EG : GD = EF : DF;$$

die Verbindungslinie von F und G teilt also im Dreieck DEF die Seite DE im Verhältnis der anderen Seiten, halbiert also den Winkel EFD. (Geometrie § 115).

Ist H der Schwerpunkt von D und F, so gilt ebenso

$$DH : HF = AB \cdot p : BC \cdot p = AB : BC = ED : EF,$$

also halbiert die Verbindungslinie EH den Winkel DEF.

Da nun FG und EH Schwerlinien des Umfanges des Dreiecks ABC sind, so ist der Schwerpunkt S der Schnittpunkt dieser beiden Linien; da diese Linien aber Winkelhalbierende des Dreiecks DEF sind, so ist S der Mittelpunkt des dem Dreieck DEF einbeschriebenen Kreises.

Anm. Setzt man

$$BC = a; \quad CA = b; \quad AB = c,$$

bezeichnet man die zu diesen Seiten gehörigen Höhen mit

h_a, h_b, h_c und mit x_0, y_0, z_0 die Abstände des Schwerpunktes S von den Seiten, so liefert der Momentensatz in bezug auf die Seiten als Momentenachsen (Fig. 106).

$$x_0 = \frac{(b + c) \cdot h_a}{2\,(a + b + c)}$$

$$y_0 = \frac{(a + c) \cdot h_b}{2\,(a + b + c)}$$

$$z_0 = \frac{(a + b) \cdot h_c}{2\,(a + b + c)}.$$

Fig. 106.

Aus der Anmerkung des § 260 folgen leicht die folgenden Sätze:

Der Schwerpunkt für den Umfang eines Parallelogramms ist der Schnittpunkt der Diagonalen.

Der Schwerpunkt des Umfanges eines regelmäßigen Vielecks ist der Mittelpunkt des um- oder einbeschriebenen Kreises.

Der Schwerpunkt der Kreisperipherie ist der Mittelpunkt des Kreises.

262.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kreisbogens zu finden.

Auflösung. Da ein jeder Kreisbogen symmetrisch zu dem Radius liegt, der auf der Sehne des Kreisbogens senkrecht steht, so brauchen wir, wenn wir diesen Radius CD als Y-Achse und den zur Sehne des Bogens parallelen Durchmesser als X-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems wählen, nur den Abstand des Schwerpunktes S vom Zentrum C, also die Strecke $CS = y_0$ zu berechnen (Fig. 107).

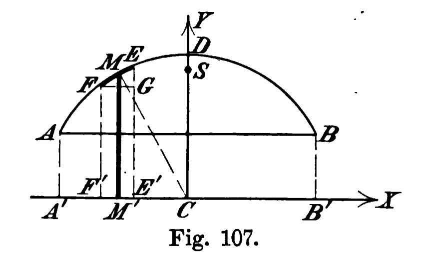


Fig. 107.

Denkt man sich nun den Bogen $ADB = b$ in Elemente b_1, b_2, b_3, ... zerlegt, so können diese, wenn ihre Anzahl sehr

groß angenommen wird, als geradlinig angesehen werden, so daß der Schwerpunkt eines jeden Elementes mit seinem Mittelpunkte zusammenfällt. Sind $y_1, y_2, y_3, \ldots$ die Abstände der Mittelpunkte der einzelnen Elemente $b_1, b_2, b_3, \ldots$ von der X-Achse, so liefert der Momentensatz für diese Achse als Momentenachse die Gleichung

$$b \cdot y_0 = b_1 \cdot y_1 + b_2 \cdot y_2 + b_3 \cdot y_3 + \ldots$$

Ist nun $EF = b_h$ ein beliebiges Bogenelement, $E'F' = b'_h$ seine Projektion auf die X-Achse, M der Mittelpunkt von EF, M' der von $E'F'$, zieht man ferner FG parallel $E'F'$ und verbindet C mit M, so folgt aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $MM'C$ und FGE (beide sind rechtwinklig und stimmen in den Winkeln bei M und F überein)

$$MM' : MC = FG : FE$$

oder

$$b_h \cdot y_h = b'_h \cdot r.$$

Die Momentengleichung lautet nunmehr

$$\begin{aligned} b \cdot y_0 &= b_1' \cdot r + b_2' \cdot r + b_3' \cdot r + \ldots \\ &= (b_1' + b_2' + b_3' + \ldots) \cdot r \\ &= A' B' \cdot r \\ &= AB \cdot r = s \cdot r, \end{aligned}$$

wenn die Sehne AB des Kreisbogens gleich s gesetzt wird. Hieraus ergibt sich für das gesuchte y_0 die Formel

$$y_0 = \frac{r \cdot s}{b},$$

d. h. der Abstand des Schwerpunktes eines Kreisbogens vom Mittelpunkte des Kreises verhält sich zum Radius wie die Sehne zum Bogen.

Zusatz 1. Für den Halbkreis ist

$$s = 2r, \; b = \pi r,$$

also

$$y_0 = \frac{2}{\pi} r = 0{,}637\, r \left(\text{nahezu } \frac{2}{3} r \text{ oder genauer } \frac{7}{11} r \right).$$

Für den Quadranten ist

$$s = r\sqrt{2}; \quad b = \frac{1}{2} \pi r,$$

also

$$y_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \cdot r = 0{,}9003\, r.$$

Für den **Sextanten** ist.

$$s = r;\ b = \frac{\pi}{3}\, r,$$

also

$$y_0 = \frac{3}{\pi} \cdot r = 0{,}955\, r.$$

Zusatz 2. Ist α der zum Bogen gehörige halbe Zentriwinkel (in Bogenmaß), so ist

$$b = 2\, r \cdot \alpha;\quad s = 2\, r \cdot \sin \alpha$$

und

$$y_0 = \frac{r \cdot \sin \alpha}{\alpha}.$$

III. Schwerpunkte von Flächen.

263.

Lehrsatz. Der Schwerpunkt einer homogenen Dreiecksfläche ist der Schnittpunkt zweier Mitteltransversalen.

Beweis. Teilt man die Fläche des Dreiecks ABC (Fig. 108) durch Linien parallel der Seite AB in unendlich viele unendlich schmale Streifen, so kann jeder Streifen als eine Strecke aufgefaßt werden, deren Schwerpunkt im Mittelpunkte liegt. Der gemeinschaftliche Schwerpunkt aller dieser unendlich vielen Streifen, mithin auch der Schwerpunkt der Dreiecksfläche liegt also auf der die Mittelpunkte der Streifen verbindenden Transversale CD.

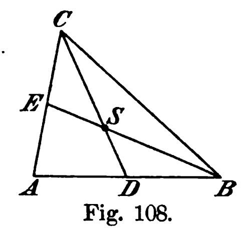


Fig. 108.

Eine zweite von der Ecke B nach der Mitte E der gegenüberliegenden Seite AC gezogene Transversale BE enthält die Schwerpunkte aller unendlich vielen unendlich dünnen Streifen, in die das Dreieck parallel der Seite AC zerlegt werden kann, also auch den Schwerpunkt des Dreiecks.

Die beiden Mitteltransversalen CD und BE sind also Schwergerade des Dreiecks, ihr Schnittpunkt ist daher der Schwerpunkt des Dreiecks.

Anm. Da die Mitteltransversalen eines Dreiecks einander im Verhältnis $1:2$ teilen, so ist $DS = \frac{1}{3}\ CD$ und $ES = \frac{1}{3}\ EB$; man kann daher den Lehrsatz auch aussprechen: der Schwerpunkt S einer homogenen Dreiecksfläche liegt auf einer Mitteltransversale und zwar um ein Drittel dieser Transversale von der Mitte der Seite entfernt. — Auch folgt hieraus leicht, daß der Abstand des Schwerpunktes eines Dreiecks von jeder Seite um $\frac{1}{3}$ der zugehörigen Höhe beträgt.

264.

Aus der Anmerkung des § 260 ergeben sich unmittelbar die Schwerpunkte der folgenden Flächen:

Der Schwerpunkt der Fläche eines Parallelogramms ist der Schnittpunkt der Diagonalen.

Der Schwerpunkt der Fläche eines regelmäßigen Vielecks ist der Mittelpunkt des um- oder einbeschriebenen Kreises.

Der Schwerpunkt der Kreisfläche ist der Mittelpunkt.

Der Schwerpunkt der Fläche eines durch zwei konzentrische Kreise begrenzten Ringes ist der Mittelpunkt der Kreise.

Der Schwerpunkt einer Kugelfläche ist der Kugelmittelpunkt.

Der Schwerpunkt eines geraden Zylindermantels ist der Mittelpunkt der Achse des Zylinders.

265.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines beliebigen Vierecks durch Konstruktion zu finden.

Auflösung. Man zerlege das Viereck $ABCD$ (Fig. 109) durch die Diagonale AC in zwei Dreiecke ABC und ADC

und konstruiere die Schwerpunkte S_1 und S_2 dieser Dreiecke nach § 263; dann zerlege man das Viereck durch die Diagonale BD in die Dreiecke BDA und BDC und konstruiere die Schwerpunkte S_3 und S_4 dieser Dreiecke. Verbindet man die Schwerpunkte S_1 und S_2 einerseits, S_3 und S_4 andererseits, so ist der Schnittpunkt dieser Linien der Schwerpunkt S des Vierecks.

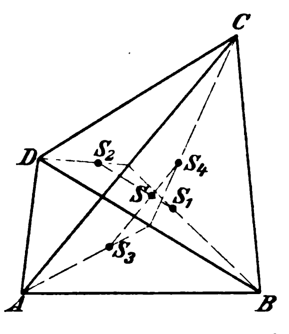


Fig. 109.

Anm. 1. Sehr einfach ist die folgende von Land angegebene Konstruktion des Schwerpunktes eines Vierecks: man ziehe (Fig. 110) $DE \parallel AC$, $CE \parallel BD$, teile AB durch F und G in drei gleiche Teile und ziehe $FS \parallel AE$, $GS \parallel BE$. S ist der Schwerpunkt des Vierecks.

Auch das folgende Verfahren ist sehr einfach; man teile (Fig. 111) jede Seite des Vierecks in drei gleiche Teile und

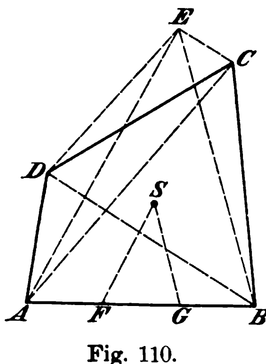


Fig. 110.

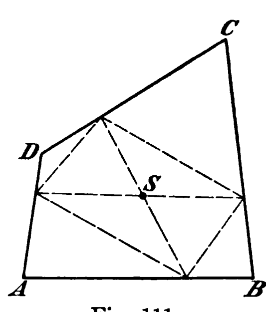


Fig. 111.

ziehe durch je zwei von diesen Teilpunkten, die derselben Ecke benachbart sind, Gerade. Diese bilden ein Parallelogramm, dessen Schwerpunkt (Schnittpunkt der Diagonalen) auch der des Vierecks ist.

Auf einen Beweis für die Richtigkeit dieser Konstruktionen können wir nicht näher eingehen.

Anm. 2. Ebenso wie den Schwerpunkt des Vierecks kann man durch Konstruktion den Schwerpunkt des Fünf-

ecks finden, indem man es durch zwei verschiedene Diagonalen in ein Dreieck und ein Viereck zerlegt, jedesmal die Schwerpunkte beider bestimmt und diese durch eine gerade Linie verbindet.

Dieses in neuerer Zeit mehr in Aufnahme gekommene graphische Verfahren ist auf jedes Vieleck durch Zerlegung desselben in Dreiecke ausdehnbar.

Will man die Aufgabe rechnerisch lösen, so zerlegt man das Vieleck in Dreiecke und behandelt dieses System der Dreiecke nach dem Momentensatze.

266.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Trapezes zu bestimmen.

Auflösung. Sind E und F (Fig. 112) die Mittelpunkte der parallelen Seiten $AB = a$ und $CD = b$ des Trapezes, so ist die Linie EF eine Schwergerade des Trapezes, da sie alle zu AB parallelen Strecken im Trapeze halbiert. Eine zweite Schwergerade ist die Gerade GH, die die Schwer-

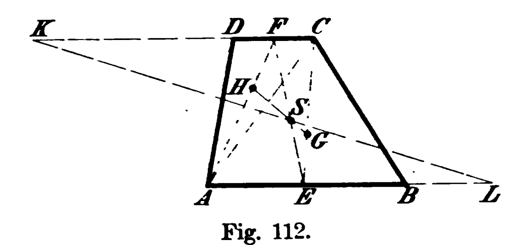


Fig. 112.

punkte der beiden durch die Diagonale AC gebildeten Dreiecke ABC und ADC verbindet. Der Durchschnittspunkt S dieser beiden Geraden ist der Schwerpunkt des Trapezes.

Wählt man AB als Momentenachse, sind F_1 und F_2 die Flächeninhalte der Dreiecke ABC und ADC, x_1 und x_2 die Abstände ihrer Schwerpunkte G und H von AB und x_0 der Abstand von S von der Momentenachse, so gilt der Momentensatz:

$$x_0 \cdot (F_1 + F_2) = F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2.$$

Ist aber h die Höhe, d. h. der senkrechte Abstand der

Seiten $AB = a$ und $CD = b$ des Trapezes, so ist

$$F_1 = \frac{1}{2} a \,.\, h; \; F_2 = \frac{1}{2} b \,.\, h; \; F_1 + F_2 = \frac{1}{2} (a + b) \,.\, h;$$

$$x_1 = \frac{1}{3} h; \qquad x_2 = \frac{2}{3} h;$$

durch Einsetzen dieser Werte erhält man leicht

$$x_0 = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2b}{a + b}.$$

Anm. Aus dieser Berechnung ergibt sich eine noch einfachere Konstruktion des Schwerpunktes. Verlängert man die parallelen Seiten AB und CD nach entgegengesetzten Richtungen, jede um die andere, macht also $BL = b$, $DK = a$, so schneidet die Verbindungslinie KL die Strecke EF im Schwerpunkte S. Denn wegen der Ähnlichkeit der Dreieke ESL und FSK verhalten sich ihre Grundlinien wie ihre Höhen; es ist also

$$EL : FK = x_0 : (h - x_0)$$

oder

$$\left(\frac{a}{2} + b\right) : \left(a + \frac{b}{2}\right) = x_0 : (h - x_0),$$

woraus leicht der obige Wert von x_0 folgt.

267.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kreisausschnittes (Kreissektors) zu finden.

Auflösung. Da die Halbierungslinie CD (Fig. 113) des zum Sektor gehörigen Zentriwinkels den Sektor in zwei kongruente Teile teilt, ist sie eine Schwergerade des Sektors, so daß nur der Abstand y_0 des Schwerpunktes von der durch C senkrecht zu CD gehenden X-Achse bestimmt zu werden braucht.

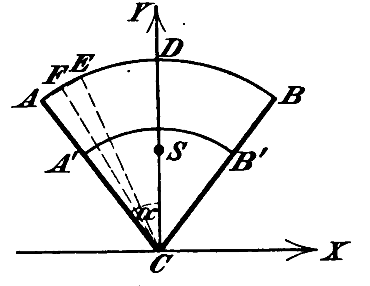


Fig. 113.

Verbindet man zwei Punkte A und E des den Sektor begrenzenden Bogens AB durch die Sehne AE und mit dem

Zentrum C, so liegt der Schwerpunkt des Dreiecks AEC **auf** CF in der Entfernung $\frac{2}{3}\,CF$ von C.

Je kleiner man AE annimmt, um so mehr nähert sich CF dem Radius r; zerlegt man nun den Kreisausschnitt in unendlich viele solcher Dreiecke AEC, so liegen deren Schwerpunkte sämtlich auf dem Kreisbogen $A'B'$ mit $\frac{2}{3}\,r$ um C. Mit dem Schwerpunkte dieses Kreisbogens fällt also auch der Schwerpunkt des Sektors zusammen. Setzt man daher in der Formel des § 262 $\frac{2}{3}\,r$, $\frac{2}{3}\,b$ und $\frac{2}{3}\,s$ an Stelle von r, b und s, so erhält man für den Abstand $CS = y_0$ den Wert

$$y_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \,.\, s}{b},$$

worin r, s und b dieselbe Bedeutung wie im § 262 haben.

Bezeichnet α den halben Zentriwinkel des Ausschnittes, so wird

$$y_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{r \,.\, \sin\alpha}{\alpha}.$$

Wird der Kreisausschnitt zum Halbkreis, so wird $s = 2\,r$, $b = \pi\,r$, und daher

$$y_0 = \frac{4}{3\,\pi}\,r = 0{,}424\,r\left(\text{nahezu } \frac{2}{5}\,r\right).$$

268.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines durch zwei Radien begrenzten Stückes eines konzentrischen Kreisringes zu bestimmen.

Auflösung. Auch hier liegt der Schwerpunkt in der Halbierungslinie CD des Zentriwinkels.

Sind S_1 und S_2 die Schwerpunkte der beiden Ausschnitte, deren Differenz das gegebene Ringstück ist, F_1 und F_2 die Flächeninhalte dieser Ausschnitte und bezeichnet man CS_1

$= y_1$; $CS_2 = y_2$ und das gesuchte $CS = y_0$, so gilt in bezug auf CX als Momentenachse (Fig. 114)

$$y_0 (F_1 - F_2) = F_1 \cdot y_1 - F_2 \cdot y_2.$$

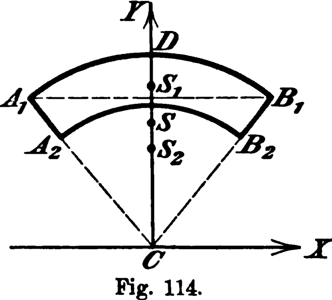


Fig. 114.

Sind aber r_1 und r_2 die Radien der das Ringstück $A_1 B_1 B_2 A_2$ begrenzenden Kreise, so ist

$$F_2 = \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot F_1,$$

(Geometrie § 125) und die Momentengleichung lautet nach Wegheben des in allen Gliedern auftretenden Faktors F_1

$$y_0 \left(1 - \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) = y_1 - \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot y_2.$$

Hierin ist nun, wenn $A_1 B_1 = s_1$ und $\widehat{A_1 B_1} = b_1$, $A_2 B_2 = s_2$ und $\widehat{A_2 B_2} = b_2$ gesetzt werden, nach § 267

$$y_1 = \frac{2}{3} r_1 \cdot \frac{s_1}{b_1}; \qquad y_2 = \frac{2}{3} r_2 \cdot \frac{s_2}{b_2};$$

da aber ferner

$$\frac{s_1}{b_1} = \frac{s_2}{b_2},$$

so können wir dafür $\frac{s}{b}$ ohne Indices setzen und erhalten zur Bestimmung von y_0 die Gleichung

$$y_0 \left(1 - \frac{r_2^2}{r_1^2}\right) = \left(\frac{2}{3} r_1 - \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot \frac{2}{3} r_2\right) \cdot \frac{s}{b},$$

woraus leicht

$$y_0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{s}{b} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}$$

folgt.

Ist z. B. $r_1 = 60$ cm; $r_2 = 50$ cm; $s = r_1$, so ist $b = \frac{\pi}{3} r_1$, und man erhält $y_0 = 52{,}7$ cm.

Da für das halbkreisförmige Ringstück $\frac{s}{b} = \frac{2}{\pi}$

ist, so geht für dieses die Formel über in

$$y_0 = \frac{4}{3\pi} \cdot \frac{r_1^3 - r_2^3}{r_1^2 - r_2^2}.$$

269.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines homogenen Kreisabschnittes zu finden.

Auflösung. Der Schwerpunkt S des Kreisabschnittes ABD, der bestimmt werden soll, liegt auf der Linie CD, die den Zentriwinkel des Abschnittes halbiert. (Fig. 115.) Durch die Sehne $AB = s$ zerfällt der Kreissektor $CADB$, dessen Fläche F_1 sei, in das Segment $ABD = F$ und das Dreieck $ABC = F_2$. Ist S_1 der Schwerpunkt des Sektors, $CS_1 = y_1$, S_2 der Schwerpunkt des Dreiecks, $CS_2 = y_2$ und S der gesuchte Schwerpunkt des Segments, $CS = y_0$, so liefert der Momentensatz in bezug auf CX die Gleichung

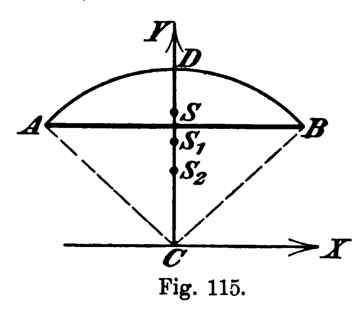


Fig. 115.

$$F_1 \cdot y_1 = F \cdot y_0 + F_2 \cdot y_2,$$

woraus für y_0 der Wert

$$y_0 = \frac{F_1 \cdot y_1 - F_2 \cdot y_2}{F}$$

folgt. Bezeichnet man nun wie bisher den Radius $CA = r$, den Bogen $AB = b$, die Sehne $AB = s$, so ist

$$F_1 = \frac{1}{2} r \,.\, b; \; F_2 = \frac{1}{2} s \cdot \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2};$$

ferner

$$y_1 = \frac{2}{3} \frac{r \,.\, s}{b}; \; y_2 = \frac{2}{3} \sqrt{r^2 - \frac{1}{4} s^2}.$$

Setzt man diese Werte in die Formel für y_0 ein, so erhält man nach einigen leichten Rechnungen

$$y_0 = \frac{s^3}{12\, F},$$

worin also F die Fläche des Segmentes bedeutet.

Anm. Wird der Abschnitt zum Halbkreis, so ist

$s = 2\,r, \;\; F = \frac{\pi}{2}\, r^2$ und

$$y_0 = \frac{4}{3\pi} \cdot r,$$

übereinstimmend mit dem Resultate in § 267.

270.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines zwischen zwei parallelen Sehnen liegenden Flächenstückes eines Kreises zu bestimmen.

Auflösung. Ist $ABFE = F$ (Fig. 116) durch die parallelen Sehnen $AB = a$, $EF = b$ begrenzt, S der gesuchte Schwerpunkt, der auch hier wieder auf CD liegt, so gilt in bezug auf die durch C zu AB parallele Achse, da F die Differenz der Abschnitte ABD und EFD ist, die Momentengleichung

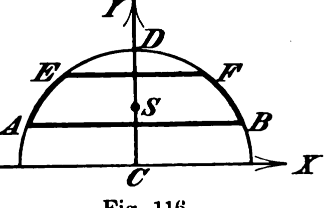


Fig. 116.

$$y_0 \,.\, F = ABD \,.\, \frac{a^3}{12 \cdot ABD} - EFD \,.\, \frac{b^3}{12 \cdot EFD},$$

woraus leicht

$$y_0 = \frac{a^3 - b^3}{12\, F}$$

folgt.

271.

Aufgabe. Den Schwerpunkt des Mantels eines geraden Kegels zu bestimmen.

Auflösung. Denkt man sich den Mantel durch Seitenlinien von der Spitze O aus (Fig. 117) in unendlich viele kleine Sektoren, die als Dreiecke betrachtet werden können, zerlegt, so liegen die Schwerpunkte aller dieser Dreiecke auf der Peripherie desjenigen Kreises, der der Grundfläche parallel von jeder Seitenlinie des Kegels $\frac{1}{3}$ abschneidet; dieser Kreis schneidet aber auch $\frac{1}{3}$ der Höhe OC des Kegels von der Grundfläche aus ab. Der gesuchte Schwerpunkt

Fig. 117.

des Kegelmantels ist aber der Mittelpunkt dieses Kreises: er liegt also in der Achse des Kegels in $\frac{1}{3}$ der Höhe von der Grundfläche.

272.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer Kugelhaube (Zone) zu bestimmen.

Auflösung. Da auf einer Kugel alle Zonen von gleicher Höhe gleichen Flächeninhalt haben (Geometrie § 178), so kann man sich die Haube in parallele Zonen von gleicher, unendlich kleiner Höhe und gleichem Inhalte geteilt denken. Da nun der Schwerpunkt einer jeden solchen unendlich dünnen Zone in die Linie CA fällt, die vom Mittelpunkte C senkrecht auf den Grundkreis der Kugelhaube gefällt ist (Fig. 118) und da wegen des gleichen Inhalts der unendlich dünnen parallelen Zonen alle Punkte der Höhe AB als gleichschwer angenommen werden müssen, so kann die Kugelhaube durch ihre gleichmäßig belastete Höhe ersetzt werden; es liegt also der Schwerpunkt der Kugelhaube in der Mitte ihrer Höhe, d. h. $AS = BS = \frac{1}{2} AB$.

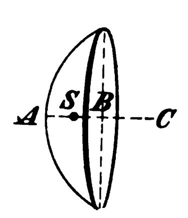


Fig. 118.

273.

Von besonderer Bedeutung für die Praxis ist die Kenntnis der Schwerpunkte von Flächen, die die Querschnitte von Trägern sind. Zur Bestimmung wird der Querschnitt in Teile zerlegt, deren Schwerpunkte man kennt, so daß man durch zweimalige oder, wenn die Symmetrie der Fläche ohne weiteres eine Schwergerade erkennen läßt, durch einmalige Anwendung des Momentensatzes den Schwerpunkt erhält.

An einigen der bemerkenswertesten und am häufigsten vorkommenden Beispielen sei diese Bestimmung gezeigt, wobei der Kürze halber die angewandten Bezeichnungen aus der Figur zu entnehmen sind. Bemerkt sei noch, daß die speziellen Zahlenbeispiele sich auf deutsche Normalprofile beziehen.

I. Das gleichschenklige Winkeleisen. (Fig. 119.) Der Schwerpunkt liegt auf der Halbierungslinie des rechten Winkels. — Der Querschnitt ist die Differenz zweier Quadrate mit den Seiten b und $b-d$. Sind F_1 und F_2 die Flächen derselben, so lautet der Momentensatz

$$x_0 = \frac{F_1 \cdot x_1 - F_2 \cdot x_2}{F_1 - F_2}.$$

Fig. 119.

Nun ist

$$F_1 = b^2; \quad F_2 = (b-d)^2;$$

$$x_1 = \frac{b}{2}; \qquad x_2 = \frac{b-d}{2} + d = \frac{b+d}{2},$$

woraus sich ergibt

$$x_0 = \frac{b^2 + bd - d^2}{2(2b-d}.$$

Beispiel. $b = 60$ mm; $d = 10$ mm; $x_0 = 18{,}7$ mm.

II. Das ungleichschenklige Winkeleisen. (Fig. 120.) Der Querschnitt ist die Summe zweier Rechtecke; das eine hat die Seiten b und d, das andere die Seiten $(B-d)$ und d. Die doppelte Anwendung des Momentensatzes gibt die Formeln

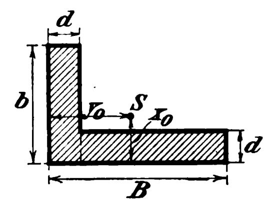


Fig. 120.

$$x_0 = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2}{F_1 + F_2};$$

$$y_0 = \frac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2}{F_1 + F_2}.$$

Hierin sind

$$F_1 = b \cdot d; \qquad F_2 = (B-d)\,d;$$

$$x_1 = \frac{b}{2}; \qquad x_2 = \frac{d}{2};$$

$$y_1 = \frac{d}{2}; \qquad y_2 = \frac{B-d}{2} + d = \frac{B+d}{2}:$$

so daß sich ergeben

$$x_0 = \frac{b^2 + Bd - d^2}{2(b + B - d)};$$

$$y_0 = \frac{bd + B^2 - d^2}{2(b + B - d)}.$$

Beispiel. a) $b : B = 2 : 3$;

$$b = 50 \text{ mm}; \quad B = 75 \text{ mm}; \quad d = 9 \text{ mm};$$

$$x_0 = 13{,}3 \text{ mm}; \quad y_0 = 25{,}8 \text{ mm}.$$

b) $b : B = 1 : 2$;

$$b = 80 \text{ mm}; \quad B = 160 \text{ mm}; \quad d = 12 \text{ mm};$$

$$x_0 = 17{,}9 \text{ mm}; \quad y_0 = 57{,}9 \text{ mm}.$$

III. Das T-Eisen (Fig. 121). Da der Querschnitt eine Symmetrieachse hat, ist nur eine einmalige Anwendung des Momentensatzes nötig. Da der Querschnitt die Summe zweier Rechtecke mit den Seiten b und d und $(h - d)$ und d ist, so gibt der Momentensatz

Fig. 121.

$$x_0 = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2}{F_1 + F_2};$$

hierin sind

$$F_1 = b \cdot d; \qquad F_2 = (h - d) \cdot d;$$

$$x_1 = h - \frac{d}{2}; \qquad x_2 = \frac{h - d}{2}.$$

Durch Einsetzen dieser Werte erhält man

$$x_0 = \frac{b\,(2\,h - d) + (h - d)^2}{2\,(b + h - d)}.$$

Beispiel. a) Hochstegiges T-Eisen:

$$b = 90 \text{ mm}; \quad h = 90 \text{ mm}; \quad d = 10 \text{ mm};$$

$$x_0 = 63{,}8 \text{ mm}.$$

b) Breitfüßiges T-Eisen:

$$b = 90 \text{ mm}; \quad h = 45 \text{ mm}; \quad d = 8 \text{ mm};$$

$$x_0 = 34{,}4 \text{ mm}.$$

IV. Das [-Eisen (Fig. 122). Da es auch hier eine Symmetrielinie gibt, ist nur eine Schwerpunktkoordinate zu berechnen. Der Querschnitt ist die Summe dreier Rechtecke F_1, F_2 und F_3, deren Seiten h und d, und $b - d$ und t sind $(F_2 = F_3)$.

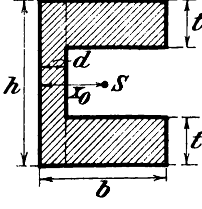


Fig. 122.

Der Momentensatz gibt

$$x_0 = \frac{F_1 \cdot x_1 + F_2 \cdot x_2 + F_3 \cdot x_3}{F_1 + F_2 + F_3}$$

$$= \frac{F_1 \cdot x_1 + 2 F_2 \cdot x_2}{F_1 + 2 F_2};$$

hierin ist

$$F_1 = h \cdot d; \qquad F_2 = (b - d) \cdot t;$$

$$x_1 = \frac{d}{2}; \qquad x_2 = \frac{b - d}{2} + d = \frac{b + d}{2},$$

woraus sich ergibt

$$x_0 = \frac{h \cdot d^2 + t(b^2 - d^2)}{2(h \cdot d + 2t(b - d))}.$$

Beispiel. $h = 300$ mm; $b = 100$ mm; $d = 10$ mm; $t = 16$ mm; $x_0 = 29{,}5$ mm.

Anm. Wegen der in der Wirklichkeit vorkommenden Abrundungen an den Ecken weichen die berechneten Werte ein wenig von den tatsächlichen Werten ab; diese betragen nämlich für

I. $x_0 = 18{,}5$ mm;
II. a) $x_0 = 13{,}2$ mm; $y_0 = 25{,}6$ mm;
b) $x_0 = 17{,}7$ mm; $y_0 = 57{,}2$ mm;
III. a) $x_0 = 65{,}2$ mm;
b) $x_0 = 35{,}0$ mm;
IV. $x_0 = 27{,}0$ mm.

IV. Schwerpunkte von Körpern.

274.

Aus der Anmerkung des § 260 ergeben sich ohne weiteres die Schwerpunkte der folgenden Körper:

Der Schwerpunkt eines Prismas ist der Mittelpunkt der Verbindungslinie der Schwerpunkte der Grundflächen.

Der Schwerpunkt eines Parallelepipeds ist der Schnittpunkt der Diagonalachsen.

Der Schwerpunkt eines regulären Polyëders ist der Mittelpunkt der umbeschriebenen Kugel.

Der Schwerpunkt eines geraden Kreis-Zylinders ist der Mittelpunkt seiner Achse.

Der Schwerpunkt einer Kugel oder einer von konzentrischen Kugelflächen begrenzten Hohlkugel ist der Mittelpunkt.

275.

Lehrsatz. Der Schwerpunkt einer Pyramide liegt auf der geraden Linie, die die Spitze mit dem Schwerpunkte der Grundfläche verbindet, und zwar um ein Viertel dieser Strecke von ihrem Fußpunkte entfernt.

Beweis. Ist die Pyramide zunächst eine dreiseitige mit $A B C$ als Grundfläche und D als Spitze (Fig. 123) und ist E der Schwerpunkt der Grundfläche, dann ist die Linie $D E$ eine Schwergerade; denn denkt man die Pyramide in unendlich dünne Platten $A' B' C'$, . . . parallel der Grundfläche zerlegt, so liegen deren Schwerpunkte sämtlich in der Linie $D E$.

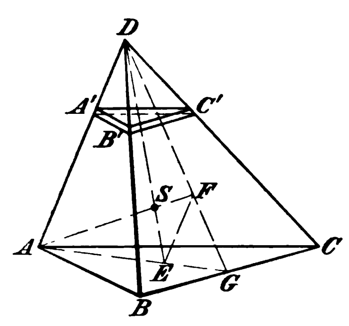


Fig. 123.

Betrachtet man A als Spitze der Pyramide und verbindet A mit dem Schwerpunkte F der gegenüberliegenden Seitenfläche $B C D$, so ist diese Linie aus demselben Grunde eine Schwergerade. Der Schnittpunkt S der beiden Schwergeraden $D E$ und $A F$ ist der Schwerpunkt der Pyramide.*)

Verbindet man nun E mit F, so ist $E F \parallel A D$ (Geometrie § 114), da

$$E G : A G = 1 : 3 \text{ und } F G : D G = 1 : 3$$

(§ 263 Anm.), also

$$E G : A G = F G : D G.$$

Folglich ist $\triangle\, E F S \sim \triangle\, D A S$ und $E S : D S = E F : D A$: ferner ist $\triangle\, G E F \sim \triangle\, G A D$ und $E F : D A = G E : G A = 1 : 3$; also ist auch

$$E S : D S = 1 : 3$$

oder

$$E S = \frac{1}{4} D E.$$

---

*) Daß die Geraden $D E$ und $A F$ einander schneiden müssen, folgt daraus, daß sie beide in der Ebene des Dreiecks $A D G$ liegen, aber auch aus den Bemerkungen im Eingange des § 250.

Da eine durch S parallel zu ABC gelegte Ebene von jeder von D aus nach ABC gezogenen Geraden $\frac{1}{4}$ abschneidet, ist der senkrechte Abstand von S von ABC gleich $\frac{1}{4}h$, wenn h die Höhe der Pyramide ist.

Hat man nun eine beliebig vielseitige Pyramide, so liegt der Schwerpunkt erstens in der Linie, die die Spitze mit dem Schwerpunkte der Grundfläche verbindet. Denkt man nun die Grundfläche in Dreiecke zerlegt, so zerfällt die Pyramide in lauter dreiseitige, und es müssen die Schwerpunkte aller dieser dreiseitigen Pyramiden und mithin auch der Schwerpunkt der ganzen Pyramide in einer zur Grundfläche parallelen Ebene liegen, die von allen von der Spitze nach der Grundfläche gehenden Linien, also auch von der die Spitze mit dem Schwerpunkte der Grundfläche verbindenden Strecke den vierten Teil abschneidet. (Geometrie § 166).

276.

Da ein Kegel als eine Pyramide von unendlich vielen Seitenflächen angesehen werden kann, so gilt vom Kegel dasselbe; es liegt also der Schwerpunkt eines Kreiskegels auf der die Spitze mit dem Mittelpunkte der Grundfläche verbindenden Geraden (der Kegelachse) und ist um ein Viertel dieser Linie vom Mittelpunkte der Grundfläche entfernt.

Insbesondere liegt der Schwerpunkt des geraden Kreiskegels $\frac{h}{4}$ senkrecht über dem Mittelpunkte des Grundkreises.

277.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kugelausschnittes (Sektors) zu bestimmen.

Auflösung. Denkt man sich den Kugelausschnitt in unendlich viele, einander gleiche Pyramiden (Kegel) zerlegt, deren Spitzen im Mittelpunkte C der Kugel liegen und deren Grundflächen unendlich klein sind und die sphärische Oberfläche ABD erfüllen, so sind alle Schwerpunkte derselben um $\frac{3}{4}r$ vom Mittelpunkte C entfernt, erfüllen also die mit

$CA' = \frac{3}{4} r$ beschriebene Kugelhaube (Fig. 124), deren Höhe $\frac{3}{4} h$ ist, wenn $h = DE$ die Höhe der zum gegebenen Kugelausschnitt gehörigen Kalotte ist. Der Schwerpunkt dieser mit $\frac{3}{4} r$ beschriebenen Kalotte ist also zugleich der Schwerpunkt des Ausschnitts. Dieser Schwerpunkt liegt aber in der Mitte der Höhe dieser Kalotte, ist also von der Grundfläche $A'B'$ um $\frac{3}{8} h$ entfernt. Offenbar liegt der Schwerpunkt S auf der Symmetrieachse CD, und daher ist

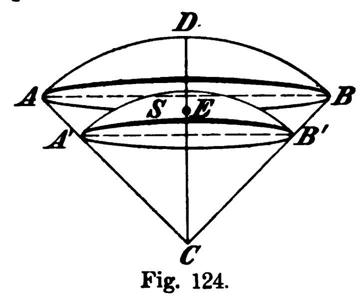


Fig. 124.

$$CS = \frac{3}{4} r - \frac{3}{8} h = \frac{3}{8} (2r - h),$$

worin r den Kugelradius, h die Höhe der zum Sektor gehörigen Kalotte bedeutet.

Zusatz. Wird der Ausschnitt zur Halbkugel, wobei $h = r$ wird, so ist

$$CS = \frac{3}{8} r.$$

278.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Kugelabschnittes (Segmentes) zu bestimmen.

Auflösung. Wegen der Symmetrieverhältnisse liegt der Schwerpunkt S des Abschnittes auf dem vom Mittelpunkte C der Kugel auf die Schnittebene AB gefällten Lote CD, auf dem zugleich der Schwerpunkt S_1 des zu dem Abschnitte gehörigen Ausschnittes und der Schwerpunkt S_2 des Ergänzungskegels liegen (Fig. 125). Der Schwerpunkt ist also bestimmt, wenn man den Abstand $CS = x_0$ kennt.

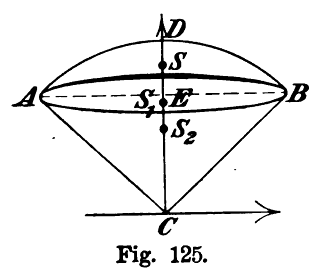


Fig. 125.

Bezeichnen v_1 das Volumen des Ausschnittes, $x_1 = C S_1$ den Abstand seines Schwerpunktes von C, v_2 das Volumen des Kegels, $x_2 = C S_2$ den Abstand seines Schwerpunktes von C, so lautet die Momentengleichung

$$x_0 = \frac{v_1 \cdot x_1 - v_2 \cdot x_2}{v_1 - v_2}.$$

Ist nun r der Kugelradius $C A$, h die Höhe $D E$ des Segments, so ist (Geometrie § 184)

$$v_1 = \frac{2}{3} \pi r^2 . h; \qquad v_2 = \frac{1}{3} \pi h (2 r - h)(r - h);$$

$$x_1 = \frac{3}{8} (2 r - h); \quad x_2 = \frac{3}{4} (r - h).$$

Setzt man diese Werte ein, so erhält man nach einigen leichten Umformungen

$$x_0 = \frac{3}{4} \frac{(2 r - h)^2}{3 r - h}.$$

Zusatz. Für $h = r$ wird der Abschnitt zu einer Halbkugel; für sie liefert unsere Formel den Wert $x_0 = \frac{3}{8} r$, in Übereinstimmung mit dem Zusatze des § 277.

279.

Aufgabe. Den Schwerpunkt einer konzentrisch ausgehöhlten Halbkugel zu bestimmen.

Auflösung. Bezeichnen für die größere Halbkugel r_1, v_1 und x_1 den Radius, das Volumen und den Schwerpunktsabstand von der Grundebene, r_2, v_2 und x_2 dieselben Größen für die kleinere Halbkugel, x_0 aber den Abstand $C S$ (Fig. 126), so gibt der Momentensatz in bezug auf die Grundebene

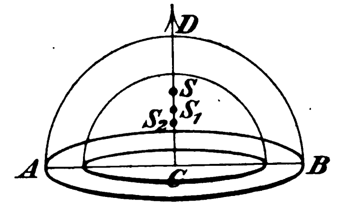


Fig. 126.

$$x_0 = \frac{v_1 \cdot x_1 - v_2 \cdot x_2}{v_1 - v_2};$$

setzt man hierin die bekannten Werte

$$v_1 = \frac{4}{3} \pi r_1^3; \qquad v_2 = \frac{4}{3} \pi r_2^3;$$

$$x_1 = \frac{3}{8} r_1; \qquad x_2 = \frac{3}{8} r_2$$

ein, so erhält man ohne weiteres das gesuchte

$$x_0 = \frac{3}{8} \cdot \frac{r_1^4 - r_2^4}{r_1^3 - r_2^3}.$$

280.

Aufgabe. Den Schwerpunkt eines Pyramidenstumpfes zu finden.

Auflösung. Es mögen g_1 und g_2 die parallelen Grundflächen ($g_1 > g_2$) des Pyramidenstumpfes und h seine Höhe sein (Fig. 127). Denkt man sich den Pyramidenstumpf zu einer Pyramide ergänzt, so muß die Summe der Momente des Pyramidenstumpfes und der Ergänzungspyramide in bezug auf g_1 als Momentenebene gleich dem Momente der ganzen Pyramide sein.

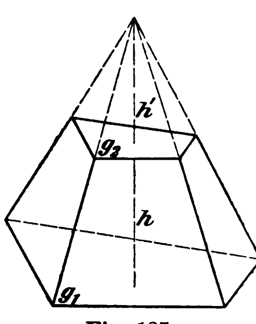


Fig. 127.

Bezeichnen v das Volumen des Stumpfes, v_1 und v_2 die Volumina der ganzen Pyramide und der Ergänzungspyramide, so folgt aus der Momentengleichung sofort

$$v \cdot x_0 = v_1 \cdot x_1 - v_2 \cdot x_2,$$

wenn x_0, x_1, x_2 die Abstände der Schwerpunkte der drei Körper von g_1 sind. Nennen wir nun die Höhe der Ergänzungspyramide vorläufig h', so gelten die folgenden Beziehungen:

$$v = \frac{1}{3} h (g_1 + \sqrt{g_1 \cdot g_2} + g_2);$$

$$v_1 = \frac{1}{3} g_1 (h + h');$$

$$v_2 = \frac{1}{3} g_2 h';$$

ferner sind nach § 275

$$x_1 = \frac{1}{4}(h + h'); \quad x_2 = h + \frac{1}{4}h'.$$

Nun ist aber

$$h' : (h' + h) = \sqrt{g_2} : \sqrt{g_1},$$

woraus folgt

$$h' = \frac{\sqrt{g_2}}{\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}} \cdot h.$$

Hiernach erhält man nach leichten Vereinfachungen:

$$v_1 = \frac{h}{3} \cdot \frac{g_1 \sqrt{g_1}}{\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}}; \quad v_2 = \frac{h}{3} \cdot \frac{g_2 \sqrt{g_2}}{\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}};$$

ferner

$$x_1 = \frac{h}{4} \cdot \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}}; \quad x_2 = \frac{h}{4} \cdot \frac{4\sqrt{g_1} - 3\sqrt{g_2}}{\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}}.$$

Setzt man diese Werte ein, so erhält man für x_0 den Wert

$$x_0 = \frac{g_1{}^2 - 4 g_2 \cdot \sqrt{g_1 g_2} + 3 g_2{}^2}{(\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2})^2 \cdot (g_1 + \sqrt{g_1 g_2} + g_2)} \cdot \frac{h}{4}.$$

Nun ist aber der Zähler durch die erste Klammer des Nenners teilbar; führt man diese Division aus, so ergibt sich

$$(1) \qquad x_0 = \frac{h}{4} \cdot \frac{g_1 + 2\sqrt{g_1 g_2} + 3 g_2}{g_1 + \sqrt{g_1 g_2} + g_2}.$$

Da ferner der Schwerpunkt S auf der Verbindungslinie der Schwerpunkte der beiden Grundflächen g_1 und g_2 liegt, so ist S vollständig bestimmt.

Legt man in $\frac{h}{2}$ einen zu den Grundflächen parallelen Schnitt durch den Pyramidenstumpf und bezeichnet mit z_0 den Abstand des Schwerpunktes von diesem Mittelschnitt, so ist

$$z_0 = \frac{h}{2} - x_0,$$

woraus der einfachere Wert

$$(2) \qquad z_0 = \frac{h}{4} \cdot \frac{g_1 - g_2}{g_1 + \sqrt{g_1 g_2} + g_2}$$

folgt.

Zusatz. Aus der Formel für den Pyramidenstumpf folgt sofort für den Schwerpunkt des Kegelstumpfes, dessen Radien r_1 und r_2 sind, da $g_1 = \pi r_1^2$; $g_2 = \pi r_2^2$ ist, der Abstand von dem größeren Grundkreise

$$x_0 = \frac{h}{4} \cdot \frac{r_1^2 + 2 r_1 \cdot r_2 + 3 r_2^2}{r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2}$$

und der Abstand von dem Mittelschnitte

$$z_0 = \frac{h}{4} \cdot \frac{r_1^2 - r_2^2}{r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2}.$$

281.

Im vorhergehenden haben wir die Schwerpunkte der wichtigsten in der Praxis vorkommenden Flächen und Körper bestimmt und jedenfalls die Methoden angegeben, nach denen man in ähnlichen Fällen zu verfahren hat. Ganz unregelmäßige Flächen und Körper muß man in solche Stücke zerlegen, deren Inhalte und Schwerpunkte man kennt, und dann die allgemeine Methode des § 254 anwenden.

Ein allgemeiner, in vielen Fällen zur Schwerpunktsbestimmung brauchbarer Satz, der die meisten der von uns durchgeführten Bestimmungen als spezielle Fälle umfaßt, soll im folgenden noch begründet werden.

282.

Lehrsatz. Liegt eine ebene Fläche zwischen zwei parallelen Geraden G_1 und G_2, deren Abstand h ist, und kann die in der Entfernung x von G_1 parallel zu G_1 gezogene Schnittlinie y durch die Formel

$$y = a + b x + c x^2 + d x^3 + e x^4 + \dots$$

berechnet werden, so sind der Inhalt F der Fläche und ihr Moment M in bezug auf G_1 als Momentenachse durch die Gleichungen

$$F = a \cdot h + \frac{1}{2} b \cdot h^2 + \frac{1}{3} c \cdot h^3 + \frac{1}{4} d \cdot h^4 + \frac{1}{5} e \cdot h^5 + \dots$$

$$M = \frac{1}{2} a \cdot h^2 + \frac{1}{3} b \cdot h^3 + \frac{1}{4} c \cdot h^4 + \frac{1}{5} d \cdot h^5 + \frac{1}{6} e \cdot h^6 + \dots$$

berechenbar.

Beweis. Teilt man die Höhe h der Fläche in n gleiche Teile und legt durch die Teilpunkte zu G_1 und G_2 parallele Schnittlinien, so erhält man $(n-1)$ Schnittlinien, die mit der in G_2 liegenden oberen Grenze der Fläche n Flächenstreifen begrenzen, die um so eher als Rechtecke aufgefaßt werden können, je größer n gewählt wird.

Die Höhe jedes dieser Rechtecke beträgt $\frac{h}{n}$; ihre Grundlinien können aus der Formel für y berechnet werden, wenn man für x der Reihe nach die Werte

$$\frac{h}{n},\ \frac{2h}{n},\ \frac{3h}{n},\ \ldots\ \frac{nh}{n}$$

einsetzt. Ebenso groß können die Abstände ihrer Schwerpunkte von G_1 angenommen werden.

Danach ergibt sich die Summe der Rechtecke

$$\begin{aligned}
&\left(a + b\cdot\frac{h}{n} + c\cdot\left(\frac{h}{n}\right)^2 + d\cdot\left(\frac{h}{n}\right)^3 + e\cdot\left(\frac{h}{n}\right)^4 + \ldots\right)\cdot\frac{h}{n}\\
&+\left(a+b\cdot\frac{2h}{n} + c\cdot\left(\frac{2h}{n}\right)^2 + d\cdot\left(\frac{2h}{n}\right)^3 + e\cdot\left(\frac{2h}{n}\right)^4 + \ldots\right)\cdot\frac{h}{n}\\
&+\left(a+b\cdot\frac{3h}{n} + c\cdot\left(\frac{3h}{n}\right)^2 + d\cdot\left(\frac{3h}{n}\right)^3 + e\cdot\left(\frac{3h}{n}\right)^4 + \ldots\right)\cdot\frac{h}{n}\\
&+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\left(a+b\cdot\frac{nh}{n} + c\cdot\left(\frac{nh}{n}\right)^2 + d\cdot\left(\frac{nh}{n}\right)^3 + e\cdot\left(\frac{nh}{n}\right)^4 + \ldots\right)\cdot\frac{h}{n}
\end{aligned}$$

und die Summe ihrer Momente

$$\begin{aligned}
&\left(a + b\cdot\frac{h}{n} + c\cdot\left(\frac{h}{n}\right)^2 + d\cdot\left(\frac{h}{n}\right)^3 + e\cdot\left(\frac{h}{n}\right)^4 + \ldots\right)\cdot\frac{h}{n}\cdot\frac{h}{n}\\
&+\left(a+b\cdot\frac{2h}{n} + c\cdot\left(\frac{2h}{n}\right)^2 + d\cdot\left(\frac{2h}{n}\right)^3 + e\cdot\left(\frac{2h}{n}\right)^4 + \ldots\right)\cdot\frac{h}{n}\cdot\frac{2h}{n}\\
&+\left(a+b\cdot\frac{3h}{n} + c\cdot\left(\frac{3h}{n}\right)^2 + d\cdot\left(\frac{3h}{n}\right)^3 + e\cdot\left(\frac{3h}{n}\right)^4 + \ldots\right)\cdot\frac{h}{n}\cdot\frac{3h}{n}\\
&+\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&+\left(a+b\cdot\frac{nh}{n} + c\cdot\left(\frac{nh}{n}\right)^2 + d\cdot\left(\frac{nh}{n}\right)^3 + e\cdot\left(\frac{nh}{n}\right)^4 + \ldots\right)\cdot\frac{h}{n}\cdot\frac{nh}{n},
\end{aligned}$$

wofür man in anderer Anordnung erhält:

$$a \cdot \frac{h}{n} \cdot n + b \cdot h^2 \cdot \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2}$$
$$+ c \cdot h^3 \cdot \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$$
$$+ d \cdot h^4 \cdot \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}{n^4}$$
$$+ e \cdot h^5 \cdot \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4}{n^5} + \ldots$$

und

$$a \cdot h^2 \cdot \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2}$$
$$+ b \cdot h^3 \cdot \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}$$
$$+ c \cdot h^4 \cdot \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}{n^4}$$
$$+ d \cdot h^5 \cdot \frac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + n^4}{n^5}$$
$$+ e \cdot h^6 \cdot \frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \ldots + n^5}{n^6} + \ldots$$

Läßt man jetzt n unendlich groß werden, so wird die Höhe der Streifen unendlich klein, so daß die Summe der Rechtecke den Inhalt F und die Summe der Momente das Moment M ergibt.

Nun ist aber, wie aus den im § 50 der Analysis zusammengestellten Formeln folgt,

$$\lim_{n=\infty} \frac{1 + 2 + 3 + \ldots + n}{n^2} = \frac{1}{2}$$
$$\lim_{n=\infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$$
$$\lim_{n=\infty} \frac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3}{n^4} = \frac{1}{4}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\lim_{n=\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

wodurch für F und M sich die behaupteten Formeln

$$F = a \,.\, h + \frac{1}{2}\, b \,.\, h^2 + \frac{1}{3}\, c \,.\, h^3 + \frac{1}{4}\, d \,.\, h^4 + \frac{1}{5}\, e \,.\, h^5 + \ldots$$

$$M = \frac{1}{2}\, a \,.\, h^2 + \frac{1}{3}\, b \,.\, h^3 + \frac{1}{4}\, c \,.\, h^4 + \frac{1}{5}\, d \,.\, h^5 + \frac{1}{6}\, e \,.\, h^6 + \ldots$$

ergeben.

Zusatz. Bezeichnet x_0 den Abstand des Schwerpunktes von der Fläche G_1, so hat man nach dem Momentensatze für x_0 den Wert

$$x_0 = \frac{M}{F}.$$

283.

An dem Trapeze als Beispiel soll der vorige Satz Anwendung finden.

Sind a und b die parallelen Seiten, h die Höhe des Trapezes, so folgt leicht (Fig. 128) für den Querschnitt y in der Entfernung x von a die Formel

$$y = a - \frac{a - b}{h} \,.\, x;$$

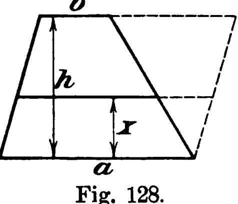


Fig. 128.

hieraus erhält man für die Fläche den Wert

$$F = a\, h - \frac{1}{2}\, \frac{a - b}{h} \cdot h^2 = \frac{1}{2}\,(a + b) \cdot h$$

und für das Moment den Wert

$$M = \frac{1}{2}\, a\, h^2 - \frac{1}{3}\, \frac{a - b}{h} \,.\, h^3 = \frac{1}{6}\, a\, h^2 + \frac{1}{3}\, b\, h^2$$

$$= \frac{1}{6}\, h^2\,(a + 2\, b);$$

hieraus folgt endlich

$$x_0 = \frac{M}{F} = \frac{h}{3} \cdot \frac{a + 2\, b}{a + b}$$

in Übereinstimmung mit § 266.

284.

Genau entsprechend dem Beweise im § 282 kann der entsprechende Satz für Körper bewiesen werden; man braucht nur an Stelle von Querschnittslinie Querschnittsfläche und an Stelle von Rechteck Prisma zu setzen, um den Satz zu erhalten:

Liegt ein Körper zwischen zwei parallelen Ebenen E_1 und E_2, deren Abstand h ist, und kann der in der Entfernung x von E_1 parallel zu E_1 gelegte Querschnitt des Körpers durch die Formel

$$y = a + b\,x + c\,x^2 + d\,x^3 + e\,x^4 + \dots$$

berechnet werden, so sind das Volumen V des Körpers und sein Moment M in bezug auf E_1 als Momentenebene durch die Gleichungen

$$V = a \,.\, h + \frac{1}{2}\, b \,.\, h^2 + \frac{1}{3}\, c \,.\, h^3 + \frac{1}{4}\, d \,.\, h^4 + \frac{1}{5}\, e \,.\, h^5 + \dots$$

$$M = \frac{1}{2}\, a \,.\, h^2 + \frac{1}{3}\, b \,.\, h^3 + \frac{1}{4}\, c \,.\, h^4 + \frac{1}{5}\, d \,.\, h^5 + \frac{1}{6}\, e \,.\, h^6 + \dots$$

berechenbar.

Der Schwerpunktsabstand x_0 des Körpers von der Ebene E_1 ist dann ohne weiteres durch die Gleichung

$$x_0 = \frac{M}{V}$$

bestimmt.

285.

Als Beispiel diene die Berechnung der betreffenden Formeln für die Halbkugel. Für diese ist der Querschnitt in der Höhe x ein Kreis mit dem Radius

$$\sqrt{r^2 - x^2}$$

Fig. 129.

(Fig. 129), wenn r der Kugelradius ist; die Querschnittsfläche ist also

$$y = \pi\, r^2 - \pi\, x^2;$$

hieraus folgt, da die Höhe $h = r$ ist,

$$V = \pi r^3 - \frac{1}{3} \pi r^3 = \frac{2}{3} \pi r^3,$$

$$M = \frac{1}{2} \pi r^4 - \frac{1}{4} \pi r^4 = \frac{1}{4} \pi r^4$$

und nunmehr leicht

$$x_0 = \frac{\frac{1}{4} \pi r^4}{\frac{2}{3} \pi r^3} = \frac{3}{8} r,$$

wie im § 278 (Zusatz) gefunden.

286.

Als ein zweites Beispiel diene der Kegelstumpf. Bei ihm ist der Querschnitt y in der Höhe x ein Kreis, dessen Radius leicht aus der Figur 130 folgt. Man erhält nämlich für diesen Radius $r_1 - \frac{r_1 - r_2}{h} . x$ und danach für den Querschnitt in der Höhe x

Fig. 130.

$$y = \pi \left(r_1 - \frac{r_1 - r_2}{h} x\right)^2$$

$$= \pi r_1{}^2 - 2 \pi r_1 . \frac{r_1 - r_2}{h} . x + \pi \left(\frac{r_1 - r_2}{h}\right)^2 . x^2.$$

Hieraus ergibt sich nun das Volumen und das Moment

$$V = \pi r_1{}^2 . h - \frac{1}{2} . 2 \pi r_1 \frac{r_1 - r_2}{h} . h^2 + \frac{1}{3} \pi . \left(\frac{r_1 - r_2}{h}\right)^2 . h^3$$

$$= \frac{1}{3} \pi h (r_1{}^2 + r_1 . r_2 + r_2{}^2);$$

$$M = \frac{1}{2} \pi r_1{}^2 . h^2 - \frac{1}{3} . 2 \pi r_1 . \frac{r_1 - r_2}{h} . h^3 + \frac{1}{4} \pi . \left(\frac{r_1 - r_2}{h}\right)^2 . h^4$$

$$= \frac{1}{12} \pi h^2 (r_1{}^2 + 2 r_1 . r_2 + 3 r_2{}^2);$$

und damit nun für den Abstand x_0 des Schwerpunktes von der unteren Grundfläche

$$x_0 = \frac{M}{V} = \frac{h}{4} \cdot \frac{r_1{}^2 + 2\,r_1 \cdot r_2 + 3\,r_2{}^2}{r_1{}^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2{}^2},$$

in Übereinstimmung mit dem im § 280 Zusatz angegebenen Resultate.

Aufgaben.

190. Vier Massenpunkte P_1, P_2, P_3 und P_4 liegen in einer geraden Linie; in welcher Entfernung x von P_1 liegt ihr Schwerpunkt, wenn die in den Punkten konzentrierten Massen die Größen $m_1 = 4$; $m_2 = 3$; $m_3 = 6$; $m_4 = 2$ haben und die Abstände $P_2P_1 = 25$ cm; $P_3P_1 = 40$ cm; $P_4P_1 = 45$ cm sind?

Antw.: $x = 27$ cm.

191. In welcher Entfernung x vom Erdmittelpunkte liegt der Schwerpunkt von Erde und Mond, wenn die Masse des Mondes $^1/_{79,7}$ der Erdmasse und seine mittlere Entfernung vom Erdmittelpunkte gleich 60,27 Erdhalbmessern ist?

Antw.: $x = \frac{60,27}{80,7} = 0,747$ Erdhalbmesser.

192. In welchem Abstande von einer Seite liegt der Schwerpunkt des Umfanges eines gleichseitigen Dreiecks, dessen Seite a ist?

Antw.: $^1/_6\, a \sqrt{3} \backsim 0,289\, a$.

193. Ein Draht von $l = 45$ cm Länge und gleichmäßiger Stärke wird rechtwinklig gebogen, so daß die Arme $a = 18$ cm und $b = 27$ cm lang sind; in welchen Entfernungen x und y von a und b liegt der Schwerpunkt des Drahtstückes?

Antw.: $x = \frac{b^2}{2\,l} = 8,1$ cm; $y = \frac{a^2}{2\,l} = 3,6$ cm;

194. Wo liegt der Schwerpunkt eines ⊔-förmigen Drahtstückes, wenn die kleinere Seite a und die größere doppelt so groß ist?

Antw.: $^1/_4\, a$ von der größeren Seite entfernt.

195. In welcher Entfernung x von der mittleren Seite liegt der Schwerpunkt dreier aneinander stoßender Seiten eines regelmäßigen Sechsecks, wenn a die Größe einer Seite ist?

Antw.: $x = {}^1/_6\, a \sqrt{3}$ (vergl. Aufg. 192).

196. Bei Gewölbe- und Brückenkonstruktionen werden als Profile oft **Korbbogen** angewandt, das sind Bogen, die aus Bogen von Kreisen mit verschiedenen Radien so zusammengesetzt sind, daß sie in den Punkten, in denen sie zusammenstoßen, gemeinschaftliche Tangenten haben. Einen solchen Bogen stellt Fig. 131 dar, dessen Anordnung leicht ersichtlich ist. In welchem Abstande x_0 von AB liegt der Schwerpunkt dieses Korbbogens?

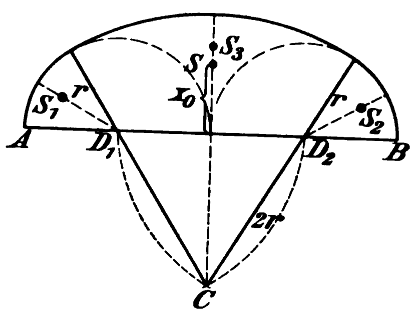


Fig. 131.

Antw.: $x_0 = \frac{3}{5\pi}(10 - \pi\sqrt{3})\, r = 0{,}8706\, r.$

197. Von einem Trapeze sind die parallelen Seiten $a = 18{,}5$ cm, $b = 7{,}5$ cm und die Höhe $h = 10$ cm gegeben; wie groß ist der Abstand des Schwerpunktes von der Seite a?

Antw.: 4,3 cm.

198. Ein regelmäßiges Sechseck (Seite a) wird durch einen Durchmesser des umbeschriebenen Kreises halbiert; in welchem Abstande von diesem Durchmesser liegt der Schwerpunkt der einen Hälfte des Sechsecks?

Antw.: $^2/_9\, a\sqrt{3}.$

199. Welchen Abstand vom Mittelpunkte des Kreises hat der Schwerpunkt a) des vierten; b) des sechsten Teiles der Kreisfläche?

Antw.: a) $\frac{4\sqrt{2}}{3\pi}\, r = 0{,}6002\, r$; b) $\frac{2}{\pi}\, r = 0{,}6366\, r.$

200. Welchen Abstand vom Mittelpunkte des Kreises hat der Schwerpunkt des zum Zentriwinkel a) 90°; b) 60° gehörigen Kreisabschnittes?

Antw.: a) $\frac{2\sqrt{2}}{3(\pi-2)}\, r = 0{,}826\, r$; b) $\frac{1}{2\pi - 3\sqrt{3}} \cdot r = 0{,}920\, r.$

201. Über dem Durchmesser eines Halbkreises als Basis soll ein gleichschenkliges Dreieck so konstruiert werden, daß der Schwerpunkt der beiden Flächen im Mittelpunkte des Kreises liegt; wie groß ist die Höhe h des gleichschenkligen Dreiecks?

Antw.: $h = r\sqrt{2}.$

202. Welchen Abstand vom Mittelpunkte der Kugel hat der Schwerpunkt a) eines Kugelausschnittes, b) eines Kugelabschnittes, dessen Höhe $h = \frac{1}{3} r$ ist?

Antw.: a) $\frac{5}{8} r$; b) $\frac{25}{32} r$.

203. Die Seiten der Grundflächen eines geraden quadratischen Pyramidenstumpfes sind $a = 50$ cm; $b = 40$ cm; die Höhe des Stumpfes ist $h = 30$ cm; welchen Abstand hat der Schwerpunkt des Stumpfes von der unteren Grundfläche?

Antw.: 13,9 cm.

204. Die Radien eines geraden Kegelstumpfes sind $r_1 = 8$ cm; $r_2 = 6$ cm; seine Höhe ist $h = 90$ cm; welchen Abstand hat sein Schwerpunkt von der größeren Grundfläche?

Antw.: 40,7 cm.

205. Auf dem Grundkreise einer Halbkugel als Basis soll ein gerader Kegel so konstruiert werden, daß der Schwerpunkt beider Körper der Mittelpunkt der Kugel ist; wie groß ist die Höhe h des Kegels?

Antw.: $h = r\sqrt{3}$, d. h. ein Achsenschnitt des Kegels ist ein gleichseitiges Dreieck.

206. Rotiert eine Parabel ($y^2 = 2px$) um die x-Achse, so entsteht ein Rotationsparaboloid; in welcher Entfernung vom Scheitel liegt der Schwerpunkt eines Rotationsparaboloids, dessen Höhe h ist?

Antw.: $\frac{2}{3} h$.

Neunzehntes Buch.

Gleichgewicht eines starren Körpers in bezug auf die Schwere.

287.

Im Anfange des vorigen Buches (§ 249) haben wir gesehen, daß die Wirkung der Schwerkraft auf einen starren Körper, welche Lage er auch immer haben möge, durch sein im Schwerpunkte angreifendes Gewicht P, d. h. durch eine im Schwerpunkte angreifende, vertikal abwärts gerichtete Kraft von der Größe P ersetzt werden kann.

Auch ist bereits früher (§ 51) die alltägliche und allge-

mein geläufige Erfahrungstatsache erwähnt worden, daß jeder nur dem Einflusse der Schwerkraft unterworfene starre Körper zufolge eben seines im Schwerpunkte angreifenden Gewichtes das Bestreben hat, in vertikaler Richtung zu fallen.

Soll diese Wirkung der Schwerkraft durch irgendeine andere Kraft gehemmt werden, so muß diese dem Gewichte des Körpers gleich sein und beide müssen in den entgegengesetzten Richtungen einer Geraden wirken; es muß also die Richtung der die Schwerkraft hemmenden Kraft vertikal aufwärts sein, und ihr Angriffspunkt muß auf der durch den Schwerpunkt gehenden vertikalen Geraden liegen.

Die Wirkung der Schwerkraft wird nun dadurch aufgehoben, daß der Körper durch irgendeine Befestigung am Fallen gehindert wird. Eine solche Befestigung aber kann in dreifacher Weise geschehen, nämlich

a) in einem Punkte;
b) in einer Geraden;
c) in einer Fläche.

288.

Der einfachste Fall der Befestigung eines starren Körpers ist die Befestigung in einem Punkte A, wie dies durch eine Aufhängung des Körpers an einem im Punkte A befestigten Faden oder wohl auch durch ein in A angebrachtes Kugelgelenk veranschaulicht werden kann.

In diesem Falle hebt der Widerstand des festen Punktes die Schwerkraft auf; dieser Widerstand aber muß nach dem vorigen Paragraphen aufgefaßt werden als eine in A angreifende, vertikal aufwärts gerichtete Kraft Q, die an Größe gleich dem Gewichte P des Körpers ist und der Stützdruck (oder auch die Befestigungsreaktion) heißt. Zugleich folgt, daß der Aufhängepunkt A mit dem Schwerpunkte in einer vertikalen Geraden liegen muß, falls Gleichgewicht vorhanden sein soll. (Vergl. § 251.)

Dabei spielt aber noch die verschiedene gegenseitige Lage des Schwerpunktes S und des Aufhängepunktes A eine wichtige Rolle für die Art des bestehenden Gleichgewichtes, da nämlich der Schwerpunkt S unter dem Aufhängepunkte

A oder über dem Aufhängepunkte A liegen oder mit demselben zusammenfallen kann. Inwiefern dadurch verschiedene Arten des Gleichgewichtes bedingt sind, sollen die folgenden Betrachtungen zeigen.

289.

Liegt der Schwerpunkt S vertikal unter dem Aufhängepunkte A und bringt man den Körper ein wenig aus der Gleichgewichtslage, so daß S etwa in die Lage von S' kommt (Fig. 132), so heben sich P und Q nicht mehr auf, weil sie nicht mehr in einer Geraden liegen, sondern bilden ein Kräftepaar, das dem wieder losgelassenen Körper eine drehende Bewegung um A als Drehungspunkt erteilt und ihn in seine frühere Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt.

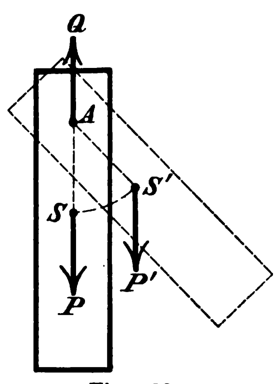


Fig. 132.

Bei der entstehenden Bewegung wird das Moment des Kräftepaares immer kleiner und wird zu Null, wenn S' wieder auf S fällt. Zufolge der Trägheit geht aber der Körper über S hinaus, wodurch wieder ein Kräftepaar auftritt, das ihn in die frühere Gleichgewichtslage zurückzieht. Die so entstehende Schwingungsbewegung um die Gleichgewichtslage wird später der Gegenstand eingehender Untersuchung sein (XXII. Buch), hat aber an dieser Stelle für uns weniger Bedeutung und geringeres Interesse.

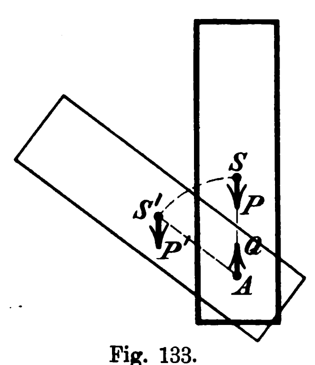


Fig. 133.

Anderer Art ist das Gleichgewicht, wenn der Schwerpunkt S über dem Aufhängepunkte A liegt; bringt man in diesem Falle den Körper aus der Gleichgewichtslage, so daß S in die Lage von S' kommt (Fig. 133), so bilden das Gewicht P in S' und der Stützdruck Q in A wieder ein Kräftepaar, das dem losgelassenen Körper eine drehende Bewegung

um A erteilt, ihn aber noch weiter aus der ursprünglichen Gleichgewichtslage entfernt.

Bei der entstehenden Bewegung wird das Moment des Kräftepaares immer größer, erreicht seinen größten Wert, wenn S mit A in einer horizontalen Geraden liegt, nimmt von da ab und wird zu Null, wenn S vertikal unter A liegt.

Beide Arten des Gleichgewichtes sind also dadurch unterschieden, daß der Körper durch die drehende Bewegung im ersteren Falle in die frühere Gleichgewichtslage zurückgeführt wird, im zweiten Falle noch mehr aus ihr entfernt wird.

Man sagt, das Gleichgewicht sei im ersteren Falle stabil oder sicher, im zweiten Falle labil oder schwankend; wird der Körper im zweiten Falle aus der Gleichgewichtslage entfernt, so strebt er einer stabilen Gleichgewichtslage zu.

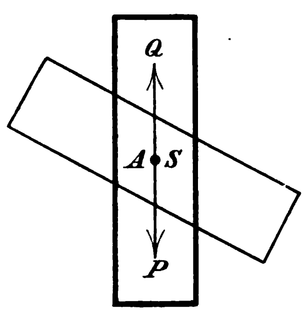


Fig. 134.

Fällt endlich der Schwerpunkt S mit dem Aufhängepunkte A zusammen (Fig. 134), so wird das in S wirkende Gewicht P des Körpers durch den Widerstand Q des Aufhängepunktes A in jeder Lage, die man dem Körper geben kann, aufgehoben, so daß der Körper in jeder Lage im Gleichgewichte ist, also in Ruhe bleibt, wenn man ihn aus der ursprünglichen Gleichgewichtslage entfernt und dann losläßt.

Das Gleichgewicht heißt in diesem Falle indifferent oder unbestimmt.

290.

Die im vorigen Paragraphen unterschiedenen Arten des Gleichgewichtes eines in einem Punkte befestigten Körpers, die durch die gegenseitige Lage des Schwerpunktes und des Aufhängepunktes bedingt waren, können noch in anderer Weise charakterisiert werden.

Liegt der Schwerpunkt S unter dem Aufhängepunkte A, so wird der Schwerpunkt, wenn der Körper aus der Gleichgewichtslage gebracht wird, gehoben (vergl. Fig. 132); da

er aber das Bestreben hat, unter der Einwirkung der Schwere zu fallen, so sucht er in die tiefere Lage, die er vorher inne hatte, wieder zurückzukehren.

Liegt S über A, so sinkt der Schwerpunkt bei einer Lagenänderung des Körpers (vergl. Fig. 133) und sinkt, da er das Bestreben zu fallen hat, weiter, so tief, als es ihm durch die Befestigung in A gestattet ist.

Fällt S mit A zusammen, so ändert der Schwerpunkt bei einer Lagenänderung des Körpers seine Höhe nicht; namentlich kann er sich wegen der Befestigung in A nicht weiter der Erde nähern.

Das Gleichgewicht eines in einem Punkte befestigten Körpers ist also stabil, labil oder indifferent, je nachdem bei einer Lagenänderung des Körpers der Schwerpunkt gehoben wird, sich senkt oder in derselben Höhe bleibt.

Da bei einem Heben des Schwerpunktes Arbeit gegen die Schwere geleistet werden muß oder dem Heben eine negative Arbeit der Schwere entspricht, bei einem Sinken aber positive Arbeit von der Schwere geleistet wird, so kann der Unterschied der drei Arten des Gleichgewichtes auch so ausgesprochen werden:

Ein Körper ist im stabilen Gleichgewichte, wenn bei einer Veränderung seiner Lage sein Gewicht negative Arbeit leistet; er ist im labilen Gleichgewichte, wenn bei einer Lagenänderung sein Gewicht positive Arbeit leistet, und er ist im indifferenten Gleichgewichte, wenn die Arbeit seines Gewichtes bei einer Lagenänderung Null ist.

291.

Ganz analog einem in einem Punkte befestigten Körper verhält sich in bezug auf die verschiedenen Arten des Gleichgewichtes ein Körper, der sich mit einer gekrümmten Oberfläche auf eine andere Oberfläche stützt, wenn dabei die Berührung der beiden Oberflächen annähernd als die Berührung in einem Punkte angesehen werden kann, wie dies durch eine Kugel, die auf einer Oberfläche liegt, veranschaulicht werden kann.

Allerdings muß auf einen wesentlichen Unterschied aufmerksam gemacht werden, der zwischen der Befestigung

eines Körpers in einem Punkte und der eben beschriebenen Unterstützung eines Körpers in einem Punkte besteht. Im ersteren Falle ist nämlich der feste Punkt immer derselbe Punkt des Körpers, während im zweiten Falle bei jeder Verrückung des Körpers aus einer Gleichgewichtslage ein anderer Punkt der Stützpunkt wird, wie z. B. eine Kugel auf einer Oberfläche hin- und herrollen kann. Außerdem liegt bei dem jetzt zu betrachtenden Falle der Schwerpunkt in der Regel über dem Stützpunkte, so daß die gegenseitige Lage von Schwerpunkt und Stützpunkt weniger als Unterscheidungsmerkmal für die Arten des Gleichgewichtes dienen kann, als vielmehr die Lagenänderung des Schwerpunktes bei einer Verrückung des Körpers.

Bleiben wir zunächst bei dem schon angeführten Beispiele, daß eine Kugel auf einer Oberfläche liegt (Fig. 135).

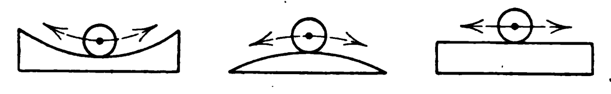
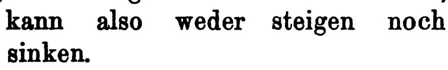


Fig. 135.

Ist diese Oberfläche konkav gekrümmt, liegt die Kugel z. B. in einer Schüssel, so ist die Kugel nur im Gleichgewichte, wenn sie in die tiefste Stelle der Schüssel gelegt wird, weil nur dann der Schwerpunkt vertikal über dem Stützpunkte liegt; in dieser Lage ist die Kugel im stabilen Gleichgewichte, da bei jeder Änderung der Gleichgewichtslage der Schwerpunkt der Kugel gehoben wird. Ist die Oberfläche, auf der die Kugel liegt, konvex, liegt z. B. die Kugel auf einer anderen Kugelfläche, so kann Gleichgewicht nur bestehen, wenn der Schwerpunkt vertikal über dem Stützpunkte liegt, wenn also der Radius der ruhenden Kugel nach dem Berührungspunkte beider Oberflächen vertikal ist; in dieser Lage ist aber die Kugel im labilen Gleichgewichte, da bei jeder Verrückung der Kugel aus der Gleichgewichtslage der Schwerpunkt sinkt.

Liegt aber die Kugel auf einer horizontalen Ebene, z. B. auf einem horizontalen Tische, so ist sie im indifferenten Gleichgewichte, da die Höhe des Schwerpunktes bei jeder Verrückung der Kugel nicht geändert wird; zwar wird die Lage des Schwerpunktes geändert (im Gegensatze zu einem

im Schwerpunkte befestigten Körper), aber der Schwerpunkt beschreibt bei dieser Lagenänderung eine horizontale Gerade,



kann also weder steigen noch sinken.

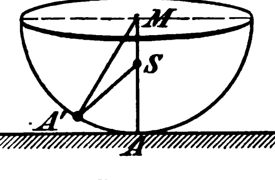


Fig. 136.

Eine auf eine horizontale Ebene mit der sphärischen Oberfläche gelegte homogene Halbkugel (Fig. 136) stellt sich von selbst so ein, daß der Schwerpunkt S mit dem Unterstützungspunkte A in einer Vertikalen liegt; in dieser Lage ist die Halbkugel im stabilen Gleichgewichte. Denn bringt man die Halbkugel aus dieser Gleichgewichtslage, so daß etwa A' der neue Unterstützungspunkt wäre, so folgt aus

$$MS + SA' > MA' \text{ oder } (MA' = MA)$$
$$MS + SA' > MA,$$

daß

$$SA' > SA$$

ist, daß also der Schwerpunkt dabei gehoben ist. Demnach hat S die tiefste Lage, wenn S vertikal über dem Unterstützungspunkte liegt.

Wenn allgemein ein Körper sich mit einer kugelförmigen Fläche auf eine horizontale Ebene stützt und im Gleichgewichte ist, — was nach den allgemeinen Vorbemerkungen über das Gleichgewicht nur möglich ist, wenn der Schwerpunkt auf der im Unterstützungspunkte auf der horizontalen Ebene errichteten Normalen, also auf dem nach dem Unterstützungspunkte gehenden Radius liegt — so kann die Art des Gleichgewichtes auch auf folgende Art geschlossen werden. Da die Richtung des normalen Gegendruckes der Unterstützungsebene stets durch den Mittelpunkt der Kugel geht, so kann man sich den Angriffspunkt dieses Gegendruckes stets in den Mittelpunkt der Kugel verlegt denken und hat dann stabiles, labiles oder indifferentes Gleichgewicht, je nachdem der Schwerpunkt des Körpers unter oder über dem Kugelmittelpunkte liegt oder mit ihm zusammenfällt.

292.

Aufgabe. Die Art des Gleichgewichtes für einen Körper anzugeben, der aus einer Halbkugel mit dem Radius r und

einem über der ebenen Fläche der Halbkugel stehenden geraden Kegel aus gleichem Materiale besteht, wenn der Körper mit der sphärischen Oberfläche sich auf eine horizontale Ebene stützend im Gleichgewichte ist.

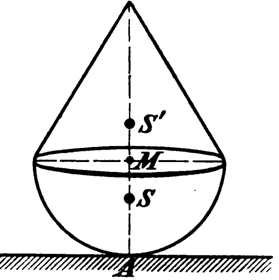


Fig. 137.

Auflösung. Ist M der Mittelpunkt der Halbkugel, S ihr Schwerpunkt, S' der Schwerpunkt des Kegels, h seine Höhe und A der Unterstützungspunkt (Fig. 137), so ist das Gleichgewicht des Körpers indifferent, wenn der Schwerpunkt des ganzen Körpers in den Mittelpunkt M der Kugel fällt. [Vergl. Aufg. 205.] Damit dies der Fall ist, müssen die statischen Momente der Halbkugel und des Kegels in bezug auf M einander gleich sein. Da nun das Volumen der Halbkugel $\frac{2}{3}\pi r^3$ und $MS = \frac{3}{8} r$ (§ 277), das Volumen des Kegels $\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h$ und $MS' = \frac{1}{4} h$ ist, so hat man die Gleichung

$$\frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h \cdot \frac{1}{4} h = \frac{2}{3}\pi r^3 \cdot \frac{3}{8} r,$$

aus der

$$h = r\sqrt{3}$$

folgt. Bezeichnet s die Seitenlinie des Kegels, so ist

$$s = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{r^2 + 3r^2} = 2r.$$

Ist also der Achsenschnitt des Kegels ein gleichseitiges Dreieck, so ist der Körper im indifferenten Gleichgewichte.

Nunmehr folgt aus den Bemerkungen am Schlusse des vorigen Paragraphen ohne weiteres das Resultat:

Das Gleichgewicht des auf die horizontale Ebene aufrecht gestellten Körpers ist

$$\begin{aligned} &\text{stabil für } s < 2r, \\ &\text{labil für } s > 2r, \\ &\text{indifferent für } s = 2r. \end{aligned}$$

Anm. In gleicher Weise findet man die Art des Gleichgewichtes eines aus einer Halbkugel (Radius r) und einem Zylinder (Höhe h) aus gleichem Materiale bestehenden Körpers, der mit der sphärischen Oberfläche sich auf eine horizontale Ebene stützend im Gleichgewichte ist. Das Resultat lautet: das Gleichgewicht ist

$$\text{stabil, wenn } h < \frac{r}{2}\sqrt{2},$$

$$\text{labil, wenn } h > \frac{r}{2}\sqrt{2},$$

$$\text{indifferent, wenn } h = \frac{r}{2}\sqrt{2}.$$

293.

Befindet sich ein in einem Punkte unterstützter Körper im labilen Gleichgewichte, so kann dieser labile Gleichgewichtszustand durch Anbringung von Massen innerhalb des Körpers oder durch seine Verbindung mit Massen außerhalb in einen stabilen umgewandelt werden. Dadurch kann nämlich der gemeinsame Schwerpunkt des Körpers und der mit ihm verbundenen Massen so tief nach unten verlegt werden, daß nunmehr die Bedingungen des stabilen Gleichgewichts erfüllt sind.

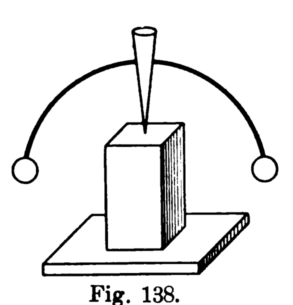


Fig. 138.

Steckt man z. B. durch einen Kegel aus Holz einen kreisförmig gebogenen Draht, an dessen Enden Bleikugeln angehängt werden können (Fig. 138), so ist der auf die Spitze gestellte Kegel im stabilen Gleichgewichte.

Namentlich hat bei mancherlei Kinderspielzeug der hier nur kurz angedeutete Gedanke Verwendung gefunden.

294.

Ganz analoge Verhältnisse wie bei der Befestigung eines Körpers in einem Punkte, treten bei der Befestigung eines Körpers in einer G e r a d e n oder einer A c h s e AB auf.

Soll in diesem Falle Gleichgewicht stattfinden, so muß der Schwerpunkt des Körpers in der durch AB gelegten vertikalen Ebene liegen, denn dann kann der Angriffspunkt der Schwerkraft nach einem Punkte dieser festen Achse verlegt werden, wobei ihre Wirkung durch den Widerstand der festen Achse aufgehoben wird, während andernfalls die Achse für die Schwerkraft eine Drehachse sein würde.

Auch bei dieser Befestigung können die drei verschiedenen Arten des Gleichgewichtes vorkommen: das Gleichgewicht eines in einer Achse befestigten Körpers ist stabil, labil oder indifferent, je nachdem bei einer Drehung des Körpers um diese Achse sein Schwerpunkt steigt, sinkt oder seine Höhenlage beibehält.

Genau dasselbe findet statt, wenn ein Körper nicht in einer Achse befestigt ist, sondern sich in einer geraden Linie auf eine Fläche stützt, wie z. B. ein Zylinder oder ein Kegel mit seinem Mantel auf eine horizontale Ebene.

Ist der Zylinder homogen, so findet bei einer Lagenänderung des Körpers (Fortrollen des Zylinders) keine Änderung in der Höhe des Schwerpunktes statt: der Zylinder ist also in dieser Lage im indifferenten Gleichgewichte. Richtet man aber einen Hohlzylinder von Pappe so ein, daß mit ihm ein Stab von Blei in verschiedenen Lagen exzentrisch verbunden werden kann, so zeigt er deutlich den Unterschied zwischen stabilem und labilem Gleichgewichte.

295.

Ist ein Körper in einer Fläche dauernd befestigt, so ist er immer im Gleichgewichte. Zu einer besonderen Untersuchung gibt aber der Fall, daß ein Körper in einer Fläche unterstützt ist, Veranlassung.

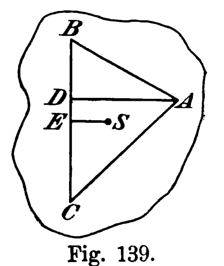


Fig. 139.

Nehmen wir zunächst an, ein Körper vom Gewichte P sei in drei nicht in einer Geraden liegenden Punkten A, B und C einer horizontalen Ebene unterstützt (Fig. 139), und stellen uns die Aufgabe, die von den Unterstützungspunkten geleisteten Stütz- oder Gegendrucke zu berechnen. (Vergl.

die Aufg. des § 227.) Ist S die Projektion des Schwerpunktes des Körpers auf die Horizontalebene, so wirkt in S das Gewicht des Körpers vertikal nach unten, während die in A, B und C wirkenden Gegendrucke P_1, P_2 und P_3 vertikal nach oben gerichtet sind. Wählen wir $B\,C$ als Momentenachse, so besteht in bezug auf diese für den Fall des Gleichgewichtes die Momentengleichung

$$P \,.\, S\,E - P_1 \,.\, A\,D = 0,$$

woraus

$$P_1 = P \,.\, \frac{S\,E}{A\,D} \tag{1}$$

folgt. In entsprechender Weise können die Gegendrucke P_2 und P_3 berechnet werden. Die Diskussion der Gleichung (1) und der analogen für P_2 und P_3 liefert aber die folgenden neuen Erkenntnisse. Wäre $S\,E = 0$, läge also der Schwerpunkt des Körpers vertikal über der Seite $B\,C$, so wäre auch $P_1 = 0$, und in diesem Falle wäre das Gleichgewicht des Körpers labil; das kleinste Übergewicht über der Seite $B\,C$ hinaus würde hinreichen, den Körper um die Seite $B\,C$ zu drehen oder umzuwerfen. Die Seite $B\,C$ heißt dann eine Drehkante oder Kippkante des Körpers.

Wäre $S\,E$ negativ, fiele also die Projektion des Schwerpunktes jenseits $B\,C$ außerhalb des Dreiecks $A\,B\,C$, so wäre P_1 negativ, d. h. in A wäre ein nach unten wirkender Gegendruck nötig, um den Körper im Gleichgewichte zu erhalten und zu verhindern, daß er nicht um $B\,C$ umkippe; der Körper müßte z. B. durch eine Schraube in A an der horizontalen Ebene befestigt sein.

Wenn dagegen P_1, P_2 und P_3 positiv sind, was der Fall ist, wenn S innerhalb des Dreiecks $A\,B\,C$ liegt, so ist der Körper im stabilen Gleichgewichte, und es bedürfte einer besonderen Kraft, um ihn um eine der Seiten des Dreiecks umzukippen.

Bei der betrachteten Unterstützungsart eines Körpers spielt also das durch die drei Unterstützungspunkte bestimmte Dreieck, die sogenannte Unterstützungsfläche, eine wesentliche Rolle.

Wenn ein Körper in mehr als drei Punkten auf einer horizontalen Ebene unterstützt ist, so sind zwar die Gegendrucke in den einzelnen Stützpunkten unbestimmt (vergl.

Anm. zu § 227), aber die Unterstützungsfläche hat für die Stabilität des Körpers auch hier dieselbe Bedeutung wie vorhin.

Stützt sich ein Körper mit einer ebenen Grundfläche auf eine horizontale Ebene, so ist er als ein Körper mit unendlich vielen Stützpunkten anzusehen, so daß für ihn dieselben Beziehungen wie für den Körper mit nur drei Stützpunkten gelten.

Die Unterstützungsfläche für eine beliebige Menge von Stützpunkten erhält man folgendermaßen. Man wählt einen Stützpunkt A so aus, daß man durch ihn eine Gerade legen kann, die die Ebene in zwei Teile zerlegt, von denen der eine sämtliche Stützpunkte des Körpers, der andere gar keine enthält. Diese Gerade dreht man nun um A so lange, bis sie einen zweiten Stützpunkt B trifft, so daß aber sämtliche anderen Stützpunkte des Körpers auf derselben Seite der Geraden liegen bleiben. Dann dreht man die Gerade in derselben Weise um B, bis sie einen dritten Stützpunkt C trifft und so fort, bis man zu A zurückgelangt. Das auf diese Weise von den Geraden eingeschlossene Vieleck oder die von ihnen umhüllte geschlossene Kurve enthält sämtliche Stützpunkte und ist die Unterstützungsfläche.

Ist die Unterstützungsfläche ein Vieleck, so kann nicht nur jede Seite, sondern auch jede durch eine Ecke gehende Gerade, die das Vieleck nicht schneidet, zur Kippkante gewählt werden; ist die Unterstützungsfläche eine Kurve, so kann jede Tangente dieser Kurve Kippkante sein.

Ein auf einer horizontalen Ebene mit beliebig vielen Stützpunkten stehender Körper ist also im stabilen Gleichgewichte, wenn der Schwerpunkt vertikal über der Unterstützungsfläche liegt.

Stände der Körper statt auf einer horizontalen auf einer dagegen geneigten Ebene und wäre er irgendwie gegen das Gleiten (Fallen) auf derselben gesichert, so ist auch dann der Körper so lange im stabilen Gleichgewichte, als die durch den Schwerpunkt gehende Vertikale die Unterstützungsfläche trifft.

296.

Standfestigkeit oder Stabilität eines Körpers in bezug auf eine Kippkante nennt man den Widerstand, den

ein Körper dem Umkippen um jene Kante (Umkanten) entgegensetzt.

Legt man durch den Schwerpunkt S die Normalebene zur Kippkante, ist $ABCD$ die Figur, in der diese Ebene den Körper schneidet (Fig. 140), so daß die Kippkante in B auf der Bildebene senkrecht steht, und bezeichnet man den senkrechten Abstand EB des in S angreifenden Gewichtes P des Körpers von der Kippkante mit a, so wird die Stabilität des Körpers in bezug auf diese Kippkante durch das statische Moment $P \cdot a$ gemessen, das deshalb das **Stabilitätsmoment** des Körpers für jene Kippkante heißt.

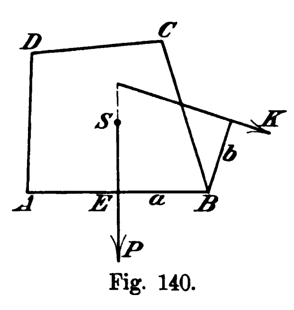


Fig. 140.

Greift nämlich an dem Körper in jener Ebene eine Kraft K an, die das Bestreben hat, den Körper um die Kippkante umzukanten, so tritt so lange keine Drehung um die Kippkante ein, als das statische Moment von K kleiner oder gleich dem Stabilitätsmomente ist; bezeichnet man mit b den Hebelarm von K in bezug auf B, so ist

$$K \cdot b = P \cdot a \tag{1}$$

die Bedingung dafür, daß K und P im Gleichgewichte sind; wird aber

$$K > \frac{P \cdot a}{b}, \tag{2}$$

so tritt eine Drehung um die Kippkante ein. Es muß also die Kraft, die einen auf einer horizontalen Ebene stehenden Körper umkanten soll, um so größer sein: 1. je schwerer der Körper ist, 2. je breiter die Basis des Körpers ist, 3. je tiefer die Kraft am Körper angreift.

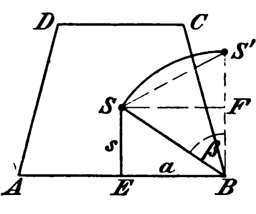


Fig. 141.

Bei der Drehung des Körpers aber um eine Kante wird der Schwerpunkt allmählich gehoben (Fig. 141), bis er die höchste Lage S' vertikal über der Kippkante erreicht, in welchem Augenblicke der Körper sich im labilen Gleichgewichte befindet. Dann braucht die Kraft K nicht mehr zu

wirken, es genügt vielmehr das Gewicht P des Körpers allein, den Körper vollends um die Kippkante umzuwerfen.

Die mechanische Arbeit, die dabei die Kraft K verrichtet, wenn sie den Körper aus seiner Ruhe in die labile Gleichgewichtslage bringt, und die von dem Gewichte P des Körpers konsumiert wird, heißt die dynamische Stabilität oder dynamische Standfestigkeit, wohl auch die Kipparbeit; wird die Höhe FS', um die der Schwerpunkt gehoben wird, mit h bezeichnet, so ist

$$A = P \cdot h \tag{3}$$

der Ausdruck und das Maß für die dynamische Stabilität des Körpers.

Setzt man $\measuredangle\, SBS' = \beta$, so ist $tg\,\beta = \frac{a}{SE}$, $\measuredangle\, FSS' = \frac{\beta}{2}$ und folglich, da $SF = a$ ist, $h = a \cdot tg\,\frac{\beta}{2}$, also

$$A = P \cdot a \cdot tg\,\frac{\beta}{2}. \tag{4}$$

Bezeichnet man mit s die Höhe SE des Schwerpunktes über der Horizontalebene, so ist $h = \sqrt{a^2 + s^2} - s$, so daß die Formel (3) nach Multiplikation und Division mit $\sqrt{a^2 + s^2} + s$ übergeht in

$$A = \frac{P \cdot a^2}{s + \sqrt{s^2 + a^2}} \tag{5}$$

die dynamische Standfestigkeit ist also um so größer, 1. je größer das Gewicht des Körpers ist, 2. je größer a, d. h. je breiter die Basis des Körpers ist, 3. je kleiner s ist, je tiefer also der Schwerpunkt des Körpers liegt.

297.

Aus den entwickelten Gesetzen über das Gleichgewicht fester Körper unter der Einwirkung der Schwere ergeben sich eine große Reihe von Folgerungen, die für die Praxis von Wichtigkeit sind, und von denen nur einige aufgezählt werden mögen.

Pyramiden und Kegel haben eine größere Stabilität als gleichhohe Prismen und Zylinder mit gleicher Grundfläche.

Durch den Ballast, der in die untersten Räume gebracht wird, ist das Schiff gegen das Kentern gesicherter; bei hochbeladenen Wagen werden die schwersten Gegenstände zu unterst gelegt; der Wagen aber fällt um, wenn er mit den Rädern auf einer Seite auf einen zu steilen Abhang gerät, so daß die Schwerpunktsprojektion außerhalb des durch die Räder bestimmten Vierecks fällt. Säulen (Füße von Lampen) werden, damit sie um so fester stehen, unten mit Blei ausgegossen. Befinden sich Menschen in einem schwankenden Boote, so ist die Gefahr des Umschlagens viel geringer, wenn sie sich niederlegen, größer aber, wenn sie aufstehen.

Die Standfestigkeit der vierfüßigen Tiere ist größer als die des Menschen, da bei jenen die Unterstützungsfläche größer ist; daher lernt auch der Mensch das Gehen schwerer als die Tiere. Bei einem aufrecht stehenden Menschen liegt der Schwerpunkt im Unterleibe und eine durch ihn gezogene Vertikale muß das durch die Füße bestimmte Viereck treffen. Daher stellen wir die Füße weiter auseinander, um stabiler zu sein, wenn wir z. B. in einem fahrenden Wagen oder in einem fahrenden Boote stehen. Das Gehen und Laufen ist ein beständiges Fallen und Stützen. Trägt ein Mensch an einer Seite eine Last, so muß er sich nach der entgegengesetzten Seite biegen, damit der gemeinsame Schwerpunkt seines Körpers und der Last in die Unterstützungsfläche fällt; ebenso muß er sich nach vorn neigen, wenn er eine Last auf dem Rücken trägt. Wer sitzt, muß sich beim Aufstehen erst so weit bücken, bis die durch seinen Schwerpunkt gehende Vertikale zwischen seine Füße fällt; analog ist es, wenn wir uns setzen oder einen Gegenstand vom Boden aufheben wollen.

An eine Wand uns fest mit dem Rücken lehnend, können wir nicht ein Bein nach vorn hochheben, auch nicht mit der rechten Seite an die Wand gelehnt auf dem rechten Beine allein stehen und das linke seitlich hochheben.

Beim Balancieren eines Körpers wird der unterstützte Punkt stets vertikal unter den Schwerpunkt des balancierten Körpers gehalten oder bei einer Abweichung wieder unter ihn zu bringen gesucht. Schwere Körper sind leichter zu balancieren als leichte, weil sie einen stärkeren Druck auf die Unterlage (Fingerspitze) ausüben und eine Abweichung daher um so mehr empfunden wird; auch ist ein Körper

um so leichter zu balancieren, je höher sein Schwerpunkt liegt, weil der Schwerpunkt alsdann beim Fallen einen größeren Bogen beschreibt, wozu auch eine längere Zeit nötig ist.

Auf den Gesetzen der Stabilität beruht auch die von Cardano erfundene und nach ihm benannte Aufhängung des Kompasses und der Schiffslampe.

298.

Aufgabe. Ein Block aus Sandstein vom spezifischen Gewichte $s = 2{,}4$ hat die Form eines rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen Kanten $a = 1{,}20$ m; $b = 0{,}80$ m und $c = 1{,}00$ m sind und steht mit einer von den Kanten b und c begrenzten Fläche auf einer Horizontalebene; wie groß sind seine Stabilitätsmomente in bezug auf die Kanten b und c? Wie groß muß eine horizontal gerichtete, im Schwerpunkte angreifende Kraft mindestens sein, um den Körper um b oder c umzukanten, und wie groß ist in beiden Fällen die dynamische Stabilität des Blockes?

Auflösung. Werden die gesuchten Größen für b als Kippkante mit M_b, K_b und A_b und entsprechend für c als Kippkante mit M_c, K_c und A_c bezeichnet, so erhält man zunächst leicht, da das Gewicht P des Blockes

$$P = abc \cdot s \cdot 10^3 \text{ kg}$$

beträgt, wenn a, b und c in Metern ausgedrückt werden, und der Schwerpunkt eines rechtwinkligen Parallelepipeds sein geometrischer Mittelpunkt ist,

$$M_b = P \cdot \frac{c}{2} = \frac{1}{2}\, abc^2 \cdot s \cdot 10^3 \text{ mkg}$$
$$= 1152 \text{ mkg}$$

und

$$M_c = \frac{1}{2}\, ab^2c \cdot s \cdot 10^3 \text{ mkg}$$
$$= 921{,}6 \text{ mkg.}$$

Ferner ergeben sich ohne weiteres aus der Formel (1) des § 296

$$K_b = \frac{2\, M_b}{a} = 1920 \text{ kg,}$$

$$K_c = \frac{2\ M_c}{a} = 1536 \text{ kg.}$$

Endlich erhält man aus Gleichung (5) des § 296

$$A_b = \frac{P \cdot \frac{1}{4} c^2}{\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{c^2}{4}}} = \frac{abc^3 \cdot s \cdot 10^3}{2\,(a + \sqrt{a^2 + c^2})} \text{ mkg}$$

$$= 417{,}1 \text{ mkg}$$

und

$$A_c = \frac{ab^3c\ .\ s\ .\ 10^3}{2\,(a + \sqrt{a^2 + b^2})} \text{ mkg} = 279{,}05 \text{ mkg.}$$

299.

Aufgabe. Wie groß muß die Kraft mindestens sein, die eine auf einer Horizontalebene stehende gerade quadratische Pyramide aus Gußeisen mit der Grundkante $a = 40$ cm, der Höhe $h = 180$ cm und dem spezifischen Gewichte $s = 7{,}2$ umwerfen soll, wenn sie in horizontaler Richtung parallel einer Grundkante wirkend an der Spitze der Pyramide angreift? Wie groß ist die dynamische Stabilität der Pyramide?

Auflösung. Da das Gewicht P der Pyramide

$$P = \frac{1}{3}\, a^2\ .\ h\ .\ \left(\frac{1}{10}\right)^3 .\ s \text{ kg} = 691{,}2 \text{ kg}$$

ist, wenn a und b in Zentimetern ausgedrückt werden, so gilt für die gesuchte Kraft K die Gleichung

$$K\ .\ h = P\ .\ \frac{a}{2},$$

woraus

$$K = \frac{s}{6} \cdot \left(\frac{a}{10}\right)^3 \text{ kg} = 76{,}8 \text{ kg}$$

folgt.

Da der Schwerpunkt einer Pyramide in der Höhe $\frac{h}{4}$ über der Grundfläche liegt, so ist der Winkel β, um den die Pyramide um die Kippkante gedreht werden muß, damit ihr

Schwerpunkt senkrecht über der Kippkante liegt, bestimmt durch

$$tg\,\beta = \frac{2\,a}{h},\text{ woraus } \beta = 23^0\,57'\,46''$$

folgt. Die dynamische Stabilität berechnet sich nun aus der Gleichung

$$A = P \cdot \frac{a}{2} \cdot tg\,\frac{\beta}{2} = 29{,}337 \text{ mkg.}$$

300.

Aufgabe. Wie verhalten sich die Stabilitätsmomente einer quadratischen und einer zylindrischen geraden Säule aus gleichem Materiale und von gleichen Höhen und gleichen Grundflächen, wenn bei der quadratischen Säule eine Grundkante a die Kippkante sein soll?

Auflösung. Da die Säulen gleiche Volumina, also auch gleiche Gewichte haben, ist das Verhältnis ihrer Stabilitätsmomente M und M' gleich dem Verhältnis der Hebelarme dieser Momente, also

$$M : M' = \frac{a}{2} : r = a : 2\,r,$$

da für die zylindrische Säule mit dem Radius r eine Tangente des Grundkreises Kippkante sein muß.

Da aber beide Säulen gleiche Grundflächen haben, oder

$$a^2 = \pi\,r^2$$

ist, so folgt $a = r\,\sqrt{\pi}$ und hieraus

$$\begin{aligned} M : M' &= \sqrt{\pi} : 2 \\ &= 1{,}772 : 2 \\ &= 886 : 1000. \end{aligned}$$

301.

Aufgabe. Auf einer schiefen Ebene ist ein gerades rechtwinkliges Parallelepiped, dessen Grundkanten a und c und dessen Höhe b ist, so befestigt, daß es nicht gleiten, aber um die der Kante der Horizontalebene und der schiefen Ebene parallele Kante c umkippen kann; wie groß darf der

Neigungswinkel α der schiefen Ebene höchstens sein, damit der Körper nicht um die Kante c kippt?

Auflösung. Legt man durch den Schwerpunkt eine zur Kippkante senkrechte Ebene, so schneidet diese den Körper in einem Rechteck mit den Kanten a und b, dessen Mittelpunkt der Schwerpunkt ist. Bezeichnet man den Winkel, den die von der Kippkante ausgehende Diagonale dieses Rechteckes mit der Seite a bildet, mit β, so daß $tg\,\beta = \frac{b}{a}$ ist, so darf α höchstens so groß sein, daß der Schwerpunkt senkrecht über der Kippkante liegt. In diesem Falle aber ist

$$\beta + \alpha = 90^0$$

oder

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b};$$

für diesen Wert von α ist der Körper also im labilen Gleichgewichte; wird

$$tg\,\alpha > \frac{a}{b},$$

so kippt der Körper auf der schiefen Ebene um.

Aufgaben.

207. Wie groß ist das Stabilitätsmoment eines Kegels aus Eichenholz vom spezifischen Gewichte $s = 1{,}15$, wenn sein Radius $r = 6$ cm und seine Höhe $h = 40$ cm ist?

Antw.: 0,104 mkg.

208. Wie groß ist die dynamische Standfestigkeit eines auf einer horizontalen Ebene stehenden Würfels, dessen Kante a ist, und dessen Material das spezifische Gewicht $s = 2{,}8$ hat? ($a = 60$ cm).

Antw.: $\left(\frac{a}{10}\right)^3 \cdot s \cdot \frac{a}{2 \cdot 100}(\sqrt{2} - 1)$ mkg $= 75{,}15$ mkg.

209. Wie groß muß eine an der obern Fläche in horizontaler Richtung angreifende Kraft sein, die diesen Würfel umkippen soll?

Antw.: $\frac{1}{2}\left(\frac{a}{10}\right)^3 \cdot s$ kg $= 302{,}4$ kg.

210. Wie groß ist das Stabilitätsmoment eines geraden regelmäßig dreiseitigen Prismas in bezug auf eine Grundkante, wenn die Grundkante $a = 10$ cm, die Höhe $h = 25$ cm und das spezifische Gewicht des Stoffes (Messing), aus dem das Prisma besteht, $s = 8{,}4$ ist?

Antw.: 0,2625 mkg.

211. Auf einer schiefen Ebene steht ein gerader Zylinder, dessen Höhe gleich dem Durchmesser ist, und ist gegen Abgleiten gesichert; wie groß muß der Neigungswinkel α der schiefen Ebene sein, daß sich der Zylinder im labilen Gleichgewichte gegen das Kippen befindet?

Antw.: $\alpha = 45^0$.

212. Wie verhalten sich die Stabilitätsmomente zweier aus demselben Stoffe bestehenden prismatischen Körper(Mauern) von gleichen Längen und Höhen, wenn der zur Kippkante normale Durchschnitt des einen ein Rechteck, der des andern ein gleichschenkliges Trapez ist, dessen untere Grundlinie gleich der doppelten Breite, dessen obere Grundlinie gleich der Breite des Rechtecks ist?

Antw.: 1:3.

Zwanzigstes Buch.

Von der Bewegung eines starren Körpers im allgemeinen und der fortschreitenden Bewegung im besonderen.

302.

Wenn die an verschiedenen materiellen Punkten eines starren Körpers angreifenden Kräfte nicht im Gleichgewichte sind, so müssen sie eine Änderung des Bewegungszustandes des Körpers hervorbringen. Dabei aber wird die Bewegung, die ein materieller Punkt des Körpers unter dem Einflusse einer auf ihn einwirkenden Kraft P ausführt, im allgemeinen von der Bewegung verschieden sein, die er unter der Einwirkung derselben Kraft ausführen würde, wenn er ein isolierter und nicht mit anderen materiellen Punkten starr verbundener materieller Punkt wäre. Denn wird ein materieller Punkt eines starren Körpers bewegt, so werden zugleich auch sämtliche andere mit ihm fest verbundene Punkte des Körpers bewegt, so daß sich eine jede Änderung im Bewegungszustande des einen materiellen Punktes auf den Bewegungszustand aller materiellen Punkte des starren Körpers überträgt.

Es werden also, da jede Änderung des Bewegungszustandes als die Wirkung einer Kraft anzusehen ist, durch eine Kraft P, die an einem materiellen Punkte eines starren Körpers angreift, Kräfte zwischen den materiellen Punkten des Körpers wachgerufen, die einerseits die Bewegung des direkt angegriffenen Punktes beeinflussen, andererseits diese Bewegung auf die andern materiellen Punkte des Körpers übertragen und den Bewegungszustand derselben verändern.

Man nennt diese Kräfte innere Kräfte im Gegensatze zu der äußeren Kraft P. Sie werden nach dem Gesetze der Wechselwirkung von den einzelnen materiellen Punkten des starren Körpers aufeinander übertragen und treten dann stets auf, wenn eine oder mehrere äußere Kräfte die relative Lage der materiellen Punkte des Körpers zu ändern bestrebt sind.

Die von jedem einzelnen materiellen Punkte des Körpers wirklich ausgeführte Bewegung kann nunmehr gerade so, wie die eines isolierten materiellen Punktes betrachtet werden: sie ist anzusehen als erzeugt durch die Einwirkung aller äußeren auf ihn wirkenden Kräfte und aller durch diese hervorgerufenen inneren Kräfte. Die äußeren wie auch die inneren an dem materiellen Punkte angreifenden Kräfte lassen sich aber je zu einer Resultierenden zusammensetzen, von denen die der äußeren Kräfte als bekannt vorausgesetzt werden kann. Wäre auch die Resultierende der inneren Kräfte bekannt, so könnte die Bewegung eines jeden materiellen Punktes des Körpers vollständig bestimmt werden.

303.

Wenn wir nun auch die Resultierende der an einem materiellen Punkte eines starren Körpers angreifenden inneren Kräfte nicht angeben können, so können wir doch von der Gesamtwirkung der inneren Kräfte einen Satz beweisen, der zu weiteren Schlüssen und Folgerungen führen wird.

Nehmen wir nämlich zunächst an, daß an zwei materiellen Punkten eines in Bewegung befindlichen starren Körpers in der Richtung ihrer Verbindungslinie zwei konstante, gleichgroße, aber entgegengesetzte Kräfte wirken, so ist die Summe der von diesen Kräften bei der Bewegung des Körpers geleisteten Arbeiten gleich Null.

Sind A und B die beiden einem starren Körper angehörenden materiellen Punkte, an denen die gleichgroßen und entgegengesetzt gerichteten Kräfte P_1 und P_2 angreifen, so kann jede beliebige Bewegung des Körpers aus einer Lage in eine benachbarte angesehen werden als zusammengesetzt aus einer fortschreitenden Bewegung von AB in die parallele Lage A_1B_1 (Fig. 142a) und aus einer drehenden Be-

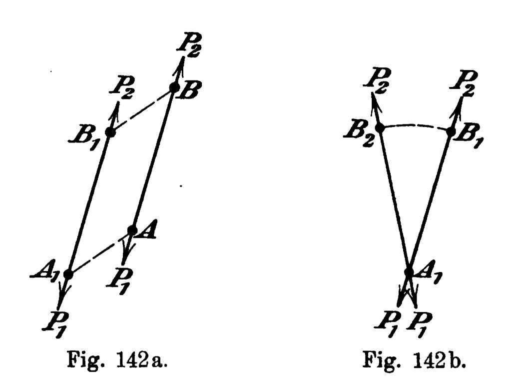


Fig. 142a. Fig. 142b.

wegung um A_1, wobei B_1 in die Lage B_2 kommt (Fig. 142b). Bei der ersteren fortschreitenden Bewegung sind aber nicht nur die Wege der beiden Punkte A und B einander gleich, sondern auch die Projektionen ihrer Wege auf die gemeinsame Richtung der angreifenden Kräfte P_1 und P_2; da diese Kräfte entgegengesetzt gerichtet sind, so sind ihre Arbeiten einander entgegengesetzt gleich, ihre Summe ist also Null. Bei der zweiten drehenden Bewegung um A_1 leistet die in A_1 angreifende Kraft P_1, da A_1 an seinem Orte bleibt, die Arbeit Null, die in B_1 angreifende Kraft P_2 aber, da die Richtung der Bewegung von B_1 stets senkrecht zur Richtung der Kraft ist, ebenfalls die Arbeit Null.

Sind die Kräfte P_1 und P_2 nicht, wie vorausgesetzt wurde, konstant, sondern stetig veränderlich, so kann man die Zeitdauer der Bewegung des Körpers in solch kleine Teilchen zerlegt denken, daß innerhalb eines solchen Zeitteilchens die Kräfte als konstant angesehen werden können; da die in jedem dieser Zeitteilchen von den Kräften verrichteten Elementararbeiten Null sind, so ist es auch ihre Summe.

Da nun nach dem Satze von der Gleichheit der Wirkung

und Gegenwirkung von den an den einzelnen materiellen Punkten eines starren Körpers auftretenden *inneren* Kräften je ein Paar gleiche Größe haben und in der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte nach entgegengesetzten Richtungen wirken, und diese inneren Kräfte wegen der vorausgesetzten Starrheit des Körpers gerade diejenige Größe haben, die nötig ist, um die Entfernungen der materiellen Punkte unverändert zu erhalten, so folgt nunmehr, daß *die Summe der von den inneren Kräften bei irgendeiner Bewegung des Körpers geleisteten Arbeiten stets gleich Null ist*, wie sich auch diese Kräfte während der Bewegung ändern mögen.

304.

Greifen nun an einem starren Körper verschiedene äußere Kräfte an, die als gegeben oder bekannt vorausgesetzt werden und nicht im Gleichgewichte sind, also eine Bewegung des Körpers verursachen, so muß, wenn A_a die von der Resultierenden der an einem materiellen Punkte des Körpers angreifenden äußeren Kräfte während der Bewegung des Punktes geleistete Arbeit, A_i die von der Resultierenden der an demselben Punkte auftretenden inneren Kräfte geleistete Arbeit bezeichnet, wenn ferner m die Masse dieses Punktes, c seine Geschwindigkeit beim Beginne, v seine Geschwindigkeit am Ende der Bewegung ist, nach dem Prinzipe von der Zunahme der Wucht (§ 154)

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mc^2 = A_a + A_i$$

sein.

Wendet man auf jeden der materiellen Punkte des starren Körpers dasselbe Prinzip an und summiert die so erhaltenen Gleichungen, so erhält man

$$\Sigma\left(\frac{1}{2}mv^2\right) - \Sigma\left(\frac{1}{2}mc^2\right) = \Sigma A_a + \Sigma A_i.$$

Nun ist aber im vorigen Paragraphen bewiesen worden, daß die von sämtlichen auftretenden inneren Kräften geleistete Arbeitssumme d. i. $\Sigma A_i = 0$ ist, so daß die eben aufgestellte Gleichung lautet

$$\Sigma\left(\frac{1}{2}mv^2\right) - \Sigma\left(\frac{1}{2}mc^2\right) = \Sigma A_a.$$

Diese Gleichung zeigt nunmehr, daß das im § 154 aufgestellte Prinzip nicht nur von einem einzigen materiellen Punkte, sondern auch von einem starren Körper, d. h. einem Systeme materieller Punkte gilt und ausgesprochen werden kann:

Die Zunahme der Wucht eines starren Körpers ist gleich der Summe aller von den an dem Körper angreifenden äußeren Kräften während einer beliebigen Bewegung des Körpers geleisteten und vom Körper konsumierten Arbeiten.

War die Anfangsgeschwindigkeit des Körpers gleich Null, so lautet die Gleichung insbesondere

$$\Sigma\left(\frac{1}{2}\,mv^2\right) = \Sigma A_a.$$

305.

Ist die Bewegung eines starren Körpers unter der Einwirkung der äußeren Kräfte eine nur fortschreitende Bewegung, so hat die Geschwindigkeit aller materiellen Punkte des Körpers dieselbe Größe v, so dass sich in der Summe $\Sigma\left(\frac{1}{2}\,mv^2\right)$ außer dem Faktor $\frac{1}{2}$ auch v^2 herausheben läßt. Das Prinzip von der Erhaltung der Wucht nimmt dann, wenn der Einfachheit wegen die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null vorausgesetzt wird, die Form an

$$\frac{1}{2}\,v^2 \cdot \Sigma m = \frac{1}{2}\,M \cdot v^2 = \Sigma A_a,$$

wobei M die Summe der Massen der einzelnen materiellen Punkte des Körpers, d. h. seine Gesamtmasse bezeichnet.

306.

Wann aber ist die Bewegung eines starren Körpers, auf den verschiedene äußere Kräfte mit zerstreuten Angriffspunkten wirken, eine nur fortschreitende Bewegung?

Wirken an einem starren Körper beliebig viele äußere Kräfte, so kann man, wie im § 238 gelehrt worden ist, die Angriffspunkte sämtlicher Kräfte unter Hinzufügung der entsprechenden Kräftepaare in ein und denselben Punkt ver-

legen und alle Kräfte zu einer einzigen Resultante und alle Kräftepaare zu einem einzigen Kräftepaare vereinigen.

Wählt man nun als diesen gemeinschaftlichen Angriffspunkt sämtlicher Kräfte den Schwerpunkt des Körpers, so ist die gesamte Wirkung aller an dem Körper angreifenden Kräfte eine nur fortschreitende Bewegung des Körpers, wenn das Moment des resultierenden Kräftepaares Null ist, wenn also die Resultante aller in den Schwerpunkt verlegten Kräfte eine einzige Kraft ist.

Denn wie die Gesamtheit der auf alle Teilchen des Körpers wirkenden Schwerkräfte, die den Massen der Teilchen proportional sind, durch eine stets durch den fest bestimmten einen Schwerpunkt gehende Resultante ersetzt werden kann, so kann auch nur eine im Schwerpunkte angreifende, sonst aber beliebige Kraft in parallele Einzelkräfte zerlegt gedacht werden, die auf die einzelnen Teilchen des Körpers wirken und proportional ihren Massen sind, also allen einzelnen Teilchen der Größe und Richtung nach gleiche Beschleunigungen erteilen, so daß alle Teilchen gleiche und parallele Bahnen beschreiben.

Daraus folgt, dass die Wirkung einer jeden im Schwerpunkte eines Körpers angreifenden Kraft nur eine fortschreitende Bewegung des Körpers sein kann.

Nochmals sei aber hervorgehoben, daß, wie der Schwerpunkt des Körpers eindeutig bestimmt ist, er auch der einzige Punkt ist, durch den die Richtung einer an einem Körper angreifenden Kraft gehen muß, soll sie eine nur fortschreitende Bewegung des gesamten Körpers erzeugen.

307.

Ist die Resultante aller an einem starren Körper angreifenden Kräfte zwar eine einzige Kraft, geht ihre Richtung aber nicht durch den Schwerpunkt des Körpers, so muss man, um die Wirkung dieser Kraft in bezug auf eine fortschreitende Bewegung des Körpers zu untersuchen, ihren Angriffspunkt in den Schwerpunkt verlegen: statt der einen Kraft erhält man dann eine im Schwerpunkte angreifende Kraft und ein Kräftepaar; die erstere erzeugt eine fort-

schreitende Bewegung des Körpers, das letztere eine Drehung um den Schwerpunkt.

Eine genauere Behandlung der Drehbewegung eines Körpers wird, wenigstens in einigen Hauptfällen, unsere nächste Aufgabe sein.

308.

Haben wir nun eine nur fortschreitende Bewegung eines starren Körpers und ist R die Größe der Resultante aller in den Schwerpunkt verlegten am Körper angreifenden Kräfte, so kann man an die Stelle des Körpers seine im Schwerpunkte vereinigte Gesamtmasse setzen und dadurch die Untersuchung der Bewegung des Körpers auf die für die Bewegung eines einzigen materiellen Punktes geltenden Gesetze zurückführen, wie dies übrigens schon mehrfach von uns geschehen ist. Es sei nur an die Bewegung eines Körpers unter der Einwirkung der Schwere (freier Fall, Fall auf der schiefen Ebene, Wurfbewegung) erinnert.

Der Schwerpunkt des Körpers bewegt sich also wie ein materieller Punkt mit der Gesamtmasse M unter der Einwirkung der Kraft R. Ist R konstant, so ist die Beschleunigung durch die Formel

$$a = \frac{R}{M}$$

bestimmt, woraus die Formeln

$$v = c + \frac{R}{M} \cdot t$$

$$s = ct + \frac{1}{2} \frac{R}{M} \cdot t^2$$

und

$$R \cdot s = \frac{1}{2} M \cdot v^2$$

für den Arbeitsinhalt des Körpers folgen.

Einundzwanzigstes Buch.

Von der Drehung eines starren Körpers um eine feste Achse.

309.

Während wir bei der nur fortschreitenden Bewegung eines starren Körpers, bei der sich alle Massenteilchen in parallelen Bahnen mit gleichen Geschwindigkeiten bewegen, die Gesamtmasse immer im Schwerpunkte vereinigt denken konnten, treten ganz andere Verhältnisse auf, wenn sich der starre Körper um eine feste Achse dreht. Denn in diesem Falle haben die einzelnen materiellen Punkte des Körpers, wenn sie nicht gleichweit von der Drehungsachse entfernt sind, verschiedene Geschwindigkeiten, da sie in der nämlichen Zeit die Peripherien verschieden großer Kreise durchlaufen.

Nachdem wir bereits früher (§ 16 und § 24) die der Drehungsbewegung eigentümlichen Begriffe „Winkelgeschwindigkeit“ und „Winkelbeschleunigung“ definiert und die phoronomischen Gleichungen für die Drehung um eine feste Achse aufgestellt haben, ist es jetzt unsere Aufgabe, die Abhängigkeit dieser Gleichungen von den wirkenden Kräften und den durch sie in Bewegung gesetzten Massen abzuleiten, insbesondere auch die Frage nach der Größe der dabei geleisteten Arbeit der Kräfte oder der Zunahme der Wucht oder des Arbeitsinhaltes (d. h. der Energie) des sich um eine feste Achse drehenden starren Körpers zu beantworten.

310.

Trägheitsmoment eines materiellen Punktes. Denken wir uns einen materiellen Punkt A (Fig. 143), der die Masse m habe, mit einer Achse O, von der er die Entfernung r hat, starr verbunden und in einer zu dieser Achse senkrechten Ebene durch eine am Hebelarme $OB=p$ wirkende konstante Kraft P um die Achse gedreht, so ist diese Kraft in bezug auf die Drehung nach § 211 gleichwertig

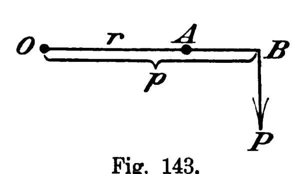


Fig. 143.

einer in A direkt angreifenden Kraft von der Größe $P \cdot \frac{p}{r}$.
Erhält nun der materielle Punkt durch diese konstant wirkende Kraft die Winkelbeschleunigung α, so ist die Umfangsbeschleunigung $a = r \cdot \alpha$ und es gilt nach dem dynamischen Grundgesetze die Gleichung

$$P \cdot \frac{p}{r} = m \cdot a = m \cdot r \cdot \alpha,$$

woraus

$$\alpha = \frac{P \cdot p}{mr^2} \tag{1}$$

folgt.

Das rechts im Nenner auftretende Produkt mr^2 nennt man das Trägheitsmoment oder das Beharrungsmoment des materiellen Punktes in bezug auf die Drehachse.

Anm. 1. Vergleicht man den für α gefundenen Ausdruck mit dem für die fortschreitende Bewegung so oft gebrauchten $a = \frac{P}{m}$, in dessen Zähler die die Bewegung erzeugende Kraft, in dessen Nenner die die Bewegung durch ihren Trägheitswiderstand hemmende Masse steht, so steht im Zähler von α das die Drehung erzeugende statische Moment oder Drehungsmoment der Kraft, woher für das im Nenner stehende Produkt mr^2 der Name Trägheitsmoment erklärlich ist.

Anm. 2. Aus der Erklärung des Trägheitsmomentes ergibt sich sofort seine Dimension; sie beträgt

im technischen Maßsysteme $K\,L\,T^2$,
im absoluten Maßsysteme $M\,L^2\,T^0$.

311.

Äquivalenz zweier materieller Punkte in bezug auf Drehung. Wirkt ein und dasselbe Kraftmoment auf zwei mit derselben Drehungsachse starr verbundene materielle Punkte, so heißen diese in bezug auf die Drehung äquivalent oder gleichwertig, wenn sie gleiche Winkelbeschleunigung erhalten. Sind m_1 und m_2 die Massen der materi-

ellen Punkte, r_1 und r_2 ihre Abstände von der Drehungsachse, so folgt aus

$$\alpha = \frac{P \cdot p}{m_1 \, r_1^{\,2}} = \frac{P \cdot p}{m_2 \, r_2^{\,2}}$$

für die Gleichwertigkeit ohne weiteres die Gleichung

(2) $$m_1 \, r_1^{\,2} = m_2 \, r_2^{\,2},$$

d. h. zwei materielle Punkte sind in bezug auf Drehung um eine feste Achse äquivalent, wenn ihre Trägheitsmomente in bezug auf die Drehungsachse gleich sind.

Solche äquivalenten materiellen Punkte können miteinander vertauscht werden oder es kann ein materieller Punkt durch einen äquivalenten ersetzt werden.

312.

Bezeichnet man mit x die Masse, die in der Entfernung 1 von der Drehungsachse einem materiellen Punkte mit der Masse m und dem Abstande r von der Drehungsachse äquivalent ist, so muß nach Gleichung (2)

$$x \cdot 1^2 = m \, r^2 \text{ oder } x = m \, r^2$$

sein; man kann also das Trägheitsmoment eines materiellen Punktes auch auffassen als eine Masse und zwar als die Masse, die in der Entfernung 1 von der Drehungsachse dem materiellen Punkte in bezug auf Drehung äquivalent ist.

313.

Trägheitsmoment eines starren Körpers. Dreht sich nun ein starrer Körper um eine feste Achse, und sind $m_1, m_2, m_3, \ldots$ die Massen der einzelnen materiellen Punkte des Körpers, $r_1, r_2, r_3, \ldots$ ihre Entfernungen von der Drehungsachse, so können die einzelnen Massenteilchen, ohne daß eine Änderung in dem Drehungszustande des Körpers eintritt, ersetzt werden durch die Massen

$$m_1 \, r_1^{\,2}; \; m_2 \, r_2^{\,2}; \; m_3 \, r_3^{\,2}; \ldots$$

in der Entfernung 1 von der Drehungsachse; es kann also die ganze Masse des Körpers durch die Masse

$$m_1 \, r_1^{\,2} + m_2 \, r_2^{\,2} + m_3 \, r_3^{\,2} + \ldots = \Sigma \, (m r^2)$$

in der Entfernung 1 von der Drehungsachse ersetzt werden. Diese Summe heißt nun das Trägheitsmoment des ganzen Körpers in bezug auf die Drehungsachse. Bezeichnet man es mit dem Buchstaben $\mathfrak{T}$, so hat man die Gleichung

$$\mathfrak{T} = \Sigma (mr^2). \quad (3)$$

Das Trägheitsmoment eines starren Körpers in bezug auf eine Drehungsachse ist also die Summe der Produkte der einzelnen Massenteilchen des Körpers in die Quadrate ihrer Abstände von der Drehungsachse und kann als die Masse aufgefaßt werden, die in der Entfernung 1 von der Drehungsachse in einem einzigen Punkte vereinigt der Gesamtmasse des rotierenden Körpers äquivalent ist, also für sie substituiert werden kann.

314.

Da das Trägheitsmoment $\Sigma (mr^2)$ eines starren Körpers nur von der Größe der einzelnen Massenteilchen und ihren Entfernungen von der Drehungsachse abhängt, so kann man sich die einzelnen Massenteilchen, ohne daß das Trägheitsmoment geändert wird, beliebig verschoben denken, wenn nur ihre Entfernungen von der Drehungsachse ungeändert bleiben.

So kann man z. B. alle Massenteilchen eines schweren Ringes (Schwungrades) bei einer durch den Mittelpunkt des Ringes senkrecht zu seiner Ebene gehenden Drehungsachse sämtlich in einem einzigen Punkte seines Umfanges vereinigt denken.

315.

Will man die einzelnen Massenteilchen eines starren Körpers nicht durch Massen in der Entfernung 1 von der Drehungsachse ersetzen, sondern durch Massen in der beliebigen, für alle aber gleichen Entfernung ϱ von der Drehungsachse, so müssen diese in der Entfernung ϱ anzubringenden äquivalenten Massenteilchen $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ die Gleichungen

$$\mu_1 \varrho^2 = m_1 r_1^2; \; \mu_2 \varrho^2 = m_2 r_2^2; \; \mu_3 \varrho^2 = m_3 r_3^2; \ldots$$

oder die Gleichung

$$\varrho^2 \cdot \Sigma \mu = \Sigma (m r^2)$$

erfüllen. Die Summe $\Sigma\mu$ nennt man die auf die Entfernung ϱ von der Drehungsachse **reduzierte Masse** des starren Körpers; bezeichnet man ihren Wert mit μ, so ist sie durch die Gleichung

$$(4) \qquad \mu \cdot \varrho^2 = \mathfrak{T}$$

bestimmt. Da $\mathfrak{T}$ einen bestimmten numerischen Wert hat, so bestimmen sich μ und ϱ durch diese Gleichung gegenseitig.

Bestimmt man ϱ so, daß μ gleich der Gesamtmasse M des Körpers wird, so heißt dieser bestimmte Wert von ϱ der **Trägheitsradius** des Körpers; er ist durch die aus (4) folgende Gleichung

$$(5) \qquad \varrho = \sqrt{\frac{\mathfrak{T}}{M}}$$

bestimmt.

316.

Sollen nunmehr die Gesetze der drehenden Bewegung eines starren Körpers um eine feste Achse unter der Einwirkung äußerer Kräfte aufgestellt werden, so ist es nach dem Vorstehenden möglich, sich die gesamte Masse des Körpers (wie bei der fortschreitenden Bewegung im Schwerpunkte) ebenfalls in einem einzigen Punkte vereinigt zu denken, wenn es gelingt, das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}$ des starren Körpers in bezug auf die Drehungsachse zu bestimmen.

Obgleich dieses rein mathematische Problem für alle geometrisch bestimmten Körper direkt nur mit Hilfe der höheren Mathematik gelöst werden kann, so gibt es doch einige einfache, aber gerade praktisch wichtige Fälle, wo diese Bestimmung auf elementarem Wege erfolgen kann, und von diesen sollen die wichtigsten im folgenden behandelt werden.

Es bedarf wohl kaum hervorgehoben zu werden, daß das Trägheitsmoment eines starren Körpers ein verschiedenes sein wird, je nach der Lage der Drehungsachse, auf die es bezogen wird; es soll deshalb der Berechnung einiger Trägheitsmomente ein allgemeiner Satz vorausgeschickt werden, nach dem es ohne weiteres möglich ist, das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf eine beliebige Drehungsachse anzugeben, wenn es für eine ihr parallele durch den Schwer-

punkt des Körpers gehende Achse gefunden worden ist. Dieser Satz zeigt zugleich, daß der Schwerpunkt eines Körpers auch für die Drehung um eine feste Achse von fundamentaler Bedeutung ist.

317.

Trägheitsmoment eines starren Körpers in bezug auf zwei parallele Achsen, von denen eine durch den Schwerpunkt geht.

Ein Körper sei nacheinander an zwei Drehungsachsen befestigt, von denen die eine durch den Schwerpunkt S des Körpers geht und die andere dieser parallel ist. Denkt man sich durch den Schwerpunkt S die zu den beiden parallelen Drehungsachsen senkrechte Ebene gelegt und ist O (Fig. 144) der Schnittpunkt dieser Ebene mit der zweiten Drehungsachse, so ist durch die Punkte S und O ein rechtwinkliges Koordinatensystem bestimmt, dessen X-Achse die Gerade $O\,S$ und dessen Anfangspunkt S ist. Ist nun die Strecke $O\,S = d$, ist ferner m ein beliebiges Massenteilchen des Körpers, sind x und y seine Koordinaten, r und ϱ seine Abstände von S und O, so gelten die Gleichungen

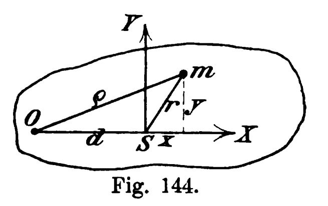


Fig. 144.

$$r^2 = x^2 + y^2;\ \varrho^2 = (x + d)^2 + y^2 = r^2 + 2\,dx + d^2,$$

und es ist das Trägheitsmoment des Teilchens in bezug auf die durch S gehende Achse mr^2, in bezug auf die durch O gehende Achse $m\,(r^2 + d^2 + 2\,dx) = mr^2 + md^2 + 2\,dmx.$

Darnach würde das Trägheitsmoment des gesamten Körpers bei der Drehung um die durch S gehende Achse

$$\mathfrak{T}_s = \Sigma\,(mr^2),$$

bei der Drehung um die durch O gehende Achse aber

$$\mathfrak{T} = \Sigma\,(mr^2) + \Sigma\,(md^2) + \Sigma\,(2\,dmx)$$
$$= \mathfrak{T}_s + d^2 \cdot \Sigma\,m + 2\,d\,.\,\Sigma(mx)$$

sein.

In dem zweiten Gliede auf der rechten Seite dieser Gleichung ist aber $\Sigma\,m = M$, gleich der Gesamtmasse des Körpers; die in dem dritten Gliede stehende $\Sigma\,(mx) = 0$,

da in der Gleichung (2) des § 254 in unserem Falle die Abscisse des Schwerpunktes $x_0 = 0$ ist.

Damit geht die Gleichung zwischen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}_s$ über in

(6) $$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_s + d^2 \cdot M,$$

aus der

(6′) $$\mathfrak{T}_s = \mathfrak{T} - d^2 \cdot M$$

folgt.

Der in der Gleichung (6) enthaltene Satz läßt sich in der Form aussprechen:

Hat man das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Achse bestimmt, so findet man das Trägheitsmoment in bezug auf eine parallele, nicht durch den Schwerpunkt gehende Achse, indem man zu dem ersteren Trägheitsmomente das Produkt aus der Masse des Körpers und dem Quadrate der Entfernung beider Achsen addiert.

Anm. Die Gleichung (6′) lehrt, daß das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Achse stets kleiner ist als in bezug auf jede andere dazu parallele Achse.

318.

Aufgabe. Das Trägheitsmoment eines dünnen geraden Stabes von der Länge $AB = l$ in bezug auf eine durch den einen Endpunkt A gehende, zur Stabrichtung senkrechte Drehungsachse zu finden, wenn die Gesamtmasse M des Stabes gleichmäßig über seine Länge verteilt ist. (Fig. 145.)

A 1.2.3. m B

Fig. 145.

Auflösung. Denkt man sich die Länge des Stabes in sehr viele, n gleiche, so kleine Teile geteilt, daß man die Masse $\frac{M}{n}$ eines jeden Teilchens in den Endpunkt des Teilchens konzentriert denken kann, dann ist der Abstand des des $m$ten Teilchens von der Drehungsachse $m \cdot \frac{l}{n}$ und sein Trägheitsmoment in bezug auf diese Achse $M \cdot \frac{m^2 \cdot l^2}{n^3}$; setzt

man nun m der Reihe nach 1, 2, 3, . . . n und addiert, so erhält man für das gesuchte Trägheitsmoment

$$\mathfrak{T} = M \cdot l^2 \cdot \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2}{n^3}.$$

Läßt man nunmehr n unendlich groß werden und beachtet die Gleichung (vergl. § 282)

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^p + 2^p + 3^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1},$$

so erhält man für $\mathfrak{T}$ den Wert

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{3} M \cdot l^2.$$

Zusatz. Für den Trägheitsradius findet man nach Gleichung (5)

$$\varrho = \sqrt{\frac{l^2}{3}} = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0{,}57735\, l.$$

319.

Aufgabe. Wie groß ist das Beharrungsmoment $\mathfrak{T}_s$ desselben Stabes in bezug auf eine zum Stabe senkrechte, durch den Schwerpunkt gehende Achse? (Fig. 146.)

A S B

Fig. 146.

Auflösung. Nach Gleichung (6′) ergibt sich ohne weiteres, da

$$d = \frac{1}{2} l$$

ist

$$\mathfrak{T}_s = \mathfrak{T} - \frac{1}{4} l^2 \cdot M$$

$$\mathfrak{T}_s = \frac{1}{12} M \cdot l^2.$$

Anm. Das Resultat hätte man auch ohne Anwendung des in Gleichung (6′) ausgesprochenen Lehrsatzes erhalten, wenn man das Trägheitsmoment jeder Hälfte von $A\,B$, also von $A\,S$ und $B\,S$ in bezug auf S bildet und beide Momente addiert, denn es ist gleichgültig nach der am Schlusse des § 314 gemachten Bemerkung, ob man die Masse $\mathfrak{T}$ in einem einzigen Punkte in der Entfernung 1 von der Drehachse ver-

einigt denkt oder auf beliebig viele Punkte des mit dem Halbmesser 1 um S beschriebenen Kreises verteilt.

320.

Aufgabe. Das Trägheitsmoment eines Stabes AB, dessen Masse M gleichförmig über seine Länge l verteilt ist, in bezug auf eine Achse zu finden, die auf einer durch AB gelegten Ebene in O senkrecht steht, wenn $\measuredangle OAB = 90^0$ und $OA = a$ ist. (Fig. 147.)

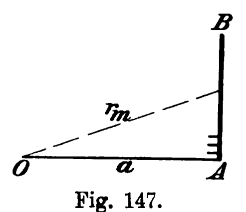


Fig. 147.

Auflösung. Denkt man sich wieder die Länge des Stabes AB in n gleiche Teile geteilt und die Masse jedes Teilchens in ihrem Endpunkte konzentriert, so ist der Abstand r_m des $m$ten Teilchens von O durch

$$r_m{}^2 = a^2 + \left(\frac{m\,l}{n}\right)^2$$

bestimmt, so daß das Trägheitsmoment dieses Teilchens in bezug auf die durch O gehende Drehungsachse

$$\frac{M}{n}\left(a^2 + \frac{m^2 l^2}{n^2}\right) = M\left(\frac{a^2}{n} + l^2 \cdot \frac{m^2}{n^3}\right)$$

ist. Bildet man die Summe aller Trägheitsmomente für $m = 1, 2, 3, \ldots n$, so erhält man

$$M\left(\frac{a^2}{n} \cdot n + l^2 \cdot \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}\right),$$

woraus für $n = \infty$ für $\mathfrak{T}$ die Gleichung sich ergibt

$$\mathfrak{T} = M\left(a^2 + \frac{1}{3}\,l^2\right).$$

Anm. Trifft das von O auf AB gefällte Lot nicht A, sondern den Mittelpunkt von AB, so kann man entsprechend dem in der Anmerkung des § 319 angegebenen Verfahren AB in zwei Teile von der Länge $\frac{l}{2}$ und der Masse $\frac{M}{2}$ zerlegen, deren Trägheitsmomente nach der eben gefundenen Formel berechnen und addieren. Man erhält dadurch

$$\mathfrak{T}' = 2 \cdot \frac{M}{2}\left(a^2 + \frac{1}{12}\,l^2\right) = M\left(a^2 + \frac{1}{12}\,l^2\right).$$

321.

Aufgabe. Ein Rechteck $ABCD$ (eine dünne Platte), dessen Seiten $AB = a$ und $AD = b$ sind, und dessen Masse M gleichmäßig über die Fläche verbreitet ist, rotiert um die Seite AD als Achse. Wie groß ist das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}$ des Rechtecks in bezug auf diese Achse als Drehungsachse?

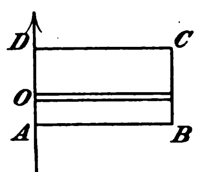


Fig. 148.

Auflösung. Denkt man sich das Rechteck in n sehr schmale Streifen, wie in Fig. 148 angedeutet ist, zerlegt, so ist das Trägheitsmoment eines solchen um seinen Endpunkt O rotierenden Streifens nach § 318 $\frac{1}{3}\frac{M}{n}\cdot a^2$. Mithin ist das Trägheitsmoment des ganzen Rechtecks

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{3} M \cdot a^2.$$

Die Breite b des Rechteckes kommt also gar nicht in Betracht. — Die gefundene Masse $\frac{1}{3} M \cdot a^2$ kann man sich auch gleichmäßig über eine Strecke b verteilt denken, die parallel zu AD in der Entfernung 1 von AD gezogen wird.

Zusatz. Rotiert das Rechteck um eine zu AD parallele durch seinen Schwerpunkt gehende Achse, so findet man nach § 317

$$\mathfrak{T}_s = \frac{1}{12} M \cdot a^2.$$

322.

Aufgabe. Das Trägheitsmoment eines Rechtecks $ABCD$ (Fig. 149) mit den Seiten $AB = a$ und $AD = b$ in bezug auf eine durch den Mittelpunkt E der Seite AB gehende, zur Ebene des Rechtecks senkrechte Achse zu berechnen.

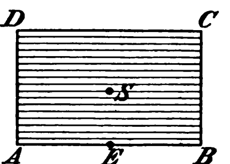


Fig. 149.

Auflösung. Denkt man sich das Rechteck durch Parallele zu AB in n gleich breite, sehr schmale Streifen zerlegt, so kann

man das Trägheitsmoment der einzelnen Streifen nach § 320 Anm. berechnen. Man findet für den m^{ten} Streifen, dessen Entfernung von E gleich $m\frac{b}{n}$ ist, das Trägheitsmoment

$$\frac{M}{n}\left(m^2 \cdot \frac{b^2}{n^2} + \frac{1}{12}a^2\right).$$

Setzt man hierin $m = 1, 2, 3, \ldots n$ und addiert, so erhält man das gesuchte Trägheitsmoment

$$M \cdot \left(\frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} \cdot b^2 + \frac{1}{12}a^2 \cdot \frac{n}{n}\right),$$

also beim Übergange zu $n = \infty$

$$\mathfrak{T} = M \cdot \left(\frac{1}{3}b^2 + \frac{1}{12}a^2\right) = \frac{1}{12}M \cdot (a^2 + 4b^2).$$

Zusatz 1. Nach dem Satze des § 317 ergibt sich für das Trägheitsmoment in bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende, zur Ebene des Rechtecks senkrechte Drehungsachse, da $ES = \frac{1}{2}b$ ist,

$$\mathfrak{T}_s = \mathfrak{T} - \frac{1}{4}b^2 \cdot M,$$

$$\mathfrak{T}_s = \frac{1}{12}M \cdot (a^2 + b^2).$$

Zusatz 2. Rotiert das Rechteck um eine durch eine Ecke, z. B. durch A gehende, zur Ebene des Rechtecks senkrechte Achse, so ist, da $AS = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$ ist, das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}'$ in bezug auf diese Drehungsachse

$$\mathfrak{T}' = \frac{1}{12}M \cdot (a^2 + b^2) + \frac{1}{4}M \cdot (a^2 + b^2) = \frac{1}{3}M \cdot (a^2 + b^2).$$

Zusatz 3. Das zuletzt gefundene Resultat konnte auch aus § 321 unter Beachtung des folgenden Satzes direkt abgelesen werden: Nach Fig. 150 ist das Trägheitsmoment eines Körpers in bezug auf eine senkrecht zur Bildebene in O stehende Achse

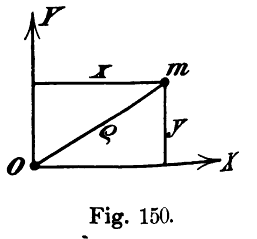


Fig. 150.

$$\Sigma(m\varrho^2) = \Sigma[m(x^2 + y^2)]$$
$$= \Sigma(mx^2) + \Sigma(my^2).$$

Im Falle der Körper eine ebene dünne Scheibe ist, sind $\Sigma(mx^2)$ und $\Sigma(my^2)$ die Trägheitsmomente $\mathfrak{T}_y$ und $\mathfrak{T}_x$ in bezug auf die Achsen OY und OX. Kann man also diese berechnen, so ist

$$\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}_x + \mathfrak{T}_y.$$

Nach § 321 ist nun $\mathfrak{T}_a = \frac{1}{3} M \cdot b^2$ und $\mathfrak{T}_b = \frac{1}{3} M . a^2$, also

$$\mathfrak{T}' = \frac{1}{3} M . (a^2 + b^2).$$

Anm. Wie die im § 321 abgeleitete Formel für das Trägheitsmoment eines um eine Seite rotierenden Rechtecks identisch war mit der für das Trägheitsmoment einer Stange, die um einen Endpunkt rotiert, so ist leicht einzusehen, daß die im vorstehenden entwickelten drei Formeln auch für ein rechtwinkliges Parallelepiped gelten, dessen Masse M ist, und das das Rechteck $ABCD$ zur Grundfläche hat, wenn es sich um eine durch E, S oder A gehende, zur Grundfläche senkrechte Achse dreht.

323.

Aufgabe. Das Trägheitsmoment eines schwer gedachten rechtwinkligen Dreiecks ABC, dessen Katheten $BC = a$ und $AC = b$ gegeben sind, in bezug auf eine durch A gehende, zur Ebene des Dreiecks senkrechte Achse zu berechnen. (Fig. 151.)

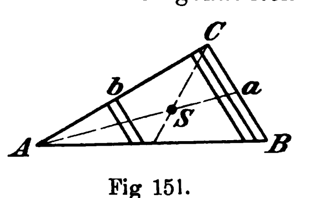


Fig 151.

Auflösung. Zerlegt man das Dreieck durch Parallele zu a in n sehr schmale, gleichbreite Streifen von der Breite $\frac{b}{n}$, so hat der m^{te} Streifen (von A aus gerechnet) die Länge $\frac{m}{n} a$; ist nun M die Gesamtmasse des Dreiecks, so ist die Masse der Flächeneinheit $M : \frac{ab}{2} = \frac{2M}{ab}$ und die Masse des m^{ten} Streifens

$$\frac{2M}{ab} \cdot \frac{b}{n} \cdot \frac{m}{n} \cdot a = 2M \cdot \frac{m}{n^2} \cdot$$

Nach § 320 ist das Trägheitsmoment dieses Streifens, da seine Enfernung von A gleich $\frac{m}{n} \cdot b$ und seine Länge $\frac{m}{n} \cdot a$ ist,

$$2M \cdot \frac{m}{n^2}\left(\frac{m^2}{n^2} \cdot b^2 + \frac{1}{3}\frac{m^2}{n^2} \cdot a^2\right) = 2M \cdot \left(\frac{1}{3}a^2 + b^2\right) \cdot \frac{m^3}{n^4}.$$

Setzt man hierin $m = 1, 2, 3, \ldots n$, addiert und läßt dann $n = \infty$ werden, so erhält man

$$\mathfrak{T}_A = \frac{1}{2} M \cdot \left(\frac{1}{3}a^2 + b^2\right) = \frac{1}{6} M \cdot (a^2 + 3b^2).$$

Geht man vom Punkte A zum Schwerpunkte über, so ist

$$AS = \frac{2}{3}\sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2},$$

also

$$\mathfrak{T}_s = \frac{1}{6} M \cdot (a^2 + 3b^2) - \frac{4}{9} M \cdot \left(b^2 + \frac{1}{4}a^2\right)$$

$$= \frac{1}{18} M \cdot (a^2 + b^2).$$

Hieraus folgt für das Trägheitsmoment in bezug auf eine durch den Scheitel C senkrecht zur Dreiecksebene gehende Achse, da

$$CS = \frac{2}{3} \cdot \frac{AB}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{a^2 + b^2}$$

ist,

$$\mathfrak{T}_C = \frac{1}{18} M \cdot (a^2 + b^2) + \frac{1}{9} M \cdot (a^2 + b^2)$$

$$= \frac{1}{6} M \cdot (a^2 + b^2).$$

Anm. Auch hier ist klar, daß die abgeleiteten Formeln zugleich für ein gerades dreiseitiges Prisma gelten, das das Dreieck ABC zur Grundfläche hat und um eine durch A oder durch C gehende Kante oder um eine dazu parallele durch S gehende Achse rotiert.

324.

Aufgabe. Das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}$ eines gleichschenkligen Dreiecks zu finden, das um eine durch die Spitze A

gehende, zur Dreiecksebene senkrechte Achse rotiert, wenn die Grundlinie des Dreiecks $BC = 2a$, die Höhe $AD = h$ und die Masse M ist. (Fig. 152.)

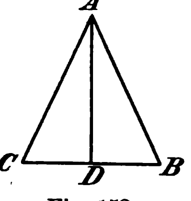


Fig. 152.

Auflösung. Durch die Höhe zerfällt das Dreieck in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke, deren Trägheitsmomente durch die im vorigen Paragraphen für $\mathfrak{T}_A$ abgeleitete Formel bestimmt sind, wenn man $\frac{M}{2}$ für M und h für b setzt. Durch Summation erhält man

$$\mathfrak{T} = 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{M}{2} \cdot (a^2 + 3h^2)$$

$$= \frac{1}{6} M \cdot (a^2 + 3h^2).$$

325.

Aufgabe. Das Trägheitsmoment eines regelmäßigen n-ecks, dessen Seite s_n, dessen kleiner Radius ϱ_n und dessen Gesamtmasse M ist, in bezug auf eine durch den Mittelpunkt gehende, zur Ebene des n-ecks senkrechte Achse zu finden.

Auflösung. Jede Zelle des regelmäßigen n-ecks ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Basis s_n und der Höhe ϱ_n und der Masse $\frac{M}{n}$, so daß das Trägheitsmoment jeder Zelle nach § 324

$$\frac{1}{6} \cdot \frac{M}{n} \cdot \left(\frac{1}{4} s^2_n + 3 \varrho^2_n\right),$$

mithin das gesuchte des ganzen n-ecks

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{24} \cdot M \cdot (s^2_n + 12 \varrho^2_n)$$

ist.

Beispiel. Sei $n = 6$; $s_6 = a$, so daß $\varrho_6 = \frac{a}{2} \sqrt{3}$ ist, so erhält man

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{24} M \cdot (a^2 + 9a^2) = \frac{5}{12} M \cdot a^2.$$

Die Masse $\mathfrak{T}$ kann man also in der Entfernung 1 von der Drehungsachse in einem Punkte vereinigt denken oder auch auf der Peripherie des mit dem Radius 1 um die Drehungsachse beschriebenen Kreises beliebig verteilt denken.

Zusatz 1. Die abgeleitete Formel gilt offenbar auch für ein gerades regelmäßiges Prisma, das um seine geometrische Achse rotiert.

Zusatz 2. Aus der letzten Bemerkung folgt sofort, daß das Trägheitsmoment einer Kreisperipherie (Drahtringes) vom Radius r und der Masse M in bezug auf eine durch den Mittelpunkt gehende, zur Kreisebene senkrechte Achse gleich $M \cdot r^2$ ist.

326.

Aufgabe. Das Trägheitsmoment eines Kreises (einer dünnen Scheibe) zu finden, der um eine durch seinen Mittelpunkt gehende, zu seiner Ebene senkrechte Achse rotiert, wenn M seine Masse und r sein Radius ist.

Auflösung. Da man den Kreis auffassen kann als ein regelmäßiges Vieleck mit unendlich wachsender Seitenzahl, so gibt die im vorigen Paragraphen aufgestellte Formel für $s_n = 0$ und $\varrho_n = r$ ohne weiteres das gesuchte Moment

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} M \cdot r^2;$$

für den Trägheitsradius ϱ erhält man den Wert

$$\varrho = \frac{r}{\sqrt{2}} = 0{,}707\,1\, r.$$

Zusatz 1. Diese Formel gilt auch für einen Zylinder, der um seine Achse rotiert.

Zusatz 2. Statt die Masse $\mathfrak{T}$ in der Entfernung 1 vom Mittelpunkte anzubringen, kann man auch die halbe Masse, also $\frac{M}{2}$ der Kreisscheibe oder des Zylinders am Umfange angebracht denken.

327.

Aufgabe. Das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}$ eines Kreisringes (hohlen Zylinders oder Schwungrades) in bezug auf eine zur Ebene des Ringes senkrechte Mittelpunktsachse zu finden, wenn der äußere und der innere Radius des Ringes R und r und seine Masse M gegeben sind.

Auflösung. Da $\pi(R^2 - r^2)$ die Fläche des Ringes ist, so ist $\frac{M}{\pi(R^2 - r^2)}$ die Masse der Flächeneinheit, also sind

$$\frac{M \cdot \pi R^2}{\pi(R^2 - r^2)} \text{ und } \frac{M \cdot \pi r^2}{\pi(R^2 - r^2)}$$

die Massen des voll gedachten großen und des kleinen herausgenommenen Kreises. Das gesuchte Trägheitsmoment ist nun offenbar gleich der Differenz der Trägheitsmomente beider Kreise, also

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \cdot \frac{M \cdot \pi R^2}{\pi(R^2 - r^2)} \cdot R^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{M \cdot \pi r^2}{\pi(R^2 - r^2)} \cdot r^2$$

$$= \frac{1}{2} M \cdot \frac{R^4 - r^4}{R^2 - r^2}$$

$$= \frac{1}{2} M \cdot (R^2 + r^2).$$

328.

Aufgabe. Das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}$ einer Halbkugel in bezug auf eine im Mittelpunkte der begrenzenden Kreisfläche auf dieser senkrechte Achse zu finden, wenn r der Radius und M die Masse der Halbkugel sind.

Auflösung. Da $\frac{2}{3}\pi r^3$ das Volumen der Halkugel, so ist $\frac{3M}{2\pi r^3}$ die Masse der Volumeneinheit. Zerlegt man nun die Halbkugel in sehr viele, n, sehr dünne Scheiben, die senkrecht zur Drehungsachse sind, ist ferner ϱ_m der Radius der m^{ten} dieser Scheiben, gerechnet vom Endpunkte des auf der begrenzenden Kreisfläche senkrechten Radius, so ist,

da $\frac{r}{n}$ die Dicke einer solchen Scheibe ist, das Trägheitsmoment dieser m^{ten} Scheibe nach § 326

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3\,M}{2\,\pi\,r^3} \cdot \pi\,\varrho^2{}_m \cdot \frac{r}{n} \cdot \varrho^2{}_m .$$

Da nun

$$\varrho^2{}_m = \frac{m r}{n}\left(2\,r - \frac{m\,r}{n}\right),$$

so erhält man für das Trägheitsmoment der m^{ten} Scheibe

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3\,M}{2\,\pi\,r^3} \cdot \frac{r}{n} \cdot \pi \cdot \frac{m^2\,r^2}{n^2}\left(2\,r - \frac{m\,r}{n}\right)^2$$

$$= \frac{3}{4}\,M \cdot r^2 \cdot \left(4\,\frac{m^2}{n^3} - 4\,\frac{m^3}{n^4} + \frac{m^4}{n^5}\right).$$

Setzt man hierin $m = 1, 2, \ldots n$ und addiert, geht dann zur Grenze $n = \infty$ über, so erhält man schließlich

$$\mathfrak{T} = \frac{3}{4}\,M \cdot r^2\left(4 \cdot \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{2}{5}\,M \cdot r^2 .$$

Zusatz. Für die volle Kugel mit der Gesamtmasse M erhält man hieraus

$$\mathfrak{T} = 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{M}{2} \cdot r^2 = \frac{2}{5}\,M \cdot r^2 .$$

Nunmehr ergibt sich leicht der Trägheitsradius

$$\varrho = r\sqrt{\frac{2}{5}} = 0{,}6325\,r .$$

329.

Aufgabe. Das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}$ einer Hohlkugel in bezug auf eine Mittelpunktsachse zu finden, wenn R und r der äußere und innere Radius und M die Masse der Hohlkugel ist.

Auflösung. Da $\frac{4}{3}\,\pi\,(R^3 - r^3)$ das Volumen der Hohlkugel ist, so ist

$$\frac{3\,M}{4\,\pi\,(R^3 - r^3)}$$

die Masse der Volumeneinheit und die Masse der großen vollgedachten Kugel $\frac{3\,M}{4\,\pi\,(R^3 - r^3)} \cdot \frac{4}{3}\,\pi\,R^3 = \frac{M \cdot R^3}{R^3 - r^3}$, die Masse der kleinen herausgenommenen Kugel $\frac{M \cdot r^3}{R^3 - r^3}$, also das gesuchte Trägheitsmoment

$$\mathfrak{T} = \frac{2}{5} \cdot \frac{M \cdot R^3}{R^3 - r^3} \cdot R^2 - \frac{2}{5} \cdot \frac{M \cdot r^3}{R^3 - r^3} \cdot r^3$$
$$= \frac{2}{5} \cdot M \cdot \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}.$$

Zusatz. Ist $R - r = d$ so klein, daß man die höheren Potenzen von d vernachlässigen kann, so folgt aus

$$r = R - d$$
$$r^3 = R^3 - 3\,R^2 \cdot d,$$
$$r^5 = R^5 - 5\,R^4 \cdot d,$$

und man erhält für $\mathfrak{T}$ den Wert

$$\mathfrak{T} = \frac{2}{5}\,M \cdot \frac{5}{3}\,R^2 = \frac{2}{3}\,M \cdot R^2$$

als das Trägheitsmoment einer Kugelfläche.

Der Trägheitsradius ϱ ergibt sich hieraus

$$\varrho = R \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 0{,}8165\,R.$$

330.

Gesetze der drehenden Bewegung eines starren Körpers um eine feste Achse. Wirken nun mehrere Kräfte P_1, P_2, ... an einem um eine feste Achse drehbaren starren Körper, und sind p_1, p_2, ... ihre Entfernungen von der Drehungsachse, also $P_1 \cdot p_1$, $P_2 \cdot p_2$, ... ihre statischen Momente in bezug auf die Drehungsachse, so kann man diese statischen Momente ersetzen durch ihre statischen Momente in einem Punkte A in der Entfernung 1 von der Drehungsachse. Alle die einzelnen statischen Momente setzen sich dann zu einem einzigen Momente zusammen und geben im Punkte A eine Drehkraft von der Größe

$$\Sigma\, P_h \cdot p_h = \mathfrak{M}.$$

Ersetzt man nun die Masse des ganzen Körpers durch

sein in A angebracht gedachtes Trägheitsmoment $\mathfrak{T}$, so erhält man für die Winkelbeschleunigung α die Grundgleichung

$$\alpha = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{T}}.$$

Ist nun das resultierende Drehungsmoment sämtlicher Kräfte konstant, so ist die Drehbewegung des starren Körpers eine gleichförmig beschleunigte, und es ergibt sich für die Winkelgeschwindigkeit, wenn γ die anfängliche Winkelgeschwindigkeit war, die Gleichung (vergl. § 24)

$$(7) \qquad \omega = \gamma + \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{T}} \cdot t,$$

woraus man für den Winkelweg

$$(8) \qquad \sigma = \gamma \cdot t + \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{T}} \cdot t^2$$

erhält. Aus der Gleichung (7) folgt

$$(9) \qquad \mathfrak{M} \cdot t = \mathfrak{T} \cdot \omega - \mathfrak{T} \cdot \gamma,$$

die der Gleichung des § 165 für die fortschreitende Bewegung entspricht.

Quadriert man die Gleichung (7), so erhält man

$$\omega^2 = \gamma^2 + 2 \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{T}} \cdot \gamma \cdot t + \frac{\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{T}^2} \cdot t^2,$$

wofür man

$$\frac{1}{2} \mathfrak{T} \cdot \omega^2 - \frac{1}{2} \mathfrak{T} \cdot \gamma^2 = \mathfrak{M} \cdot \gamma \cdot t + \frac{1}{2} \mathfrak{M} \cdot \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{T}} \cdot t^2$$

oder mit Beachtung von (8)

$$(10) \qquad \mathfrak{M} \cdot \sigma = \frac{1}{2} \mathfrak{T} \cdot \omega^2 - \frac{1}{2} \mathfrak{T} \cdot \gamma^2$$

schreiben kann. Da auf der rechten Seite dieser Gleichung die Zunahme der Wucht oder der Bewegungsenergie des sich drehenden Körpers steht, so zeigt die Gleichung (10), daß auch im Falle der Drehung eines Körpers um eine feste Achse das Prinzip von der Erhaltung der Wucht (der lebendigen Kraft) gilt:

die von den Kräften geleistete Arbeit ist gleich der Zunahme der Wucht des sich drehenden Körpers.

Ist die anfängliche Winkelgeschwindigkeit $\gamma = 0$, so lauten die Gleichungen (9) und (10) im besonderen

$$(9') \qquad \mathfrak{M} \,.\, t = \mathfrak{T} \,.\, \omega$$

$$(10') \qquad \mathfrak{M} \,.\, \sigma = \frac{1}{2}\, \mathfrak{T} \,.\, \omega^2 .$$

331.

Die Energie $\frac{1}{2}\, \mathfrak{T} \,.\, \omega^2$ eines sich um eine feste Achse drehenden Körpers kann mit Hilfe des im § 317 bewiesenen Lehrsatzes noch in anderer Form ausgedrückt werden. Es ist nämlich

$$\frac{1}{2}\, \mathfrak{T} \,.\, \omega^2 = \frac{1}{2}\, \mathfrak{T}_s \,.\, \omega^2 + \frac{1}{2}\, M \,.\, a^2 \,.\, \omega^2 ;$$

drückt man nun $\mathfrak{T}_s$ durch den Trägheitsradius aus, $\mathfrak{T}_s = M \,.\, \varrho^2$, so erhält man

$$(11) \qquad \frac{1}{2}\, \mathfrak{T} \,.\, \omega^2 = \frac{1}{2}\, M \,.\, (\omega^2 \varrho^2 + a^2 \omega^2) .$$

In Worten läßt sich diese Gleichung wie folgt aussprechen:

die Energie eines sich um eine feste Achse drehenden Körpers ist gleich der Energie der Drehung sämtlicher Massenteilchen um eine zur festen Achse parallele Schwerpunktsachse vermehrt um die Energie der im Schwerpunkte vereinigten Masse, die sich in der Entfernung a von der Drehungsachse befindet und um diese eine fortschreitende Bewegung mit der Umlaufsgeschwindigkeit $a \,.\, \omega$ ausführt.

332.

Die Wucht eines starren Körpers bei einer zusammengesetzten Bewegung. Wir nehmen nunmehr an, ein starrer Körper führe gleichzeitig zwei Bewegungen aus: eine drehende um eine Schwerpunktsachse und eine fortschreitende, und stellen uns die Aufgabe, die Bewegungsenergie für einen besimmten Zeitpunkt zu bestimmen, wenn in demselben Zeitpunkte ω die Winkelgeschwindigkeit der drehenden Bewegung, v die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung ist.

Zur Lösung dieser Aufgabe legen wir durch den Schwerpunkt S des Körpers ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit S als Anfangspunkt in der Weise (Fig. 153), daß die Richtung der X-Achse SX in die Drehungsachse fällt und daß die Z-Achse SZ so gewählt wird, daß die Richtung der fortschreitenden Bewegung des Körpers zur XZ-Ebene parallel ist, und betrachten zunächst ein einzelnes Massenteilchen m_1, dessen Abstand von der Drehungsachse r_1 sei.

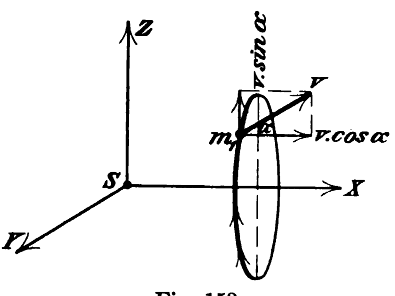


Fig. 153.

Bildet die Richtung der fortschreitenden Bewegung mit der X-Achse den Winkel α, so kann v in die Komponenten

$v \,.\, cos\, \alpha$ in der Richtung der X-Achse und

$v \,.\, sin\, \alpha$ in der Richtung der Z-Achse

zerlegt werden. Die Geschwindigkeit $\omega \,.\, r_1$, die m_1 zufolge der Drehungsbewegung um SX besitzt, kann in der aus Fig. 154 sich ergebenden Weise ebenfalls in zwei Komponenten

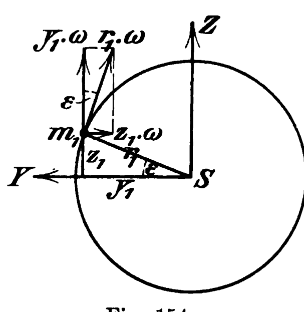


Fig. 154.

$$\omega \,.\, r_1 \,.\, cos\, \varepsilon = \omega \,.\, y_1$$

in der Richtung der Z-Achse und

$$\omega \,.\, r_1 \,.\, sin\, \varepsilon = \omega \,.\, z_1$$

in der Richtung der Y-Achse zerlegt werden.

Der Punkt m_1 hat also zufolge der zusammengesetzten Bewegung die Geschwindigkeitskomponenten

$v \,.\, cos\, \alpha$ nach der X-Achse,
$\omega \,.\, z_1$ nach der Y-Achse,
$v \,.\, sin\, \alpha + \omega \,.\, y_1$ nach der Z-Achse,

aus denen sich die Totalgeschwindigkeit v_1 durch die Gleichung

$$v_1^2 = (v \,.\, cos\, \alpha)^2 + (\omega \,.\, z_1)^2 + (v \,.\, sin\, \alpha + \omega \,.\, y_1)^2$$

berechnet;

da $(v \,.\, cos\, \alpha)^2 + (v \,.\, sin\, \alpha)^2 = v^2$ und $\omega^2 (z_1{}^2 + y_1{}^2) = \omega^2 \,.\, r_1{}^2$, so ist auch

$$v_1{}^2 = v^2 + \omega^2 \,.\, r_1{}^2 + 2\, v \,.\, sin\, \alpha \,.\, \omega \,.\, y_1.$$

Die Energie dieses Massenteilchens ist nun $\frac{1}{2}\, m_1\, v_1{}^2$; ebenso kann die Energie der andern Massenteilchen des Körpers gefunden werden.

Bildet man die Summe, so erhält man die Totalenergie des Körpers

$$E = \frac{1}{2}\, v^2 \,.\, \Sigma(m) + \frac{1}{2}\, \omega^2 \,.\, \Sigma\,(m r^2) + v \,.\, \omega \,.\, sin\, \alpha \,.\, \Sigma\,(m y).$$

Da nun $\Sigma(m) = M$ die Masse des Körpers, $\Sigma(mr^2) = \mathfrak{T}_s$ sein Trägheitsmoment in bezug auf die Schwerpunktsachse ist, und in bezug auf eine durch den Schwerpunkt gehende Achse $\Sigma\,(my) = 0$ ist, so ist

$$E = \frac{1}{2}\, M \,.\, v^2 + \frac{1}{2}\, \mathfrak{T}_s \,.\, \omega^2, \tag{12}$$

d. h. bei einer fortschreitenden Bewegung eines Körpers und bei einer gleichzeitigen Drehung um eine Schwerpunktsachse erhält man die Totalenergie des Körpers, wenn man die Summe der für jede Bewegung einzeln berechneten Energien bildet.

Ein besonders wichtiges Beispiel für die Drehungsbewegung eines starren Körpers um eine feste Achse wird den Inhalt des folgenden Buches bilden. Von den übrigen so mannigfachen Anwendungen der vorgetragenen Lehren sollen hier nur noch einige bemerkenswerte praktische Beispiele, die auch teilweise eine Ergänzung zu Früherem bringen, kurz behandelt werden.

333.

Die Atwoodsche Bewegungsmaschine. Bei der früheren Betrachtung der Atwoodschen Bewegungsmaschine (§ 58) ist die Einwirkung des Rädchens, über das die Schnur läuft, auf die Beschleunigung erwähnt worden. Diese Einwirkung konnte aber an jener Stelle nur angedeutet werden, während wir jetzt mit Hilfe des Trägheitsmomentes diese Einwirkung genauer angeben können.

Ist nämlich, wie im § 58, jedes der beiden in Bewegung zu setzenden Gewichte gleich P und p das Übergewicht, ist ferner r der Radius und $\mathfrak{T}$ das Trägheitsmoment des Rädchens, dann kann die Masse des Rädchens durch eine in bezug auf die Drehung äquivalente Masse in einem Punkte des Umfanges ersetzt gedacht werden, und zwar hat diese Masse die Größe $\frac{\mathfrak{T}}{r^2}$ oder das Gewicht $\frac{\mathfrak{T}}{r^2} \cdot g$, so daß das Übergewicht p die Gewichte

$$2P, \ p \text{ und } \frac{\mathfrak{T}}{r^2} \cdot g$$

am Umfange des Rädchens in Bewegung zu setzen hat; es ist also die Beschleunigung

$$a = g \cdot \frac{p}{2P + p + \frac{\mathfrak{T}}{r^2} \cdot g}.$$

Ist die Form des Rädchens eine einfache, z. B. eine runde Scheibe, so daß $\mathfrak{T}$ berechnet werden kann, so kann die vorstehende Gleichung benutzt werden, um aus dem beobachteten a die Fallbeschleunigung g zu berechnen. Ist dagegen die Form des Rädchens eine zusammengesetzte, so daß die Berechnung von $\mathfrak{T}$ Schwierigkeiten bietet, so kann die vorstehende Formel benutzt werden, um aus dem beobachteten a und dem bekannten g die Größe $\frac{\mathfrak{T}}{r^2}$ zu berechnen.

334.

Rollende Bewegung eines Körpers mit kreisförmigem Querschnitte auf einer schiefen Ebene. Ist r der Radius des Kreises, so hat ein Punkt der Peripherie während einer Umdrehung den Weg $2\pi r$ zurückgelegt; es ist also beim Rollen auf einer Ebene die Umfangsgeschwindigkeit $r \cdot \omega$ gleich der fortschreitenden Geschwindigkeit v, oder es kann $\omega = \frac{v}{r}$ gesetzt werden. Die Energie der Bewegung des Körpers wird hiernach

$$E = \frac{1}{2} M \cdot v^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{T} \cdot \frac{v^2}{r^2}.$$

Nun ist (§ 315) $\frac{\mathfrak{T}}{r^2}$ die auf den Umfang reduzierte Masse des Körpers; setzt man dafür $\mu = \frac{\mathfrak{T}}{r^2}$ ein, so erhält man

$$E = \frac{1}{2}(M + \mu) \cdot v^2.$$

Rollt nun der Körper infolge der Wirkung der Schwere eine schiefe Ebene von der Höhe h hinab, so ist die dabei von der Schwere geleistete Arbeit $M \cdot g \cdot h$, so daß das Prinzip von der Erhaltung der Energie die Gleichung

$$M \cdot g \cdot h = \frac{1}{2}(M + \mu) \cdot v^2$$

gibt, aus der

$$v = \sqrt{2gh \cdot \frac{M}{M + \mu}}$$

folgt.

335.

Beispiele. 1. Der rollende Körper sei eine Kreisperipherie (Drahtring); nach § 325 ist $\mu = M$, also ist

$$v = \sqrt{2g \cdot \frac{h}{2}},$$

d. h. die Endgeschwindigkeit des rollenden Ringes ist die, als ob er die Höhe $\frac{h}{2}$ frei durchfallen hätte; seine Beschleunigung ist also halb so groß, als wenn er (ohne Reibung) auf der schiefen Ebene hinabgeglitten wäre.

2. Ist der rollende Körper eine Kreisscheibe oder ein Vollzylinder, so ist nach § 326 $\mu = \frac{M}{2}$, woraus

$$v = \sqrt{2g \cdot \left(\frac{2}{3} h\right)}$$

folgt; die Endgeschwindigkeit ist also so groß, als wenn der Körper die Höhe $\frac{2}{3} h$ frei durchfallen hätte.

3) Für eine Kugel ist nach § 328 $\mu = \frac{2}{5} M$, also die

Endgeschwindigkeit

$$v = \sqrt{2g \cdot \left(\frac{5}{7} h\right)}$$

so groß wie die eines aus $\frac{5}{7} h$ frei herabgefallenen Körpers.

336.

Die Kurbel. In der Praxis kommt sehr häufig die Aufgabe vor, eine geradlinig hin- und hergehende Bewegung in eine Kreisbewegung umzusetzen. Diese Aufgabe wird durch den in Fig. 155 skizzierten sogenannten einfachen Kurbelmechanismus gelöst: Die Kolbenstange KA und der Kreuz-

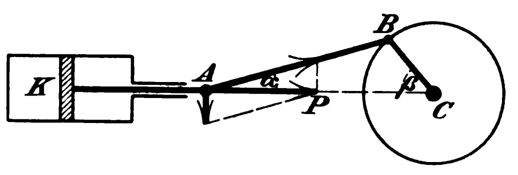


Fig. 155.

kopf A führen unter dem Einflusse einer auf K wirkenden Kraft P (z. B. der Dampfkraft) eine hin- und hergehende geradlinige Bewegung aus, während die Schubstange AB, die den Kreuzkopf A mit der Kurbelwarze B verbindet, die Kurbel BC an der Welle C im Kreise dreht.

Zerlegt man die Kraft P in zwei Komponenten, die eine in der Richtung der Schubstange AB, die andere senkrecht zur Gleitbahn des Kreuzkopfes, so ist die erstere $\frac{P}{\cos\alpha}$, wobei α aus dem Dreieck ABC durch den Sinussatz $\sin\alpha = \frac{r}{l} \cdot \sin\beta$ bestimmt ist, wenn r und l die Längen von Kurbelstange (BC) und Schubstange (AB) bezeichnen. Da aber in der Regel l mindestens 5 mal so groß als r ist, und der größte Wert von α für $l = 5r$ sich zu $\alpha = 11^0\ 32'$ ergibt, so kann man der Einfachheit der Rechnung wegen als Annäherung $\alpha = 0^0$ setzen und die Richtung der Komponente der Kraft P in der Schubstange als parallel zu AC annehmen.

337.

Setzen wir voraus, daß die treibende Kraft P konstant ist, immer vertikal am Endpunkte der Kurbelstange CB in B wirkt und die Kurbelwarze B aus der Totpunktlage T_1 über A_1 bis zur Totpunktlage T_2, von T_2 aber über A_2 wiederum nach T_1 emportreibt, und daß diese Bewegung immer wiederkehrend, also periodisch sein soll, so wird durch die Kraft P die Welle und der mit der Welle verbundene Widerstand in Bewegung gesetzt. Letzteren können wir auffassen als eine auf den Umfang der Welle reduzierte Tangentialkraft Q, die an einem um die Welle aufgewickelten Faden (Seile) wirkt, so daß sie stets senkrecht zu dem Hebelarme r gerichtet ist. Von Bewegungshindernissen soll abgesehen werden, oder sie sollen vielmehr konstant angesehen und in Q mit inbegriffen gedacht werden.

Wir fragen zunächst, welches Verhältnis zwischen P und Q stattfinden muß, damit die einmal durch eine Extrakraft in Bewegung gesetzte Welle in der angegebenen periodischen Bewegung bleibe.

Während das statische Moment des Widerstandes Q den konstanten Wert $Q \cdot r$ hat, ändert sich das statische Moment der konstanten Kraft P mit dem Stellungswinkel α der Kurbel BC (Fig. 156), da seine Größe $P \cdot r \cdot \sin \alpha$ ist. Fällt B mit T_1 zusammen, so ist das Moment von P gleich Null, nimmt dann, wenn B von T_1 nach A_1 geht, zu bis zum Maximalwerte $P \cdot r$, von dort wieder ab und erreicht wieder den Wert 0, wenn B nach T_2 gekommen ist. Auf der anderen Seite von T_2 über A_2 nach T_1 wiederholt sich genau der gleiche Vorgang. Die Kurbelwarze wird sich also ungleichförmig bewegen, und es wird abwechselnd eine größte und eine kleinste Winkelgeschwindigkeit ω und ω_0 eintreten. Soll die Maschine aber im Gange bleiben, so muß trotz der ungleichförmigen Bewegung die Winkelgeschwindigkeit von B nach einem halben Umlaufe genau dieselbe sein, wie am Anfange desselben. Dazu aber ist nötig, daß die von der Kraft P während einer halben Umdrehung geleistete Arbeit

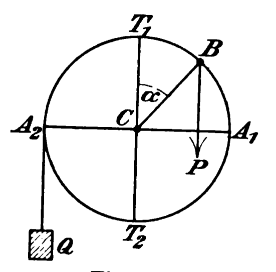


Fig. 156.

gleich der von dem Widerstande konsumierten, die algebraische Summe beider Arbeiten also gleich Null ist.

Geht nun die Kurbelwarze aus der Lage T_1 über A_1 nach T_2, so hat die Kraft P, da ihr Angriffspunkt B während dieser Bewegung den Weg $T_1 T_2 = 2r$ in der Richtung der Kraft zurückgelegt hat, die Arbeit $P \,.\, 2r$ geleistet; während der halben Umdrehung der Welle aber wurde der Widerstand Q, da sich der Faden um den halben Umfang der Welle aufwickelte, um πr gehoben; er verrichtete also die Arbeit $- Q \,.\, \pi r$, so daß zwischen P und Q die Gleichung

$$P \,.\, 2r = Q \,.\, \pi r$$

besteht, aus der entweder

$$(1) \qquad P = \frac{\pi}{2} \cdot Q = 1{,}5708 \cdot Q$$

oder

$$(1') \qquad Q = \frac{2}{\pi} \cdot P = 0{,}6366 \cdot P$$

folgt.

338.

Will man nun diejenige Lage der Kurbelwarze B bestimmen, bei der ihre Beschleunigung Null ist, bei der also das Moment der Kraft dem Momente des Widerstandes gleich ist, so hat man für den veränderlichen Winkel α mit Berücksichtigung von (1') die Gleichung

$$P \cdot r \cdot \sin \alpha = \frac{2}{\pi} \,.\, P \,.\, r,$$

aus der

$$(2) \qquad \sin \alpha = \frac{2}{\pi}; \; \alpha = 39^0 \; 32' \; 24''$$

folgt.

Macht man (Fig. 157) den Winkel $T_1 CF = T_1 CB = \alpha$, verlängert die Radien BC und FC bis zu den Punkten E und D und verfolgt die Bewegung der Kurbel während einer Umdrehung, so erkennt man: auch in den Punkten D, E und F ist das Moment der bewegenden Kraft gleich dem Momente des Widerstandes; während der Bewegung der Kurbel von B nach D, ebenso von E nach F ist das Kraftmoment größer als das Widerstandsmoment; während der

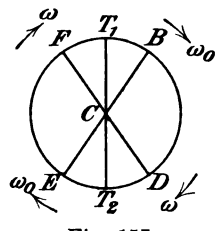


Fig. 157.

Bewegung von D nach E oder von F nach B ist das Kraftmoment kleiner als das Widerstandsmoment. Daher ist die Winkelbeschleunigung auf den Wegen $B\,D$ und $E\,F$ positiv, auf den Wegen $D\,E$ und $F\,B$ aber negativ. Es findet also in den Punkten D und F die größte Winkelgeschwindigkeit ω, in den Punkten B und E die kleinste ω_0 statt.

339.

Ist nun $\mathfrak{T}$ das Trägheitsmoment der Welle, so ist die Zunahme der Wucht bei der Bewegung von B nach D gleich $\frac{1}{2}\,\mathfrak{T}\,.\,\omega^2 - \frac{1}{2}\,\mathfrak{T}\,.\,\omega_0{}^2 = \frac{1}{2}\,\mathfrak{T}\,.\,(\omega^2 - \omega_0{}^2)$, und diese muß gleich der algebraischen Summe der von den Kräften geleisteten Arbeiten sein. Die Arbeit der bewegenden Kraft aber ist, wenn die Warze den Weg von B nach D zurücklegt, $P\,.\,B\,D = P\,.\,2\,r\,.\,\sin\,(90^0 - \alpha) = P\,.\,2\,r\,.\,\cos\alpha$ und die der widerstehenden Kraft Q, da ihr Angriffspunkt während dieser Zeit einen Weg gleich dem Bogen $B\,D$ zurücklegt, $-\,Q\,.\,\pi r\,.\,\frac{90^0-\alpha}{90^0}$. Drückt man noch P vermittels (1) durch $\frac{\pi}{2}\,.\,Q$ aus, so erhält man die Gleichung

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{T}\,.\,(\omega^2 - \omega_0{}^2) = \pi\,.\,Q\,.\,r\,.\left(\cos\alpha - \frac{90^0-\alpha}{90^0}\right).$$

Rechnet man den Zahlenwert von $\pi\,.\left(\cos\alpha - \frac{90^0-\alpha}{90^0}\right)$ für den in Gleichung (2) bestimmten Winkel aus, so erhält man

$$\frac{1}{2}\,\mathfrak{T}\,(\omega^2 - \omega_0{}^2) = 0{,}66137\,.\,Q\,.\,r$$

und hieraus

$$\omega^2 - \omega_0{}^2 = 0{,}66137\,.\,\frac{Q\,.\,r}{\mathfrak{T}}\,.\,2. \tag{3}$$

Man sieht also, daß der Unterschied zwischen ω und ω_0 um so kleiner wird, je größer das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}$ ist.

340.

Dieses Ergebnis führte auf den naheliegenden Gedanken, das Trägheitsmoment durch Hinzufügung von Massen zu ver-

größern, wobei zu beachten war, daß das Trägheitsmoment um so mehr vergrößert wird, je weiter die hinzugefügten Massen von der Drehungsachse entfernt sind. Am vorteilhaftesten, auch hinsichtlich der Menge des zu verwendenden Materiales, hat sich diese Hinzufügung von Massen in der Form eines an der Welle mittels Speichen fest angebrachten Schwungrades erwiesen. Wenn auch klar ist, daß der Unterschied zwischen ω und ω_0 nie vollkommen zum Verschwinden gebracht und dadurch eine vollkommen gleichförmige Bewegung erzielt werden kann, — dazu müßte $\mathfrak{T}$ unendlich groß werden — so kann die Masse des Schwungrades doch so bestimmt werden, daß eine im voraus verlangte mittlere Winkelgeschwindigkeit, mit der die Welle sich drehen soll, von der größten und kleinsten Geschwindigkeit ω und ω_0 nur sehr wenig abweicht, so daß die Bewegung annäherungsweise als eine gleichförmige angesehen werden kann.

Selbstverständlich kann aber ein Schwungrad, weil sein Gewicht die Reibung vergrößert, nur auf Kosten der bewegenden Kraft angebracht werden.

341.

Berechnung des Schwungrades. Soll die Abweichung von der vorgeschriebenen mittleren oder normalen Geschwindigkeit φ nur $\frac{1}{m}\varphi$ betragen, mithin

$$\omega = \varphi + \frac{1}{m}\varphi;\ \omega_0 = \varphi - \frac{1}{m}\varphi$$

sein, so hat man

$$\omega + \omega_0 = 2\varphi;\ \omega - \omega_0 = \frac{2}{m}\varphi$$

und hieraus

$$\omega^2 - \omega_0{}^2 = \frac{4}{m}\varphi^2.$$

Die Gleichung (3) geht dann über in

$$\frac{4}{m}\varphi^2 = 0{,}66137 \cdot \frac{Q \cdot r}{\mathfrak{T}} \cdot 2,$$

aus der

$$(4) \qquad \mathfrak{T} = 0{,}66137 \cdot \frac{m}{2} \cdot \frac{Q \cdot r}{\varphi^2}$$

folgt.

Die vorgeschriebene mittlere Geschwindigkeit ist also das arithmetische Mittel aus der Maximal- und Minimalgeschwindigkeit; die Zahl

$$\frac{2}{m} = \frac{\omega - \omega_0}{\varphi} = \delta$$

nennt man den Ungleichförmigkeitsgrad der Bewegung.

Führt man ihn in Gleichung (4) ein, so erhält man

$$(4') \qquad \mathfrak{T} = 0{,}66137 \cdot \frac{Q \cdot r}{\delta \cdot \varphi^2}.$$

Ist nun das Trägheitsmoment der Welle und der sonst noch mit ihr sich bewegenden Massen gegen das Trägheitsmoment des Schwungringes sehr klein, daß es gegen das letztere vernachlässigt werden kann, so kann das durch Gleichung (4′) bestimmte Trägheitsmoment direkt als das des Schwungringes angesehen werden.

Bezeichnet G das Gewicht des Schwungringes und R seinen mittleren Radius, so ist

$$(5) \qquad \mathfrak{T} = \frac{G}{g} \cdot R^2,$$

und man erhält aus (4′) für das Gewicht des Schwungringes die Gleichung

$$(6) \qquad G = 0{,}66137 \cdot \frac{Q \cdot r \cdot g}{\delta \cdot \varphi^2 \cdot R^2}.$$

Die Gleichung (5) zeigt, daß man G oder R beliebig wählen kann; die eine der beiden Größen ist dann nach der Wahl der andern bestimmt.

Nimmt man R beliebig, so ist

$$G = \frac{\mathfrak{T} \cdot g}{R^2}.$$

Ist dann die radiale Breite des rechteckigen Querschnittes des Ringes willkürlich gleich b genommen, so muß die Höhe

h desselben, wenn s das spezifische Gewicht des Stoffes ist, aus dem der Ring besteht, so groß sein, daß

$$b \cdot h \cdot 2\pi R \cdot s = G^{*})$$

ist, woraus

$$h = \frac{G}{2\pi R \cdot b \cdot s}$$

folgt. Hierin sind am besten die Längen in Metern und das Gewicht in Tonnen anzugeben.

Anm. Man pflegt bei der Berechnung des Schwungringes, um weitläufige Formeln zu vermeiden, das Gewicht der Speichen ganz außer acht zu lassen. Sie bewirken, daß das Gesamtbeharrungsmoment in (3) noch größer, also der Gang der Maschine noch gleichmäßiger wird.

342.

Der Formel (4′) für das Trägheitsmoment des Schwungrades kann man noch eine andere Form geben, wenn man die Tourenzahl in der Minute und den von der Maschine zu leistenden Effekt in Pferdestärken angibt.

Soll nämlich die Tourenzahl in der Minute n und der Effekt der Maschine N Pferdestärken sein, so ist, da die bei einer Umdrehung geleistete Arbeit $Q \cdot 2\pi r$, also die bei n Umdrehungen in der Minute in 1 Sekunde geleistete Arbeit $\frac{Q \cdot 2\pi r \cdot n}{60}$ ist, und diese N Pferdestärken zu 75 mkg sein soll, der aus der Gleichung

$$\frac{Q \cdot 2\pi r \cdot n}{60} = 75\,N$$

sich für $Q \cdot r$ ergebende Wert

$$Q \cdot r = \frac{60 \cdot 75}{2\pi n} \cdot N$$

in (4′) einzusetzen, wodurch man

$$\mathfrak{T} = 0{,}66137 \cdot \frac{60 \cdot 75}{2\pi} \cdot \frac{1}{n\,\delta \cdot \varphi^2} \cdot N$$

---

*) Ist nämlich R' der äußere, R'' der innere Radius des Schwungringes, so ist sein Kubikinhalt $h \cdot \pi\,(R'^2 - R''^2) = h \cdot \pi \cdot (R' - R'') \cdot (R' + R'') = h \cdot 2\pi R \cdot b$, wenn $R = \frac{R' + R''}{2}$, $b = R' - R''$ gesetzt wird.

oder

$$(7) \qquad \mathfrak{T} = 473{,}66 \cdot \frac{1}{n\,\delta\,.\,\varphi^2}\,N$$

erhält.

Führt man endlich noch für φ die Durchschnittsgeschwindigkeit

$$\varphi = \frac{2\,\pi \cdot n}{60},$$

was bei hoher Tourenzahl nur ein unerheblicher Fehler ist, so erhält man die weitere, recht brauchbare Formel

$$(8) \qquad \mathfrak{T} = 43193 \cdot \frac{N}{\delta \cdot n^3} \backsim 43200 \cdot \frac{N}{\delta \cdot n^3}.$$

Aufgaben.

213. Wie groß ist das Trägheitsmoment eines $l = 5$ m langen Stabes, dessen Gewicht $G = 12$ kg beträgt, in bezug auf eine durch den einen Endpunkt gehende Drehungsachse?

Antw.: $\mathfrak{T} = \frac{1}{3}\frac{G}{g}\,.\,l^2 = 10{,}194$ mkg sec².

214. Welche Winkelbeschleunigung erhält dieser Stab durch eine konstante im Abstande $p =$ a) 1 m; b) 3 m vom Drehungspunkte angreifende Kraft $P = 10$ kg?

Antw.: $\alpha = \frac{P\,.\,p}{\mathfrak{T}} =$ a) $0{,}981\ \frac{1}{\sec^2}$; b) $2{,}943\ \frac{1}{\sec^2}$.

215. Wie groß ist das Trägheitsmoment einer dünnen rechteckigen Platte, deren Länge und Breite $a = 30$ cm; $b = 20$ cm, und deren Gewicht 100 g beträgt, in bezug auf eine zur Platte senkrechte a) durch den Schwerpunkt; b) durch eine Ecke gehende Drehungsachse?

Antw.: a) $\mathfrak{T}_s = 11{,}043$ cmg sec²; b) $\mathfrak{T}' = 44{,}172$ cmg sec².

216. Wie groß ist das Trägheitsmoment einer dünnen Kreisscheibe in bezug auf eine durch den Mittelpunkt senkrecht zur Kreisebene gehende Achse, wenn r der Radius der Scheibe und γ das Gewicht eines qcm der Scheibe ist?

$$r = 10 \text{ cm}; \quad \gamma = 1{,}2 \text{ g}.$$

Antw.: $\mathfrak{T} = \frac{1}{2}\,\pi\,r^4\,.\,\frac{\gamma}{g} = 19{,}214$ cmg sec².

217. Wie groß ist die Wucht eines Schleifsteines, der bei 60 cm

Durchmesser und 20 kg Gewicht, in einer Sekunde eine Umdrehung macht?

Antw.: $E = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{20}{9{,}81} \cdot 0{,}3^2 \cdot 4\,\pi^2 = 1{,}8$ mkg.

218. Wie groß ist das Trägheitsmoment eines Schwungrades, dessen äußerer und innerer Radius die Größen $R = 2$ m und $r = 1{,}8$ m haben, und das 8000 kg wiegt?

Antw.: $\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8000}{9{,}81} (R^2 + r^2) = 2952$ mkg sec².

219. Welche Energie besitzt dieses Schwungrad bei 3 Umdrehungen in der Sekunde?

Antw.: $E = \frac{1}{2} \mathfrak{T} \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} \mathfrak{T} \cdot (6\,\pi)^2 = 524450$ mkg.

220. Wie groß ist die Energie einer sich um eine Mittelpunktsachse drehenden Kugel, deren Radius $r = 0{,}1$ m und deren spezifisches Gewicht $s = 7{,}2$ ist, wenn sie in der Sekunde 4 Umdrehungen macht?

Antw.: $E = \frac{256}{15} \cdot \pi^3 \cdot \frac{0{,}1^5 \cdot 1000 \cdot 7{,}2}{9{,}81}$ mkg $= 3{,}884$ mkg.

221. Wie groß ist die Drehungsenergie der Erde, deren Radius $= 6377400$ m ist, und die sich in 86164 sec um ihre Achse dreht, wenn ihr mittleres spezifisches Gewicht nach Jolly $s = 5{,}692$ ist?

Antw.: $E = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{3} \pi\, r^3 \cdot \frac{s}{9{,}81} \cdot r^2 \cdot \left(\frac{2\,\pi}{86164}\right)^2$

$= 27265 \cdot 10^{21}$ Metertonnen.

222. Wie groß ist die Energie einer mit der gleichförmigen Geschwindigkeit $c = 3 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ohne Gleitung rollenden Kugel von 10 kg Gewicht?

Antw.: $E = \frac{1}{2} M\, c^2 + \frac{1}{2} \mathfrak{T} \cdot \frac{c^2}{r^2} = \frac{7}{10} M\, c^2 = 6{,}422$ mkg.

223. Wie groß muß das Trägheitsmoment eines Schwungrades sein, wenn die Welle in der Minute 60 Touren macht, die Schwankungen der Winkelgeschwindigkeit den 40sten Teil der mittleren Geschwindigkeit nicht übersteigen sollen, wenn der Kurbelradius $r = 0{,}30$ m und der Widerstand $Q = 800$ kg beträgt?

Antw.: 160,81 mkg sec².

224. Wie groß muß das Gewicht dieses Schwungrades sein, wenn sein Radius $R = 2$ m gewählt wird?

Antw.: 395 kg.

225. Wie groß muß das Gewicht eines Schwungringes sein, dessen Durchmesser 2 m ist, wenn der Effekt der Maschine bei $n = 60$ Touren $N = 30$ PS und der Ungleichförmigkeitsgrad der Bewegung $\delta = {}^1/_{50}$ sein soll?

Antw.: 2943 kg $\backsim$ 3000 kg.

226. Wie groß ist der Ungleichförmigkeitsgrad der Bewegung einer Maschine, deren Schwungring den mittleren Radius $R = 2$ m und das Gewicht 2500 kg hat, wenn der Effekt der Maschine bei $n = 60$ Touren 100 PS ist?

Antw.: $\delta = 0{,}01962 \backsim {}^1/_{50}$.

227. Wieviel PS leistet eine Maschine, wenn ihr Schwungrad vom Gewichte 8000 kg und $R = 2$ m mittlerem Radius in der Minute 50 Touren macht, und der Ungleichförmigkeitsgrad der Bewegung ${}^1/_{50}$ ist?

Antw.: $N = 188{,}77$ PS.

Zweiundzwanzigstes Buch.

Von der Pendelbewegung.

343.

Ein Pendel heißt ein jeder Körper, der sich um einen außerhalb seines Schwerpunktes liegenden festen Punkt oder um eine nicht durch seinen Schwerpunkt gehende feste Achse drehen kann und deshalb seine stabile Gleichgewichtslage einzunehmen strebt.

Denkt man sich einen einzigen materiellen Punkt durch eine starre gewichtslose Gerade mit dem Drehungspunkte verbunden, so nennt man dieses Pendel ein einfaches oder mathematisches Pendel. Obgleich ein solches Pendel in der Wirklichkeit nicht existiert, so betrachten wir doch dieses ideale Pendel zuerst, weil die Theorie der wirklichen Pendel, die zusammengesetzte oder physische heißen, auf die des mathematischen zurückkommt.

Angenähert können wir ein mathematisches Pendel durch eine kleine schwere Metallkugel (aus Blei oder Platin), die vermittels eines feinen undehnbaren Fadens in einem Punkte aufgehängt ist, dargestellt denken.

344.

Das einfache Pendel. Ist O der Aufhängepunkt eines einfachen Pendels, so wird sich der materielle Punkt desselben im Zustande der Ruhe infolge der Wirkung der Schwerkraft vertikal unter O in A befinden (Fig. 158). Bringt man das Pendel aus dieser Ruhelage in die Lage OB und überläßt es dann sich selbst, so muß es, da der Schwerpunkt nicht mehr unterstützt ist, fallen und in die stabile Gleichgewichtslage OA zurückkehren, wobei der materielle Punkt, da er vom Aufhängepunkte O immer gleichweit entfernt bleibt, den in der durch OA und OB bestimmten vertikalen Ebene liegenden Kreisbogen BA beschreibt. Diesen Kreisbogen kann man aus unendlich vielen geraden Elementen zusammengesetzt denken, so daß die Bewegung des materiellen Punktes mit dem Falle auf einer schiefen Ebene verglichen werden kann; nur besteht ein wesentlicher Unterschied darin, daß beim Falle auf der schiefen Ebene ihr Neigungswinkel gegen den Horizont immer unverändert bleibt, während er hier von B nach A zu von Element zu Element immer kleiner und in A selbst Null wird. Daraus folgt, daß die Geschwindigkeit des materiellen Punktes auf dem Wege von B nach A zwar beständig zunimmt, aber nicht gleichmäßig, sondern um so weniger, je mehr sich der materielle Punkt der Lage A nähert, wo zwar die Geschwindigkeit am größten, ihr Zuwachs aber, d. i. die Beschleunigung, Null ist. Die Bewegung des materiellen Punktes von B nach A ist also eine *ungleichförmig beschleunigte*.

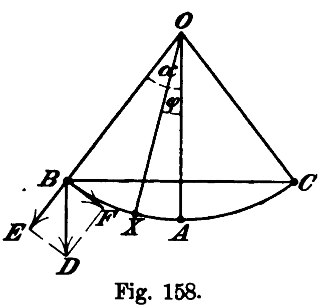


Fig. 158.

345.

Um die Beschleunigung zu finden, mit der das Pendel von B nach A zurückgeht, bezeichnen wir den Winkel AOB, den sogenannten *Ausschlags- oder Elongationswinkel* mit α; stellt nun $BD = g$ die durch das in B vertikal wirkende Gewicht des Pendels bedingte Beschleunigung der Schwere dar, so können wir diese in die Komponenten BE und BF zerlegen, von denen BE in der Richtung des Radius

OB, BF dazu senkrecht in der Richtung der Tangente in B liegt. Erstere wird durch die Spannung des Fadens OB aufgehoben, während die letztere die Beschleunigung des Pendels darstellt und die Größe $g \cdot \sin \alpha$ hat. Wählt man auf AB den beliebigen Punkt X, so daß $\sphericalangle AOX = \varphi$ ist, so erhält man ebenso für die Beschleunigung des Pendels in X den Wert $g \cdot \sin \varphi$. Die Beschleunigung ist also mit φ veränderlich; sie nimmt mit φ und zwar proportional seinem Sinus ab und wird für $\varphi = 0$ in der Lage A auch zu Null.

Mit der auf dem Wege von B nach A erhaltenen Geschwindigkeit bewegt sich nun das Pendel vermöge der Trägheit über den Punkt A hinaus in derselben Ebene auf dem Bogen AC in die Höhe. Da die Schwere seiner Bewegung jetzt genau so entgegenwirkt, als sie vorher fördernd wirkte, so muß (von allen Widerständen abgesehen) das Pendel mit ungleichförmig verzögerter Bewegung ebenso hoch bis zum Punkte C steigen als es vorher gefallen war.

Ist das Pendel in C angelangt, so hat es vermöge der Gegenwirkung der Schwere seine ganze Geschwindigkeit verloren und durchläuft nun in ganz gleicher Weise den Bogen CB in der Richtung von C über A nach B, und würde, wenn keine Widerstände hinderlich und hemmend wären, so fort bis ins Unendliche hin und her schwingend den Bogen BC beschreiben.

Man nennt den Winkel α, wie schon gesagt, den Ausschlagswinkel, den Bogen AB oder AC die Amplitude oder Schwingungsweite, die Bewegung von B nach C und zurück nach B eine ganze, die von B nach C eine halbe Schwingung oder einen Schlag, endlich die zu einer ganzen Schwingung erforderliche Zeit die Schwingungsdauer des Pendels.

346.

Die Schwingungsdauer. Von besonderer Bedeutung für die Gesetze der Pendelbewegung ist die Kenntnis der Schwingungsdauer T des einfachen Pendels. Die Mathematiker haben sich zu verschiedenen Zeiten eingehend mit der Bestimmung derselben beschäftigt und dafür die folgende

jedoch nur durch Infinitesimalrechnung ableitbare Formel gefunden:

$$(1)\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot \sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot \sin^4\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\cdot \sin^6\frac{\alpha}{2} + \ldots\right],$$

worin l die Länge OA des Pendels, g die Beschleunigung der Schwere und α den Ausschlagswinkel bezeichnet.

Führt man statt α die Höhe $AG = h$ des Schwingungsbogens BC ein, so ist

$$h = OA - OG = l - l\cdot\cos\alpha = 2\,l\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

woraus

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{2l}$$

folgt, und wodurch (1) übergeht in

$$(2)\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{h}{2\,l}\right) + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\left(\frac{h}{2\,l}\right)^2 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2\cdot\left(\frac{}{2\,l}\right)^3 + \ldots\right],$$

wofür man mit großer Annäherung auch

$$(3)\qquad T = \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}}{\sqrt[7]{\left(1-\frac{7\,h}{16\,l}\right)^2}}$$

setzen kann.

Schreibt man die Gleichung (1) in der Form

$$(4)\qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\,.\,(1+E),$$

setzt also

$$E = \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2\cdot\sin^4\frac{\alpha}{2} + \ldots,$$

so ergeben sich die folgenden zusammengehörigen Werte von α und E

$\alpha = 1^0$; $E = 0{,}000019$;
$\alpha = 5^0$; $E = 0{,}000476$;
$\alpha = 10^0$; $E = 0{,}001907$.

Man erkennt hieraus, daß für hinreichend kleine α ($\alpha \leqq 5^0$) als erste Annäherung für T der einfache Wert

(5) $$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

gesetzt werden darf.

Mit der Schwingungsdauer T hängt eng die Schwingungszahl n zusammen, die ein Pendel in einer bestimmten Zeit t macht; sie ist durch die Formel

(6) $$n = \frac{t}{T}$$

bestimmt.

Aus der Formel (6) ergibt sich zugleich die Genauigkeit der Formel (5). Ist z. B. der Ausschlagswinkel $\alpha = 5^0$, so folgt aus (6), daß ein Pendel in derselben Zeit 1000476 Schwingungen macht, wenn man die Schwingungsdauer nach der Näherungsformel (5) berechnet, in der es 1000000 Schwingungen macht, falls man die Schwingungsdauer nach der genauen Formel (1) berechnet.

347.

Der unter (5) im vorigen Paragraphen angegebene Näherungswert von T kann unter der Voraussetzung eines sehr kleinen Ausschlagswinkels in elementarer Weise abgeleitet werden.

Es ist

$$\sin \alpha = \frac{BG}{OB};$$

ist nun α sehr klein, so kann der Sinus durch das Verhältnis des Bogens AB zum Radius ausgedrückt oder, was dasselbe ist, AB als geradlinig angesehen werden; dann ist die Beschleunigung des Pendelpunktes in der Lage B $a = \frac{g \cdot AB}{l}$, in der Lage X $a = \frac{g \cdot AX}{l}$, also proportional dem Abstande des Pendels von der Ruhelage. Die Pendelschwingung ist daher in diesem Falle (vergl. § 185) eine harmonische Schwingung, deren Schwingungsdauer im § 185 auf elementarem Wege zu

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{p}}$$

abgeleitet worden ist, wobei p die Beschleunigung des schwingenden Punktes in der Entfernung 1 von der Ruhelage bedeutet. In unserem Falle folgt für p aus a, wenn wir den Bogen $AB = 1$ setzen, der Wert $p = \frac{g}{l}$, so daß der Wert für die Schwingungsdauer

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

sich ergibt, der mit der Näherungsformel (5) im vorigen Paragraphen übereinstimmt.

348.

Aus der Annäherungsformel

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

für die Schwingungsdauer lassen sich nunmehr eine Anzahl Folgerungen ziehen, von denen die wichtigsten die folgenden sind:

1. Die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Masse und der Substanz der schwingenden Kugel.

Zwei gleich lange Fadenpendel, das eine mit einer Holzkugel, das andere mit einer Bleikugel vollführen in gleichen Zeiten die gleiche Anzahl Schwingungen. Newton ließ eine eiserne Hohlkugel leer und dann mit Quecksilber gefüllt schwingen und fand beide Male in derselben Zeit die gleiche Anzahl Schwingungen. Die Folgerung 1 ist zugleich eine Bestätigung der Tatsache, daß im luftleeren Raume alle Körper gleich schnell fallen.

2. Die Schwingungsdauer ist bei kleinem Ausschlagswinkel unabhängig von der Größe des Ausschlagswinkels.

Solange also der Ausschlagswinkel innerhalb gewisser kleiner Grenzen (3 bis 4°) bleibt, sind die Schwingungen isochron.

3. Die Schwingungsdauer ist proportional der Quadratwurzel aus der Pendellänge.

4. Die Schwingungsdauer ist umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Beschleunigung der Schwere.

Hat man zwei Pendel, das eine von der Länge l_1, das andere von der Länge l_2, und ist T_1 die Schwingungsdauer des ersten, T_2 die des zweiten, so folgt aus

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}}\ ;\ T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}$$

5. Die Schwingungszeiten zweier Pendel verhalten sich wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen.

Führt man statt der Schwingungszeiten die Schwingungszahlen

$$n_1 = \frac{t}{T_1} \text{ und } n_2 = \frac{t}{T_2}$$

ein, so erhält man

$$n_1 : n_2 = \sqrt{l_2} : \sqrt{l_1}, \text{ d. h.}$$

6. Die Schwingungszahlen zweier Pendel verhalten sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den Pendellängen.

Läßt man also drei Pendel von den Längen 10 cm, 40 cm und 90 cm gleichzeitig schwingen, so macht das erste in derselben Zeit doppelt so viele Schwingungen als das zweite und dreimal so viele Schwingungen als das dritte Pendel.

349.

Das physische Pendel. Jeder starre Körper von bestimmter Figur, der um eine feste Achse drehbar ist, die oberhalb seines Schwerpunktes liegt, ist ein physisches oder wirkliches Pendel. Jedes einzelne Massenteilchen eines solchen Pendels bildet für sich betrachtet ein einfaches Pendel, das gemäß seiner Entfernung von der Drehungsachse mit einer gewissen Geschwindigkeit schwingen würde. Wären die einzelnen Massenpunkte nicht fest miteinander verbunden, sondern frei (getrennt) beweglich, so würden offenbar die der Drehungsachse näheren Punkte ihre Schwingungsbogen in kürzerer Zeit, die entfernteren dagegen ihre Schwingungsbogen in längerer Zeit durchlaufen. Da die Massenpunkte aber wegen ihrer starren Verbindung sämtlich die gleiche Schwingungsdauer haben, so ist klar, daß die von der Achse entfernteren die Bewegung der näherliegenden verzögern, und umgekehrt, daß die der Achse näherliegenden Massen-

punkte die Bewegung der entfernteren beschleunigen, und daß es deshalb in jedem physischen Pendel auf der durch den Schwerpunkt des Pendels gehenden, auf der Drehungsachse senkrechten Linie einen Punkt geben muß, dessen Bewegung durch die andern Massenpunkte weder beschleunigt noch verzögert wird, der also jetzt in Verbindung mit den übrigen Massenpunkten des Pendels gerade so schwingt, wie er schwingen würde, wenn er ganz frei wäre und ein einfaches Pendel darstellte.

Dieser Punkt heißt der Schwingungspunkt oder der Mittelpunkt des Schwunges, seine Entfernung von der Drehungsachse die reduzierte Länge des physischen Pendels. Letztere ist also die Länge eines einfachen Pendels, das genau so schwingt, wie das physische, also auch die gleiche Schwingungsdauer wie das physische hat. Kann man daher den Schwingungspunkt und damit die reduzierte Länge L eines physischen Pendels bestimmen, so hat man auch die Schwingungsdauer des physischen Pendels, die dann durch die Formeln des § 346, insbesondere für kleine Ausschlagswinkel durch

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

bestimmt ist.

Es wird daher die Bestimmung der reduzierten Pendellänge die Hauptaufgabe in der Theorie des physischen Pendels sein.

350.

Bestimmung der reduzierten Pendellänge. Sollen ein mathematisches und ein physisches Pendel gleiche Schwingungsdauer haben, so müssen beide offenbar bei demselben Ausschlagswinkel gleiche Winkelbeschleunigung haben.

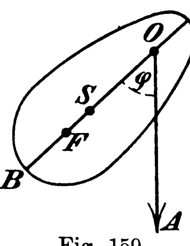


Fig. 159.

Wird nun das Pendel, dessen Aufhängepunkt O sein möge (Fig. 159) und bei dem in der Ruhelage der Schwerpunkt S vertikal unter O liegt, in eine von der Vertikalen OA abweichende Lage gebracht, so daß $\measuredangle\, BOA = \varphi$ ist, so wirkt die Schwere an jedem Massenteilchen und erteilt ihm die Beschleunigung $g \cdot sin\, \varphi$. Denken wir uns die Gesamtmasse M des Pendels im Schwerpunkte S vereinigt, so ist

die an ihm angreifende treibende Schwerkraft $M \cdot g \cdot \sin \varphi$ und ihr Moment in bezug auf die Drehungsachse O, wenn der Abstand OS des Schwerpunktes von der Drehungsachse mit d bezeichnet wird, $M \cdot g \cdot \sin \varphi \cdot d$. Ist $\mathfrak{T}$ das als bekannt anzusehende Trägheitsmoment des Pendels in bezug auf die Drehungsachse, so ist die durch die Schwere erzeugte Winkelbeschleunigung nach § 330

$$\alpha = \frac{M \cdot g \cdot \sin \varphi \cdot d}{\mathfrak{T}}.$$

Ist aber L die Entfernung des Schwingungspunktes F von der Drehungsachse, so ist seine durch die Schwere erzeugte Beschleunigung $g \cdot \sin \varphi = L \cdot \alpha$, woraus

$$\alpha = \frac{g \cdot \sin \varphi}{L}$$

folgt. Die Gleichsetzung der beiden für die Winkelbeschleunigung gefundenen Werte gibt die Gleichung

$$L = \frac{\mathfrak{T}}{M \cdot d}, \tag{7}$$

d. h. die reduzierte Länge eines physischen Pendels ist gleich dem Quotienten aus seinem Trägheitsmomente und dem statischen Momente seiner im Schwerpunkte vereinigten Gesamtmasse in bezug auf die Drehungsachse.

Durch Einsetzen dieses Wertes für L erhält man für die Schwingungsdauer eines physischen Pendels die Formel

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\mathfrak{T}}{M \cdot g \cdot d}}, \tag{8}$$

die natürlich nur für hinreichend kleine Ausschlagswinkel gilt.

351.

Aus den zuletzt gefundenen Gleichungen ergeben sich einige bemerkenswerte Folgerungen:

1. Nach § 317 gilt die Gleichung

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_s + M \cdot d^2;$$

setzt man diesen Wert in die Gleichung (7) ein, so erhält man

$$L = \frac{\mathfrak{T}_s + M \cdot d^2}{M \cdot d} = d + \frac{\mathfrak{T}_s}{M \cdot d};$$

es ist also L größer als d oder

der Schwingungspunkt eines physischen Pendels liegt stets tiefer als der Schwerpunkt.

2. Macht man den Schwingungspunkt F zum Aufhängepunkte und bezeichnet mit $\mathfrak{T}'$ das Trägheitsmoment des Pendels in bezug auf F, so ist, da $SF = L - d$, die jetzige reduzierte Länge des Pendels

$$L' = \frac{\mathfrak{T}'}{M \,.\, (L - d)}.$$

Nun ist aber nach § 317

$$\mathfrak{T}' = \mathfrak{T}_s + M \,.\, (L - d)^2,$$
$$\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_s + M \,.\, d^2,$$

woraus durch Subtraktion

$$\mathfrak{T}' - \mathfrak{T} = M \,.\, L^2 - 2 M \,.\, L \,.\, d$$

folgt. Da nun aber nach Gleichung (7) $\mathfrak{T} = M \,.\, L \,.\, d$ ist, so hat man

$$\mathfrak{T}' = M \,.\, L \,.\, (L - d).$$

Setzt man diesen Wert in L' ein, so folgt

$$L' = \frac{M \,.\, L \,.\, (L - d)}{M \,.\, (L - d)} = L,$$

d. h. wenn man den Schwingungspunkt eines physischen Pendels zum Aufhängepunkte macht, so bleibt die reduzierte Pendellänge ungeändert oder

durch Vertauschung von Aufhängepunkt und Schwingungspunkt wird die Schwingungsdauer eines physischen Pendels nicht geändert.

3. Bei der Bestimmung des statischen Momentes $M.d$, das gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der einzelnen Massenteilchen ist, sind die Entfernungen der Massenteilchen oberhalb der Drehungsachse negativ zu nehmen. Durch solche Massen wird daher das Drehungsmoment der Gesamtmasse kleiner, das Trägheitsmoment aber größer, und infolge beider Wirkungen die reduzierte Pendellänge und damit auch die Schwingungsdauer des physischen Pendels vergrößert, und zwar um so mehr, je größer die Entfernungen jener Massen von der Drehungsachse sind.

4. Je kleiner d ist, desto größer wird T; es kann daher

auch ein kurzes physisches Pendel, wenn es nahe am Schwerpunkte aufgehängt ist, sehr langsame Schwingungen machen.

Ist $d = 0$, so wird $T = \infty$, d. h. ein im Schwerpunkte aufgehängtes Pendel hat unendlich große Schwingungsdauer: es schwingt überhaupt nicht, es ist in jeder Lage im Gleichgewichte.

352.

Von den vielfachen wissenschaftlichen und praktischen Anwendungen des Pendels und der Gesetze seiner Schwingungen seien einige der wichtigsten im folgenden besprochen.

Alle Messungen hinsichtlich der Intensität der Schwere und der durch sie erzeugten Beschleunigung des freien Falles werden am genauesten durch Pendelbeobachtungen ausgeführt.

Wie schon hervorgehoben, gibt uns das Pendel den Beweis, daß die Fallbeschleunigung für alle Körper im luftleeren Raume dieselbe ist. Oben (§ 348) wurde bereits der Versuch Newtons erwähnt, durch den diese Gleichheit erkannt werden kann, hier sei noch hervorgehoben, daß durch die klassischen Pendel-Versuche Bessels (1828) diese Gleichheit zur Evidenz nachgewiesen worden ist. Das Pendel gestattet ferner die genaueste Messung der Beschleunigung g der Schwere. Da sich zunächst zeigt, daß ein bestimmtes Pendel an demselben Orte der Erde seine Schwingungen in immer gleichen Zeiten vollendet, so bleibt die Schwere an demselben Orte der Erde unverändert. Die Ungleichheit der Schwere an verschiedenen Orten der Erde beobachtete zuerst der französische Astronom Richer auf einer im Jahre 1672 von Paris nach Cayenne unternommenen Reise: das Pendel einer von Paris mitgebrachten Pendeluhr mußte er um etwa $3\frac{1}{2}$ mm verkürzen, damit die Uhr in Cayenne richtig ging; nach seiner Rückkehr nach Paris mußte er es um ebensoviel wieder verlängern.

Aus der Formel $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ergibt sich

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot L}{T^2};$$

gelingt es nun, die reduzierte Länge L eines Pendels und seine Schwingungsdauer (im luftleeren Raume) an einem be-

stimmten Orte der Erde zu bestimmen, so kann g nach dieser Formel berechnet werden.

Das erstere gelingt nun am genauesten durch das von Bohnenberger (1811) und Kater (1818) erfundene Reversionspendel, das auf der Folgerung 2 des § 351 beruht. Es enthält an einer Pendelstange zwei Aufhängepunkte (Schneiden) O_1 und O_2 (Fig. 160) und zwei verschiebbare Gewichte P_1 und P_2; werden diese so verschoben, daß das Pendel gleiche Schwingungsdauer hat, mag es in O_1 oder O_2 aufgehängt sein, so ist der Abstand der Schneiden die reduzierte Pendellänge.

Fig. 160.

Beobachtet man nun die Schwingungsdauer eines solchen Pendels (am besten durch die Bordasche Methode der Koinzidenzen, die darauf beruht, daß man eine Reihe von Momenten feststellt, in denen das zu untersuchende Pendel mit dem der Normaluhr zugleich durch die Ruhelage geht), so kann g aus der obigen Formel berechnet werden.

Durch solche Pendelbeobachtungen ist g an verschiedenen Orten gemessen worden; am Äquator wurde $g_0 = 9{,}781 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ gefunden, und die Ergebnisse der übrigen Beobachtungen und Rechnungen sind in der bereits im § 174 angegebenen Formel

$$g = (9{,}781 + 0{,}0506 \sin^2 \beta) \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

zusammengefaßt worden, worin β die geographische Breite des Beobachtungsortes ist.

Mit der Größe von g hängt eng die Länge des Sekundenpendels zusammen, das ist die Länge desjenigen Pendels, dessen halbe Schwingungsdauer gerade 1 Sekunde ist, das also 1 Sekunde zu einer halben Schwingung oder einem Schlage braucht. Seine Länge ist durch die Gleichung

$$l = \frac{g}{\pi^2},$$

die aus der obigen Formel für g für $T = 2$ folgt, bestimmt und an verschiedenen Orten der Erde ebenso wie g verschieden.

Am Äquator ist $l_0 = 99{,}102$ cm und allgemein

$$l = (0{,}99102 + 0{,}005127 \sin^2 \beta)\ \mathrm{m},$$

wo β dieselbe Bedeutung wie oben hat.

Die einander zugehörigen Werte von l und g und ihre Änderungen mit der geographischen Breite zeigt die folgende kleine Tabelle, die beliebig fortgesetzt werden könnte:

Ort	Geogr. Breite	l in cm	g in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}^2}$
Äquator . .	0° 0′ 0″	99,102	9,781
Madras . . .	13° 4′ 8″	99,128	9,783
Palermo . .	38° 6′ 44″	99,297	9,801
—	45° 0′ 0″	99,358	9,806
Paris . . .	48° 50′ 1″	99,393	9,810
Leipzig . .	51° 20′ 6″	99,415	9,812
Berlin . . .	52° 30′ 17″	99,425	9,813
Petersburg .	59° 56′ 30″	99,486	9,819
Spitzbergen .	79° 49′ 58″	99,599	9,830
Nordpol . .	90° 0′ 0″	99,645	9,835

353.

Die praktisch wichtigste Verwendung des Pendels ist die als Regulator bei der Pendeluhr. (Galilei 1641; Huyghens 1657.) Wird an einem Pendel eine Masse verschiebbar angebracht, so kann die Schwingungsdauer des Pendels innerhalb gewisser Grenzen durch die Verschiebung dieser Masse beliebig geändert werden. Diese Möglichkeit und der Isochronismus der Pendelschwingungen macht das Pendel als Instrument für die Zeitmessung geeignet. Freilich würde ein einzelnes Pendel durch den zu überwindenden Luftwiderstand und die Reibung bald zur Ruhe gebracht werden; das Pendel ist deshalb für gewöhnlich mit einer Räderuhr in Verbindung gebracht. Bei dieser werden die Räder durch ein sinkendes Gewicht oder die Spannkraft einer elastischen Spiralfeder in Bewegung gesetzt; die durch diese konstant wirkende Kraft erzeugte beschleunigte Bewegung wird nun durch das Pendel in eine gleichmäßige Bewegung umgewandelt, in dem dieses mittels einer geeigneten Vorrichtung (Hemmung, Echappement) bei jedem Hin- und

Hergange in die Zähne eines Rades, des sogenannten Steigrades, eingreift und dadurch bewirkt, daß sich dieses Rad jedesmal nur um einen Zahn fortbewegen kann. Gleichzeitig erhält das Pendel jedesmal durch die abgeschrägten Zähne des Steigrades einen neuen Anstoß. Das die Uhr treibende Gewicht muß gerade so groß sein, um diese neuen Anstöße in hinreichender Stärke zu geben. So reguliert das Pendel die Drehung des Steigrades und wird selbst durch dieses immer wieder in Bewegung gesetzt. Die Schwingungsdauer (Schlagzeit) des Pendels und damit der Gang der Uhr wird durch die verschiebbare Pendellinse geregelt.

354.

Das Mälzelsche Metronom dient in der Musik zum Taktmessen. Es ist ein kurzes Pendel mit einem festen unteren und einem verschiebbaren oberen Gewichte; zwischen beiden Massen ist der Drehungspunkt. Das untere Gewicht ist gegen das obere so schwer, daß der Schwerpunkt beider stets unterhalb der Drehungsachse liegt. Wie bereits unter 3 im § 351 hervorgehoben ist, wird durch die Verschiebung des oberen Gewichtes nach oben das Trägheitsmoment größer und die Entfernung des Schwerpunktes von der Drehungsachse kleiner, so daß durch beide Veränderungen die Schwingungsdauer vergrößert wird. Der Apparat ist mit einer dem Räderwerke einer Uhr ähnlichen Einrichtung versehen, die durch eine Feder in Betrieb erhalten wird, wodurch nicht nur die Schwingung des Pendels lange erhalten, sondern auch hörbar gemacht wird. An dem oberhalb der Drehungsachse liegenden Teile der Pendelstange ist eine Skala angebracht für das verschiebbare Gewicht. In den musikalischen Kompositionen ist angegeben, an welche Stelle der Skala das Schiebegewicht gestellt werden soll, damit das Pendel durch seine Schläge das vom Komponisten beabsichtigte Tempo des Musikstückes angibt.

355.

Löst man die für die Schwingungsdauer eines physischen Pendels gefundene Formel nach $\mathfrak{T}$ auf, so erhält man

$$\mathfrak{T} = \frac{M \cdot d \cdot g \cdot T^2}{4\,\pi^2}.$$

Diese Gleichung kann man benutzen, um das Trägheitsmoment eines ganz unregelmäßigen Körpers praktisch zu ermitteln, wenn man sein statisches Moment $M \cdot d$ kennt. Man hängt den Körper auf und läßt ihn nach Art eines Pendels um eine horizontale Achse schwingen. Da die Zeitdauer einer einzelnen Schwingung nicht genau beobachtet werden kann, zählt man die Anzahl n der Schwingungen, die das Pendel während m Sekunden macht; alsdann ist $T = \frac{m}{n}$ die Dauer einer einzigen Schwingung.

M ist durch das Gewicht des Körpers bestimmt, d kann praktisch bestimmt werden, indem man den Schwerpunkt des Körpers nach § 253 bestimmt.

Wäre z. B. $M \cdot d = 15$ kg sec², und machte der Körper in 40 Sekunden 16 Schwingungen, so wäre die Dauer einer Schwingung $\frac{40}{16} = \frac{5}{2}$ Sekunden und das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}$ des Körpers in bezug auf die gewählte Drehungsachse $\mathfrak{T} = 23{,}3$ mkg sec².

356.

Foucaults Pendelversuch. Trägt man ein schwingendes Pendel im Zimmer umher, so sind nach dem Prinzip der Trägheit, solange keine äußeren Kräfte auf das Pendel einwirken, die Schwingungsebenen des Pendels parallel; auch behält das Pendel seine Schwingungsebene bei einer vorsichtigen Drehung des Aufhängepunktes bei.

Schon im Jahre 1661 hatte man in Florenz die damals sehr auffallende und nicht zu erklärende Beobachtung gemacht, daß die vertikale Ebene, in der ein genügend langes und schweres und deshalb längere Zeit schwingendes Pendel schwingt, sich um die vertikale Gleichgewichtslinie dreht und zwar von Süden nach Westen, wenn das Pendel in einer Meridianebene schwingt und man den Blick nach Süden richtet.

Erst in neuerer Zeit (1851) hat Foucault für diese Beobachtung die richtige Erklärung gegeben: die Drehung der Schwingungsebene des Pendels ist nur scheinbar und hat ihren Grund in der täglichen Drehung der Erde um ihre Achse. Indem Foucault durch sorgfältig ausgeführte Ver-

suche die beobachtete Größe der Drehung der Pendelebene übereinstimmend mit der theoretisch gefolgerten zeigte, lieferte er durch diese Versuche einen rein physikalischen Beweis für die Achsendrehung der Erde.*)

Denkt man sich ein Pendel über dem Nordpole in der Verlängerung der Erdachse aufgehängt, so fällt seine Schwingungsebene mit einer Meridianebene zusammen und in dieser Ebene schwingt nun das Pendel vermöge seiner Beharrlichkeit weiter. Denkt man sich diese Ebene fest im Raume, so müssen alle Erdmeridiane, wenn die Erde sich wirklich in 24 Stunden um ihre Achse dreht und das Pendel solange schwingt, sich durch diese unbewegliche Schwingungsebene drehen. Einem Beobachter am Pole aber, der die Umdrehung der Erde nicht fühlt, würde es scheinen, als wenn die Schwingungsebene sich in entgegengesetzter Richtung um die vertikale Gleichgewichtslage in 24 Stunden in einem vollen Kreise, in 1 Stunde also um 15⁰ herumdrehte.

Schwingt das Pendel am Äquator z. B. in einer Meridianebene, so ist die Schwingungslinie (wenn wir den kleinen Bogen, in dem die Spitze der Pendelkugel immer hin- und hergeht, als Gerade und als Tangente an den Meridian auffassen) stets parallel zur Erdachse, ob sich die Erde dreht oder nicht. Die Pendelkugel hat bei einer Drehung der

*) Foucault beobachtete zunächst (1851) die Schwingungen eines nur 2 m langen Stahldrahtpendels, an dem eine 5 kg schwere Kugel aufgehängt war, und setzte seine Versuche an einem 11 m langen Pendel im Meridiansaale der Pariser Sternwarte fort; das Hauptexperiment aber erfolgte 1852 im Pantheon in Paris, wobei er ein 67 m langes Pendel mit einer 28 kg schweren Kupferkugel schwingen ließ. Seine Versuche wurden später vielfach wiederholt, so von Garthe im Kölner Dom (45 m Pendellänge), von Schwerd im Dome zu Speyer, auf der südlichen Halbkugel in Rio de Janeiro von Oliveira, wo die scheinbare Drehung der Pendelebene, wie es die Theorie verlangte, in entgegengesetzter Richtung, also gegen den Lauf des Uhrzeigers, erfolgte. In neuester Zeit (1902) wurden Foucaults Versuche auf Flammarions Veranlassung unter der Leitung des Physikers Berget im Pantheon mit allen neuzeitlichen Vervollkommnungen der dabei angewandten Instrumente wiederholt und öffentlich gezeigt; man benutzte dabei die historisch gewordene alte Pendelkugel Foucaults, die an einer 67 m langen, 0,72 m starken Klavierdrahtsaite aufgehängt wurde. Übrigens kennt man jetzt Einrichtungen des Versuchs, die seine Wiederholung in jedem physikalischen Laboratorium gestatten.

Erde immer dieselbe Geschwindigkeit, wie der zugehörige Punkt des Äquators, so daß kein Grund vorhanden ist, warum die vertikale Schwingungsebene sich drehen solle.

Schwingt das Pendel in der Meridianebene eines zwischen dem Pole und dem Äquator gelegenen Ortes A (Fig. 161), dessen geographische Breite β sei, und hat der Punkt A infolge der Achsendrehung der Erde innerhalb eines kleinen Zeitteilchens den Bogen AB zurückgelegt, so hat dabei die Tangente an den Meridian in A, die die verlängerte Erdachse in T schneiden möge, den Teil ATB eines Kegelmantels beschrieben. Bei einer vollen Umdrehung der Erde beschreibt nämlich AT den Mantel eines Kegels, dessen Grundkreis der Parallelkreis durch A ist. Da der Bogen AB so klein gedacht werden kann, daß man das Element des Kegelmantels ATB als eben auffassen und in dieser Ebene die Parallele BT' zu AT ziehen kann, so liegt die Schwingungsebene des Pendels in dieser Geraden, hat sich also gegen die Meridianebene in B um den Winkel $TBT' = ATB = \varphi$ gedreht und zwar in der der Drehung der Erde entgegengesetzten Richtung. Nun ist aber der Bogen, da er der Seitenlinie des Kegels proportional ist, $AB = AT.\varphi$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck CAT folgt aber $AT = r \cdot cotg\ \beta$, also

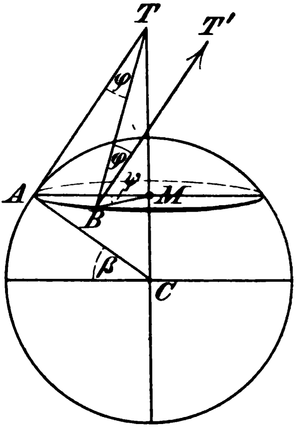


Fig. 161.

$$AB = r \cdot cotg\ \beta \cdot \varphi,$$

wobei r den Radius der Erdkugel bedeutet. Der Bogen AB wird aber auch durch den Winkel $AMB = \psi$ gemessen und ist deshalb dem Radius MA des Parallelkreises proportional, der gleich $r \cdot cos\ \beta$ ist; es ist also

$$AB = r \cdot cos\ \beta \cdot \psi.$$

Aus der Gleichsetzung dieser beiden Werte folgt die Gleichung

$$\varphi = \psi\ .\ sin\ \beta.$$

Betrachtet man nun eine endliche Zeit, so kann man diese in Elemente zerlegen und schließen, da für jedes Ele-

ment die gefundene Beziehung gilt, daß sie auch für die Summe der Elemente, also für jede endliche Zeit gilt.

Man findet also die Drehung der Pendelebene, wenn man die gleichzeitige Drehung der Erde mit dem Sinus der geographischen Breite des Beobachtungsortes multipliziert.

Es beträgt hiernach die Drehung der Pendelebene in der geographischen Breite β

an einem ganzen Tage $\varphi_1 = 360^0 \, . \, \sin \beta$,
in einer Stunde $\varphi_2 = 15^0 \, . \, \sin \beta$.

Man erhält z. B. für

Hamburg, $\beta = 53^0 \; 33' \; 7''$, $\varphi_1 = 289^0 \; 34' \; 48''$; $\varphi_2 = 12^0 \; 3' \; 57''$;

Berlin, $\beta = 52^0 \; 30' \; 17''$, $\varphi_1 = 285^0 \; 37' \; 48''$; $\varphi_2 = 11^0 \; 54' \; 4''$;

Leipzig, $\beta = 51^0 \; 20' \; 6''$, $\varphi_1 = 281^0 \; 5' \; 24''$; $\varphi_2 = 11^0 \; 42' \; 43''$.

Dieselbe Erscheinung muß offenbar eintreten, wenn das Pendel, anstatt seine Schwingungen in einer Meridianebene zu beginnen, wie wir der leichteren Vorstellung wegen angenommen haben, in einer anderen, z. B. der von Nordost nach Südwest gehenden Vertikalebene seine Schwingungen beginnt.

Aufgaben.

228. Nach den Messungen von **Borda** machte ein einfaches Pendel von 3,896 m Länge in Paris in einer Stunde 1,818 Schläge; wie groß folgt hieraus die Beschleunigung der Schwere und die Länge des Sekundenpendels?

Antw.: $9{,}806 \; \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$; 0,9936 m.

229. Wie groß war die Schwingungsdauer des **Foucault**schen 67 m langen Pendels, wenn es als ein einfaches betrachtet wird?

Antw.: 16,4 sec.

230. Wie lang ist ein einfaches Pendel, bei dem jeder Schlag $1/2$ sec ist?

Antw.: 24,8 cm.

231. Wie lang ist ein einfaches Pendel, dessen Schwingungsdauer 5 sec beträgt?

Antw.: 6,212 m.

232. Wieviel Schläge macht ein einfaches 1 m langes Pendel an einem Tage a) am Äquator; b) am Pole?

Antw.: a) 86010; b) 86226.

233. Wie lang muß eine dünne Stange sein, die um einen Endpunkt pendelnd eine Schwingungsdauer von $^1/_2$ sec haben soll?

Antw.: 9,32 cm.

234. Wie lang ist ein Pendel, das in Berlin a) halbe; b) drittel Sekunden schlagen soll? (Vergl. die Tabelle im § 352)

Antw.: a) 24,856 cm; b) 11,047 cm.

235. Von zwei Pendeln macht das eine in $^1/_4$ Stunde 450, das andere 400 Schwingungen; wie verhalten sich ihre Längen?

Antw.: 64 : 81.

236. Wie groß ist die Länge des Sekundenpendels a) auf dem Monde $\left(g_m = 1{,}65 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}\right)$; b) auf der Sonne $(g_s = 27{,}6 \,.\, g)$?

Antw.: a) 16,718 cm; b) 27,433 m.

237. Ein Sekundenpendel aus Eisen geht bei 0° C richtig; wie groß ist ein Schlag dieses Pendels bei 30° C, wenn der Ausdehnungskoëffizient des Eisens 0,000011 ist? wie viele Schwingungen macht das Pendel an einem Tage zu wenig?

Antw.: 1,00016 sec; 15.

238. Ein physisches Pendel besteht aus einer 0,50 m langen und 0,2 kg schweren Eisenstange und einer am Ende derselben befestigten 1 kg schweren kreisrunden Scheibe von 10 cm Radius; welche Schwingungsdauer hat dieses Pendel, wenn es um das freie Ende des Stabes schwingt?

Antw.: 1,54 sec.

239. Wieviel beträgt die stündliche scheinbare Drehung der Schwingungsebene eines Pendels a) in Madras; b) in Petersburg? (§ 352)

Antw.: a) 3° 23′ 31″; b) 12° 58′ 55″.

Dreiundzwanzigstes Buch.

Von der Drehung eines starren Körpers um eine freie Achse.

357.

Begriff der freien Achse. Wenn ein Körper sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse dreht, so wirken auf seine einzelnen Massenteilchen m_1, m_2, m_3, . . ., die die Entfernungen r_1, r_2, r_3, . . . von der Drehungsachse haben mögen, Zentripetalkräfte, die nach § 170 Gleichung (3) die Größen

$$m_1 \cdot r_1 \cdot \omega^2;\ m_2 \cdot r_2 \cdot \omega^2;\ m_3 \cdot r_3 \cdot \omega^2;\ \ldots$$

haben. Nach dem Prinzipe der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung üben die Massenteilchen ihrerseits Zugkräfte (Zentrifugalkräfte) auf die Achse aus, die diesen Zentripetalkräften gleich und ein Maß sind für das Bestreben der Massenteilchen, sich von der Drehungsachse zu entfernen.

Heben sich diese Zugkräfte nicht gegenseitig auf, so wird die Drehungsachse nach der Richtung ihrer Resultante einen Zug erleiden. Sind aber die Massenteilchen so um die Drehungsachse verteilt, daß diese Zugkräfte einander gegenseitig aufheben, daß sie also im Gleichgewichte sind und ihre Resultante Null ist, was durch die Gleichung

$$\Sigma\, m_i \cdot r_i \cdot \omega^2 = 0$$

ausgedrückt wird, so erleidet die Achse keinen einseitigen Zug mehr und heißt eine freie Achse des Körpers.

Dreht sich also ein Körper um eine Achse, so heißt diese eine freie Achse, wenn die Kräfte, die durch diese Drehung des Körpers wach gerufen werden, keine Änderungen in dem Bewegungszustande des Körpers hervorbringen.

Beispiele solcher freien Achsen bieten ein rotierender Kreisel, ein rollender Reifen oder ein rollendes Rad (Veloziped), ein rollendes oder um einen vertikalen Durchmesser gedrehtes Geldstück. Freie Achsen sind insbesondere die Rotationsachsen der Weltkörper.

Aus dem Gesagten geht hervor, daß die geometrische

Achse eines Rotationskörpers, überhaupt jede Symmetrieachse eines Körpers, d. h. eine Achse, in bezug auf die die Massenteilchen eines homogenen Körpers symmetrisch verteilt sind, eine freie Achse ist. Doch ist die Existenz einer solchen Symmetrieachse keineswegs die notwendige Bedingung dafür, daß der Körper eine freie Achse besitze. Vielmehr kann — freilich nur mit Hilfe der Infinitesimalrechnung — nachgewiesen werden, daß jeder Körper mindestens drei freie Achsen besitzt, und daß diese durch den Schwerpunkt des Körpers gehen, sich in ihm also schneiden.

Am leichtesten erkennt man diese drei freien Achsen am rechtwinkligen Parallelepiped.

Im allgemeinen werden die Trägheitsmomente für diese drei Achsen verschieden sein; diejenige Achse, für die das Trägheitsmoment den größten Wert hat, ist eine stabile Achse, weil der Körper bei einer Drehung um diese Achse den größten Widerstand gegen eine Änderung der Drehungsachse zeigt; diejenige, für die das Trägheitsmoment den kleinsten Wert hat, heißt eine labile Achse, weil der Körper, bei einer Drehung um diese Achse aus der Gleichgewichtslage gebracht, sich um eine stabile Achse zu drehen bestrebt ist.

Anm. Schwungräder und andere um Achsen sich drehende Maschinenteile müssen so ausgeglichen werden, daß ihre Rotationsachsen freie Achsen sind, weil sonst auf die Lager der Achsen ein starker Druck ausgeübt wird, und die Lager sowie die in ihnen laufenden Zapfen mehr erwärmt und abgenutzt werden.

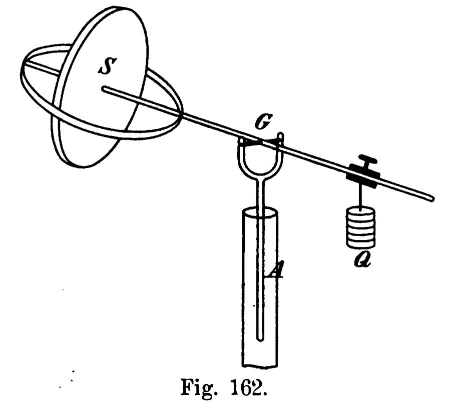


Fig. 162.

358.

Auch die Gesetze für die Drehung eines Körpers um eine freie Achse sind streng nur mit Hilfe der höheren Mathematik abzuleiten und zu beweisen, deshalb können sie im folgen-

den nur angegeben und durch erläuternde Versuche bestätigt werden.

Zur Anstellung dieser Versuche eignet sich am besten der Fesselsche Rotationsapparat (wohl auch Gyroskop genannt) oder ein Kreisel von besonderer Form (Schmidtscher Kreisel).

Der erstere Apparat in seiner gebräuchlichsten Form besteht aus einer Scheibe *S* (Fig. 162), die am Rande mit einem dicken, schweren Wulste versehen ist und um eine Achse vermittels einer abziehbaren Schnur wie ein Kreisel in rasche Rotation versetzt werden kann. Die Achse dieser Scheibe hängt in einem Ringe, der an einem Stiele befestigt ist. Dieser Stiel ist um eine horizontale Achse in der Gabel *G* drehbar, während diese Gabel selbst um eine in dem Fuße *A* des Gestelles befindliche vertikale Achse drehbar ist. Am anderen Ende des Stieles kann das in der Regel aus Scheiben bestehende Gewicht *Q* beliebig verschoben werden.

359.

Besteht zwischen der Scheibe *S* und dem Gewichte *Q* Gleichgewicht, und ist die Scheibe in Ruhe, so reicht die geringste Kraft aus, um der Achse der Scheibe eine andere Lage zu geben, mag man sie um die vertikale Achse *A* oder um die horizontale Achse *G* oder um beide zugleich drehen wollen.

Wenn dagegen *S* und *Q* zwar im Gleichgewichte sind, die Scheibe *S* aber in rasche Rotation um ihre Achse versetzt worden ist, so fühlt man bei jedem Versuche, mit der Hand der Rotationsachse eine andere Lage zu geben, deutlich einen Widerstand, der mit der Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe und mit ihrer Masse zunimmt.

Man schließt daraus das folgende erste Gesetz der freien Achsen:

Eine freie Achse eines ruhenden Körpers kann durch die kleinste Kraft aus ihrer Richtung gebracht werden; eine freie Achse eines um sie rotierenden Körpers verharrt in ihrer Richtung mit einer Kraft, die mit der Masse des Körpers und seiner Rotationsgeschwindigkeit wächst.

Der erste Teil dieses Gesetzes ist eine unmittelbare

Folge des Begriffs der freien Achse; der zweite Teil, den man auch das Gesetz von der Stabilität der Rotationsachse oder von der Erhaltung der Rotationsebene nennt, ist leicht als eine Folge des Trägheitsprinzips zu erkennen. Wie jeder bewegte Punkt nur durch eine äußere Kraft aus der Richtung seiner einmal eingeschlagenen Bewegung gebracht werden kann und jeder Änderung seiner Bewegungsrichtung einen Widerstand entgegensetzt, so muß auch jedes Molekül, das bei der Rotation um eine Achse einen Kreis beschreibt und dabei in jedem Augenblicke eine nach der Tangente des Kreises gerichtete Geschwindigkeit hat, vermöge der Trägheit in seiner Rotationsebene zu verharren bestrebt sein, da jede Drehung dieser Ebene, durch die sie mit der ursprünglichen Lage einen Winkel bilden würde, auch die Richtung der Bewegung ändert.

Diese Erhaltung der Rotationsebene kann an verschiedenen Beispielen erkannt werden: Ein ruhender, auf der Spitze stehenden Kreisel, eine kreisrunde auf der Peripherie ruhig stehende Scheibe (Reifen, Rad, Geldstück) fallen leicht um, weil sie in labiler Gleichgewichtslage sind, fallen aber nicht, wenn sie in Rotation versetzt werden; der rotierende Kreisel fällt selbst dann nicht, wenn er schräg gestellt wird. Veranschaulicht wird die Erhaltung der Rotationsebene auch an einem schief in die Höhe geworfenen Pappstücke, dem man beim Fortwerfen eine rasche Drehung in seiner Ebene erteilt; es steigt so empor, daß die Drehungsebenen immer parallel sind und gleitet, wenn seine fortschreitende Bewegung zu Null geworden ist, aber seine Drehung noch fortbesteht, auf der Luft wie auf einer schiefen Ebene nach seinem Ausgangspunkte zurück. Ganz ähnlich ist die Bewegung des Bumerang.

360.

Es sei nun, wie vorhin, der Fesselsche Apparat im Gleichgewichte, der Stiel also parallel der Horizontalebene, und es werde die Scheibe S in rasche Rotation versetzt. Sucht man nun durch eine nicht zu starke Kraft die Rotationsachse zu ändern und der freien Achse eine andere Lage zu geben, indem man an der Gewichtsseite des Stieles vermittels eines Fadens einen schwachen Zug ausübt, so folgt

die Achse keineswegs der Richtung dieser störenden Kraft, sondern nimmt eine eigentümliche Drehbewegung an, die rechtwinklig zur Richtung der störenden Kraft gerichtet ist.

Zieht man z. B. an dem Faden in horizontaler Richtung, sucht also die Rotationsachse um die vertikale Achse *A* zu drehen, so dreht sich die freie Achse mit gleichmäßiger Geschwindigkeit um die horizontale Gabelachse *G*. Zieht man aber an dem Faden in vertikaler Richtung, sucht also die freie Achse um die horizontale Achse der Gabel zu drehen, so dreht sich die Rotationsachse mit gleichmäßiger Geschwindigkeit um die vertikale Achse *A*.

Die Richtung dieser Drehbewegung der Rotationsachse ist wie folgt bestimmt.

Bei horizontaler Zugrichtung nach vorn dreht sich die freie Achse in demselben Sinne, wie sich der hintere Rand der Scheibe *S* dreht; rotiert also von, *G* aus gesehen, die Scheibe *S* in der Richtung des Urzeigers („rechts herum“), so senkt sich die Rotationsachse beim Zuge nach vorn. Bei horizontaler Zugrichtung nach hinten dreht sich die freie Achse in demselben Sinne nach oben oder unten wie der vordere Rand der Scheibe. Zieht man an dem Faden in vertikaler Richtung nach oben oder unten, so weicht die Rotationsachse in horizontaler Richtung aus, entsprechend der Bewegungsrichtung der Scheibe an ihrem unteren oder oberen Rande.

Den vertikalen Zug durch den Faden kann man auch durch die Schwerkraft ersetzen, indem man durch Verschiebung von *Q* das Gleichgewicht zwischen *S* und *Q* stört, den Stiel aber beim Beginne des Versuches, nachdem die Scheibe *S* in Rotation versetzt worden ist, horizontal stellt. Je nachdem das Übergewicht auf der Seite von *Q* ist oder nicht, wirkt dann die Schwere wie ein Zug an einem Faden nach unten oder oben.

Sollen die Versuche gut gelingen, so muß die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe möglichst groß sein.

Die entstehende Drehbewegung der freien Achse nennt man Präzession.

Wenn man bei vertikalem, durch ein Übergewicht auf einer Seite des Stieles ausgeübtem Zuge diese Präzessionsbewegung etwa durch Anstoßen mit dem Finger verstärkt, so richtet sich die schwerere Seite des Apparates auf; wird

dagegen die Präzessionsbewegung gehindert, so senkt sich die schwerere Seite des Apparates.

Sind die Scheibe S und das Gewicht Q nicht im Gleichgewichte, so daß etwa das Übergewicht auf der Seite von Q wäre, wird die Scheibe S in rasche Rotation versetzt, aber der Stiel nicht horizontal, sondern schräg gestellt, so daß das schwerere Gewicht Q tiefer liegt als die Scheibe, so beschreibt die Rotationsachse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit den Mantel eines Rotationskegels, dessen Achse die vertikale Achse A ist, so daß die Neigung der Rotationsachse gegen diese Achse immer dieselbe bleibt, solange die Scheibe S rasch genug rotiert. Die Richtung der Präzessionsbewegung entspricht dann der des obern Randes der Scheibe. Die Präzessionsbewegung erfolgt um so langsamer, je rascher die Scheibe rotiert, und wird erst schneller, wenn sich die Umdrehungsgeschwindigkeit der Scheibe verringert, wobei zugleich das Übergewicht Q weiter sinkt und die Öffnung des Rotationskegels kleiner wird.

Das damit erhaltene zweite Gesetz der Drehung eines Körpers um eine freie Achse kann etwa so ausgesprochen werden:

Wirkt auf einen um eine freie Achse rotierenden Körper eine äußere Kraft ein, die die freie Achse zu drehen strebt, so ändert sich die Lage der Achse nicht im Sinne der wirkenden Kraft, wohl aber nimmt die Achse eine Präzessionsbewegung an, die rechtwinklig zur Richtung der störenden Kraft ist.

361.

Ähnlich den am Fesselschen Apparate angestellten Versuchen sind die Beobachtungen am rotierenden Kreisel.

Wenn ein solcher aufrecht auf eine glatte Unterlage gestellt wird, so bleibt er ruhig stehen; wird er schräg gestellt, so beschreibt seine Achse einen Kegelmantel in dem Sinne der Bewegung der unteren Teile des Kreisels. Diese Präzessionsbewegung bleibt bei glatter Unterlage ziemlich lange bestehen. Ist aber die Unterlage rauh, so tritt eine Verstärkung der Präzessionsbewegung ein, so daß sich der Kreisel mehr und mehr aufrichtet, ebenso wenn man die Präzessionsbewegung mit der Hand fördert; wird aber die Rotations-

geschwindigkeit langsamer oder hemmt man die Präzessionsbewegung, so neigt sich die Achse des Kreisels mehr und mehr, bis er schließlich umfällt.

362.

Wie schon in § 358 gesagt, läßt sich eine vollständige elementare Theorie der Bewegung eines starren Körpers um eine freie Achse nicht geben, doch läßt sich auch das zweite Gesetz durch die folgenden Betrachtungen erklären und veranschaulichen, wobei wir besonders den Fall ins Auge fassen, daß die horizontal gestellte Rotationsachse des Fesselschen Apparates durch ein Übergewicht Q vertikal nach unten gezogen wird. (Fig. 163.)

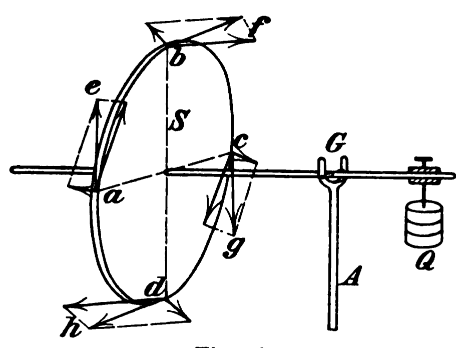


Fig. 163.

Die Bewegungsrichtung eines Punktes der rotierenden Scheibe wird in jedem Augenblicke durch die Tangente an den Kreis dargestellt; so sollen in der Figur *a e*, *b f*, *c g* und *d h* die anfänglichen Bewegungsrichtungen der Punkte *a*, *b*, *c* und *d* am Umfange der Scheibe angeben. Denkt man sich nun die Scheibe durch das Übergewicht Q ein wenig um die Achse *a c* gedreht, so ist dadurch die Bewegungsrichtung der Punkte *b* und *d* nicht gestört worden, wohl aber die der Punkte *a* und *c*. Die ursprüngliche Richtung von *a e* ist hinter die Scheibe, die Richtung von *c g* vor die Scheibe getreten. Zerlegt man die Geschwindigkeiten *a e* und *c g* in Komponenten, eine nach der Richtung der neuen Bewegung von *a* und *c*, die andere nach der darauf senkrechten Richtung, so ist die letztere Komponente von *a e* nach hinten, die von *c g* nach vorn gerichtet: beide bilden also ein Kräftepaar, das die Scheibe um die Achse *b d*, also den Apparat um die vertikale Achse A so dreht, daß Q nach vorn kommt, so daß der Apparat eine Drehbewegung im Sinne des oberen Randes *b* der Scheibe macht.

Bei dieser Drehung bleiben die Bewegungsrichtungen der Punkte *a* und *c* der Scheibe ungeändert, dagegen ändern sich jetzt die Bewegungsrichtungen der Punkte *b* und *d*, indem die ursprüngliche Bewegungsrichtung von *b* hinter, die von *d* vor die Scheibe tritt. Zerlegt man, wie vorhin *a e* und *c g*, so jetzt *b f* und *d h* in Komponenten nach der Richtung der neuen Bewegung und der darauf senkrechten Richtung, so erhält man wieder ein Kräftepaar, von dem die bei *b* wirkende Kraft nach hinten, die bei *d* wirkende nach vorn gerichtet ist, so daß das Kräftepaar die Scheibe um die Achse *a c* zu drehen sucht, somit der in dem Übergewicht *Q* wirkenden Schwerkraft entgegenwirkt und verhindert, daß die Scheibe durch das Übergewicht nach oben gezogen wird.

Indem also das Übergewicht *Q* die Scheibe emporzuheben strebt, entsteht das erste Kräftepaar, das die Präzessionsbewegung erzeugt, die Scheibe also im horizontalen Kreise dreht; durch diese Drehung entsteht das zweite Kräftepaar, das ein Heben der Scheibe verhindert.

Wird die Präzessionsbewegung mit der Hand gehindert, so kann das zweite Kräftepaar nicht entstehen; *Q* muß sinken und die Scheibe sich heben; beschleunigt man aber mit der Hand die Präzessionsbewegung, so wird das zweite Kräftepaar größer und wirkt der Schwerkraft entgegen: *S* senkt sich und das Übergewicht *Q* wird gehoben.

Die Erklärung befindet sich also in vollständiger Übereinstimmung mit der Beobachtung.

Vierundzwanzigstes Buch.

Vom Stoße der Körper.

363.

Trifft ein bewegter Körper auf einen andern Körper, den wir der Allgemeinheit wegen ebenfalls als in Bewegung befindlich voraussetzen wollen, so entsteht ein Stoß. Im Augenblicke des Zusammentreffens der Körper berühren sich beide mit je einem Teile ihrer Oberflächen und üben an diesen einen gegenseitigen Druck aufeinander aus. Diese so entstehenden Druckkräfte sind nach dem Prinzipe von

der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung (§ 47) einander gleich, aber von entgegengesetzter Richtung, die durch die Normale auf der im Augenblicke des Stoßes den Oberflächen beider Körper gemeinsamen Tangentialebene bestimmt ist und die Stoßrichtung heißt.

Geht diese Stoßrichtung durch die Schwerpunkte der beiden Körper, so heißt der Stoß zentral; geht sie nicht durch die Schwerpunkte, so heißt der Stoß exzentrisch. Beim zentralen Stoße bleibt die Bewegung der Körper eine fortschreitende, während beim exzentrischen Stoße neben den fortschreitenden Bewegungen noch drehende Bewegungen auftreten. Außerdem unterscheidet man noch geraden und schiefen Stoß, je nachdem die Stoßrichtung mit der Bewegungsrichtung beider Körper zusammenfällt oder nicht zusammenfällt.

Der Einfachheit wegen beschränken wir uns zunächst auf den zentralen Stoß, indem wir die Körper als homogene Kugeln, d. h. als Kugeln von gleichmäßiger Dichtigkeit ansehen, bei denen die Normale auf der gemeinsamen Tangentialebene stets durch den Mittelpunkt, der zugleich der Schwerpunkt ist, geht.

364.

Unter dieser Einschränkung sind die Wirkungen des Stoßes noch abhängig

1. von den Massen m_1 und m_2 beider Körper;
2. von ihren Geschwindigkeiten c_1 und c_2 und deren Richtungen;
3. davon, ob der Stoß ein gerader oder ein schiefer ist;
4. von der Elastizität beider Körper.

Das letztere bedarf noch einer kurzen Erläuterung. Wenn durch äußere Kräfte die Teilchen eines festen Körpers ein wenig aus ihrer Gleichgewichtslage entfernt werden, so treten innere Kräfte auf, die sich jener Änderung der Lage widersetzen. Ist dieser innere Widerstand den äußeren Kräften gerade entgegengesetzt gleich, so findet zwischen beiden Gleichgewicht statt. Wenn nunmehr die äußeren Kräfte zu wirken aufhören, so bleibt nur noch der innere Widerstand wirksam und durch ihn kehren die Teilchen des Körpers in die frühere Gleichgewichtslage zurück. Diese Eigenschaft der Körper heißt Elastizität. Nimmt ein Körper nach

dem Aufhören der äußeren Kräfte seine frühere Gestalt genau wieder an, so heißt er vollkommen elastisch; nimmt er sie nicht genau wieder an, sondern eine neue Gestalt, die zwischen der ursprünglichen und der durch die äußeren Kräfte bewirkten liegt, so heißt er unvollkommen elastisch; behält endlich der Körper nach dem Aufhören der äußeren Kräfte die neue durch sie erzeugte Gestalt bei, so heißt er unelastisch. Man nennt Elastizitätsgrenze den Betrag, um den die Moleküle eines Körpers höchstens verschoben werden dürfen, um nach Aufhören der äußeren Kräfte die frühere Gleichgewichtslage wieder annehmen zu können, so daß innerhalb der Elastizitätsgrenze alle Körper vollkommen elastisch sind.

In der Praxis nennt man vorzugsweise solche Körper elastisch, bei denen die Elastizitätsgrenze groß ist, wie Kautschuk, Stahl, Elfenbein, unelastisch solche, bei denen die Moleküle bei jeder größeren Verschiebung die neue Lage beibehalten oder den Zusammenhang ganz verlieren; zu ihnen gehören Blei, Wachs, nasser Ton, Säcke mit Sand.

365.

Bewegen sich nun zwei Kugeln mit den Massen m_1 und m_2 mit den gleichförmigen Geschwindigkeiten c_1 und c_2 in derselben Richtung (von m_1 nach m_2) hintereinander, so wird, wenn die Geschwindigkeit c_1 die größere ist, nach einer gewissen Zeit die Masse m_1 die Masse m_2 einholen, und es wird beim Zusammentreffen der beiden Körper zum Stoße kommen. Durch die dabei an der Berührungsfläche entstehenden Druckkräfte wird die Geschwindigkeit der Masse m_1 verkleinert, die der Masse m_2 vergrößert. Sind c'_1 und c'_2 die neuen Geschwindigkeiten der Massen m_1 und m_2, so ist $c_1 - c'_1$ die Geschwindigkeitsänderung der ersten, $c'_2 - c_2$ die Geschwindigkeitsänderung der zweiten Masse; da diese durch gleiche Kräfte in derselben Zeit hervorgebracht werden, so verhalten sie sich umgekehrt wie die Massen (§ 57), so daß die Proportion

$$(c_1 - c'_1) : (c'_2 - c_2) = m_2 : m_1$$

besteht, aus der die Gleichung folgt

$$m_1 c_1 + m_2 c_2 = m_1 c'_1 + m_2 c'_2. \tag{1}$$

Nun heißt das Produkt aus einer Masse und ihrer Geschwindigkeit die Bewegungsgröße der Masse (§ 165), wonach das in der Gleichung (1) enthaltene Gesetz ausgesprochen werden kann:

beim zentralen geraden Stoße bleibt die Summe der Bewegungsgrößen beider Massen konstant.*)

Um eine zweite Gleichung zwischen den Geschwindigkeiten beider Körper vor und nach dem Stoße zu erhalten, unterscheiden wir zwei Fälle:

a) beide Körper sind vollkommen unelastisch;

b) beide Körper sind vollkommen elastisch.

366.

Zentraler gerader Stoß unelastischer Körper. Werden die Körper als vollkommen unelastisch angesehen, so können sie sich nach dem Stoße nicht wieder voneinander trennen, sondern drücken so lange aufeinander, bis sie ihren Geschwindigkeitsunterschied ausgeglichen haben und sich nunmehr als eine einzige Masse mit gemeinsamer Geschwindigkeit weiter bewegen. Wird diese gemeinsame Geschwindigkeit mit c bezeichnet, so kommt zu der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen noch die Gleichung hinzu

$$c'_1 = c'_2 = c,$$

woraus sich für die gemeinsame Geschwindigkeit der Wert

$$c = \frac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} \tag{2}$$

ergibt.

Sind die Bewegungsrichtungen der beiden Massen vor dem Stoße nicht, wie angenommen wurde, gleich, sondern entgegengesetzt, so setze man eine der Geschwindigkeiten, etwa c_2, negativ, wodurch (2) übergeht in

$$c = \frac{m_1 c_1 - m_2 c_2}{m_1 + m_2}; \tag{2'}$$

hierin ist nun c positiv oder negativ, je nachdem $m_1 c_1$ größer oder kleiner als $m_2 c_2$ ist. Bewegen sich daher beide Kugeln

*) Dieses Gesetz, wie die Theorie des Stoßes überhaupt, wurde auf Veranlassung der Sozietät der Wissenschaften zu London zuerst (1668) von dreien ihrer Mitglieder Wallis, Wren und Huyghens gleichzeitig aufgestellt und von Morin (1840) in ausführlicher Weise bestätigt.

gegeneinander, so ist die Bewegung der vereinigten Kugeln nach dem Stoße gleichgerichtet der Bewegung derjenigen Kugel, die die größere Bewegungsgröße hatte.

367.

Besondere Fälle.

I. Sind die Massen beider Kugeln einander gleich, $m_1 = m_2$, so ist die Geschwindigkeit der vereinigten Kugeln

$c = \frac{1}{2}(c_1 + c_2)$, wenn sie sich hintereinander,

$c = \frac{1}{2}(c_1 - c_2)$, wenn sie sich gegeneinander

bewegen.

II. Ist die zweite Kugel in Ruhe, also $c_2 = 0$, so ist die Geschwindigkeit der vereinigten Kugeln

$$c = \frac{m_1 c_1}{m_1 + m_2}$$

und insbesondere, wenn gleichzeitig $m_1 = m_2$ ist, $c = \frac{1}{2} c_1$.

III. Bewegen sich beide Körper gegeneinander mit derselben Geschwindigkeit c_1, so ist die resultierende Geschwindigkeit

$$c = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot c_1$$

und, falls außerdem $m_1 = m_2$ ist,

$$c = 0.$$

Dieser Fall, $c = 0$, tritt überhaupt stets ein, wenn die Körper sich gegeneinander bewegen und gleiche Bewegungsgrößen $(m_1 c_1 = m_2 c_2)$ besitzen.

IV. Ist die Masse $m_2 = \infty$ und $c_2 = 0$, was etwa dem Stoße einer unelastischen Kugel gegen eine feste Wand entspricht, so ist

$$c = \frac{m_1 c_1}{m_1 + \infty} = 0.$$

Diese im vorstehenden aus der allgemeinen Formel abgeleiteten besonderen Fälle lassen sich leicht in Sätzen aussprechen, deren Formulierung wir dem Leser zur Übung überlassen wollen.

368.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Vergleichung der Bewegungsenergie oder Wucht der beiden aufeinander stoßenden Körper vor und nach dem Stoße.

Vor dem Stoße beträgt sie

$$E_1 = \frac{1}{2} m_1 c_1{}^2 + \frac{1}{2} m_2 c_2{}^2, \tag{3}$$

nach dem Stoße aber, wo beide Massen vereinigt sind und die gemeinsame Geschwindigkeit c besitzen,

$$E_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) c^2$$

oder, wenn man für c den Wert aus (2) einsetzt,

$$E_2 = \frac{1}{2} \frac{(m_1 c_1 \pm m_2 c_2)^2}{m_1 + m_2}, \tag{4}$$

worin das obere oder das untere Vorzeichen gilt, je nachdem die beiden Körper sich in gleichen oder entgegengesetzten Richtungen bewegen.

E_1 und E_2 sind voneinander verschieden, und zwar tritt durch den Stoß stets ein Verlust an kinetischer Energie ein, denn die aus (3) und (4) durch leichte Rechnungen sich ergebende Differenz

$$E_3 = E_1 - E_2 = \frac{1}{2} \frac{m_1 \cdot m_2}{m_1 + m_2} \cdot (c_1 \mp c_2)^2 \tag{5}$$

ist stets positiv.

Auf den ersten Blick ist dieser Energieverlust im Widerspruche mit dem Prinzipe von der Erhaltung der Energie; es geht kinetische Energie verloren, ohne daß sie in unmittelbar wahrnehmbare potentielle Energie verwandelt würde. Der Verlust ist aber nur ein scheinbarer, denn er wird zur Deformation der unelastischen Kugeln und, wie in der Wärmelehre gezeigt wird, damit verbundener Temperaturerhöhung verbraucht.

Die von der Energie E_1 geleistete Arbeit besteht also nicht nur in der gemeinsamen Fortbewegung der vereinigten Massen nach dem Stoße, sondern auch in dauernden Formänderungen der beiden Körper und Erhöhung ihrer Temperatur.

Ist $c = 0$, so ist $E_2 = 0$, und es wird dann die gesamte

Bewegungsenergie E_1 zu den angegebenen physikalischen Vorgängen verbraucht.

369.

Einige Folgerungen aus dem vorigen Paragraphen sind für die Praxis von besonderer Bedeutung.

Ist die gestoßene Masse in Ruhe, also $c_2 = 0$, so ist die Bewegungsenergie vor dem Stoße

$$(3') \qquad E_1 = \frac{1}{2} m_1 \, c_1{}^2;$$

sie zerfällt nach dem Stoße in die Bewegungsenergie

$$(4') \qquad E_2 = \frac{1}{2} \frac{m_1{}^2 c_1{}^2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} m_1 \, c_1{}^2 \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{m_2}{m_1}} \right)$$

und in die Deformationsarbeit

$$(5') \qquad E_3 = \frac{1}{2} \frac{m_1 \, m_2 \, c_1{}^2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{2} m_1 \, c_1{}^2 \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \right).$$

Es wird also

E_2 um so größer und E_3 um so kleiner, je kleiner das Verhältnis $\frac{m_2}{m_1}$ ist, aber

E_2 um so kleiner und E_3 um so größer, je größer das Verhältnis $\frac{m_2}{m_1}$ ist.

Je nach der Absicht, die man in praktischen Anwendungen mit dem Stoße erreichen will, hat man daher das Verhältnis $\frac{m_2}{m_1}$ zu wählen. Handelt es sich um Erzeugung von Bewegung, wie beim Einrammen eines Pfahles, beim Einschlagen eines Nagels u. dergl., so muß $\frac{m_2}{m_1}$ möglichst klein, d. h. die stoßende (bewegte) Masse im Verhältnis zur gestoßenen (ruhenden) möglichst groß gemacht werden. Ist aber Formänderung die beabsichtigte Wirkung des Stoßes, wie z. B. beim Schmieden, so muß $\frac{m_2}{m_1}$ möglichst groß, d. h. die stoßende (bewegte) Masse (der Hammer) möglichst klein im Verhältnis zur gestoßenen (ruhenden) Masse (dem Amboß) gemacht werden.

370.

Zentraler Stoß vollkommen elastischer Körper. Sind beide Körper vollkommen elastisch, so besteht der Stoß der Masse m_1 mit der Geschwindigkeit c_1 auf die Masse m_2 mit der Geschwindigkeit c_2 aus zwei Teilen. Im ersten Teile findet ein Zusammendrücken beider Körper so lange statt, bis beide Körper eine gemeinschaftliche Geschwindigkeit x haben, denn erst dann, wenn die Geschwindigkeit die gleiche geworden ist, fällt die Ursache für ein weiteres Zusammendrücken fort. Bis jetzt hat die Masse m_1 die Geschwindigkeit $c_1 - x$ verloren, die Masse m_2 die Geschwindigkeit $x - c_2$ gewonnen. Bis zu diesem Augenblicke ist der Vorgang so wie bei den unelastischen Körpern. Nun beginnt aber der zweite Teil der Stoßwirkung: In dem Augenblicke, wo die größte Zusammendrückung der Massen erfolgt ist, beginnen diese sich wieder zufolge ihrer vollkommenen Elastizität auszudehnen und suchen ihre frühere Gestalt wieder anzunehmen mit einer Kraft die genau so groß ist wie die auf ihr Zusammendrücken verwendete.

Die Wirkung dieser elastischen Kräfte auf die Änderung der Geschwindigkeit ist daher genau dieselbe wie vorher beim Zusammendrücken, wiewohl jetzt die Körper voneinander entfernt werden, während sie früher einander genähert wurden. Es erleidet also die stoßende Masse m_1 nochmals den Geschwindigkeitsverlust $c_1 - x$, während der Geschwindigkeitszuwachs für die gestoßene Masse nochmals $x - c_2$ beträgt.

Daher sind die Geschwindigkeiten der Massen am Ende des Stoßes

$$c_1' = c_1 - 2\,(c_1 - x) = 2x - c_1$$
$$c_2' = c_2 + 2\,(x - c_2) = 2x - c_2,$$

woraus durch Subtraktion die Gleichung

$$c_1' - c_2' = c_2 - c_1$$

oder

$$c_1' + c_1 = c_2' + c_2$$

folgt. Letztere Gleichung kann in dem Satze ausgesprochen werden:

Beim Stoße vollkommen elastischer Körper ist die Summe aus den Geschwindigkeiten vor und nach

dem Stoße bei dem einen Körper gleich derselben Summe bei dem andern Körper.

371.

Verbinden wir nunmehr die im vorigen Paragraphen abgeleitete Gleichung mit der Gleichung (1) des § 365, so folgen aus dem Gleichungssysteme

$$(6) \qquad \begin{aligned} m_1 c_1' + m_2 c_2' &= m_1 c_1 + m_2 c_2 \\ c_1' - c_2' &= c_2 - c_1 \end{aligned}$$

für die Unbekannten c_1' und c_2' leicht die Werte

$$(7) \qquad \begin{cases} c_1' = \dfrac{(m_1 - m_2)\, c_1 + 2\, m_2\, c_2}{m_1 + m_2} \\[2ex] c_2' = \dfrac{(m_2 - m_1)\, c_2 + 2\, m_1\, c_1}{m_1 + m_2}, \end{cases}$$

denen man auch die Formen

$$(7') \qquad \begin{cases} c_1' = c_1 - \dfrac{2\, m_2\, (c_1 - c_2)}{m_1 + m_2} = 2\, \dfrac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} - c_1 \\[2ex] c_2' = c_2 + \dfrac{2\, m_1\, (c_1 - c_2)}{m_1 + m_2} = 2\, \dfrac{m_1 c_1 + m_2 c_2}{m_1 + m_2} - c_2 \end{cases}$$

geben kann.

Es bedarf wohl kaum der Bemerkung, daß auch hier, falls die Bewegungsrichtungen der Körper nicht gleiche, sondern entgegengesetzte sind, die eine Richtung als negative einzuführen ist.

372.

Besondere Fälle.

I. Sind die Massen beider Kugeln einander gleich $m_1 = m_2$, so ergeben die Formeln (7)

$$c_1' = c_2; \; c_2' = c_1;$$

gleiche elastische Kugeln tauschen also beim Stoße ihre Geschwindigkeiten aus.

Bewegen sich die Kugeln vor dem Stoße in derselben Richtung, so bleibt ihre Bewegungsrichtung dieselbe auch nach dem Stoße; waren aber ihre Bewegungsrichtungen vor dem Stoße entgegengesetzt, so sind sie es auch nach dem Stoße, d. h. die Kugeln prallen beim Stoße voneinander ab,

jede bewegt sich entgegen ihrer früheren Bewegungsrichtung, und zwar mit derjenigen Geschwindigkeit, die die andere Kugel vor dem Stoße hatte.

II. Ist die zweite Kugel in Ruhe, also $c_2 = 0$, so hat man drei Fälle zu unterscheiden, die durch das Verhältnis der Massen der beiden Kugeln bedingt sind.

A. $m_1 = m_2$; es wird $c_1' = 0$; $c_2' = c_1$,

d. h. stößt eine elastische Kugel auf eine gleiche ruhende, so bleibt die stoßende in Ruhe und die gestoßene erhält die Geschwindigkeit der stoßenden.

B. $m_2 > m_1$; es wird

$$c_1' = \frac{(m_1 - m_2)\, c_1}{m_1 + m_2}, \text{ also negativ;}$$

$$c_2' = \frac{2\, m_1\, c_1}{m_1 + m_2};$$

die stoßende Kugel nimmt daher eine rückwärts gehende Bewegung an, während die gestoßene sich vorwärts bewegt, und zwar mit einer Geschwindigkeit, die kleiner ist als die ursprüngliche der stoßenden.

C. $m_1 > m_2$; es ist wie vorhin

$$c_1 = \frac{(m_1 - m_2)\, c_1}{m_1 + m_2}; \qquad c_2' = \frac{2\, m_1\, c_1}{m_1 + m_2};$$

die Kugel m_1 behält also eine positive Geschwindigkeit, die aber kleiner ist als ihre ursprüngliche, während die Kugel m_2 eine positive Geschwindigkeit erhält, die größer ist als die ursprüngliche der Kugel m_1.

III. Ist die Masse $m_2 = \infty$ und $c_2 = 0$, so wird

$$c_1' = -c_1, \; c_2' = 0;$$

d. h. stößt eine elastische Kugel mit geradem Stoße gegen eine feste elastische Wand, so prallt sie ab und kehrt mit der früheren Geschwindigkeit zurück.

373.

Schreibt man die Gleichungen (6) des § 371 in der Form

$$\begin{aligned} m_1 (c_1' - c_1) &= m_2 (c_2 - c_2') \\ c_1' + c_1 &= c_2 + c_2', \end{aligned}$$

so folgt aus ihnen durch Multiplikation

$$m_1 (c_1'^2 - c_1^2) = m_2 (c_2^2 - c_2'^2),$$

woraus leicht, wenn man zu allen Gliedern den Faktor $\frac{1}{2}$ hinzufügt, die Gleichung

$$(8) \qquad \frac{1}{2} m_1 c_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 c_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 c_1^2 + \frac{1}{2} m_2 c_2^2$$

sich ergibt, die aussagt, daß beim zentralen geraden Stoße elastischer Körper die Bewegungsenergie vor und nach dem Stoße dieselbe ist, daß also kein Energieverlust eintritt.

Man kann dies auch daraus schließen, daß die in dem ersten Teile des Stoßes geleistete Deformationsarbeit im zweiten Teile des Stoßes durch die elastischen Kräfte wieder vollständig in Bewegungsenergie umgewandelt wurde.

374.

Sind beliebig viele gleiche elastische Kugeln an gleich langen Fäden so aufgehängt, daß ihre Mittelpunkte in einer geraden Linie liegen und je zwei einander berühren [Mariottes Stoß- oder Perkussionsmaschine], und läßt man die äußere Kugel auf einem (etwa dem linken) Ende der Reihe mit der Geschwindigkeit c auf die Reihe stoßen, so gibt jede Kugel ihre erhaltene Geschwindigkeit an die nächstfolgende ab (§ 372 II. A.) und bleibt selbst in Ruhe. Der Erfolg des Stoßes ist also der, daß alle Kugeln in Ruhe bleiben und nur die letzte rechts die Bewegung der ersten mit der Geschwindigkeit c fortsetzt.

Bringt man am linken Ende die ersten zwei (drei, vier, ...) sich berührenden Kugeln aus der Gleichgewichtslage und läßt sie zentral gegen die Reihe der übrigen stoßen, so müssen am rechten Ende die letzten zwei (drei, vier, ...) Kugeln gleichzeitig abspringen. Denn die zweite der beiden ersten Kugeln stößt zuerst und bleibt liegen, erhält aber in demselben Augenblicke wieder einen Stoß von der ersten.

Läßt man gleichzeitig die beiden Endkugeln links und rechts auf die Reihe mit verschiedenen Geschwindigkeiten stoßen, so vertauschen sie ihre Geschwindigkeiten, und die übrigen Kugeln bleiben in Ruhe. Die beiden Stöße sind

also, ohne sich gegenseitig zu stören, gleichzeitig durch die ganze Kugelreihe hindurch gegangen.

Sind die Massen der Kugeln nicht gleich, sondern nehmen sie z. B. in geometrischer Progression mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$ ab, so erhält die zweite Kugel von der ersten nach § 372 II. C., wenn man $m_2 = \frac{1}{2} m_1$ setzt, $\frac{4}{3}$ von der Geschwindigkeit der ersten, also die Geschwindigkeit $\frac{4}{3} c$, wenn c die Geschwindigkeit der ersten war; ebenso erhält die dritte $\frac{4}{3}$ von der Geschwindigkeit der zweiten, also die Geschwindigkeit $\left(\frac{4}{3}\right)^2 c$ usw. Bei n Kugeln ist die Geschwindigkeit c' der letzten

$$c' = \left(\frac{4}{3}\right)^{n-1} \cdot c.$$

Hätte man z. B. $n = 50$ homogene Kugeln aus gleichem Stoffe, und wäre $c = 1 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$, so wäre

$$c' = 1324500 \frac{\text{m}}{\text{sec}} = 1324{,}5 \frac{\text{km}}{\text{sec}};$$

die letzte Kugel würde also in etwa $\frac{3}{4}$ sec den Weg von Köln nach Königsberg (1000 km) durcheilen.

Wäre aber der Durchmesser der kleinsten Kugel nur 1 mm, so müßte, weil bei homogenen Kugeln die Massen den Inhalten proportional sind, der Durchmesser der größten Kugel

$$(\sqrt[3]{2})^{49} = 82540 \text{ mm} = 82{,}540 \text{ m}$$

sein.

375.

Schiefer Stoß. Zur Bestimmung der Wirkungen des schiefen Stoßes zweier Körper muß man die Geschwindigkeit, die jeder Körper im Augenblicke des Zusammenstoßes hat, in zwei aufeinander senkrechte Komponenten zerlegen, von denen die eine in die Stoßrichtung fällt. Für diese ersteren

Komponenten gelten dann die Gesetze des Stoßes und die daraus sich ergebenden Geschwindigkeiten setzen sich mit den zur Stoßrichtung senkrechten Komponenten der ursprünglichen Geschwindigkeiten zu den aus dem schiefen Stoße resultierenden Geschwindigkeiten zusammen.

Wir beschränken uns auf folgende spezielle Fälle, deren Resultate von besonderem Interesse sind:

I. Stoss einer elastischen Kugel unter einem spitzen Winkel gegen eine vollkommen elastische Wand. Die Geschwindigkeit der Kugel $c = BA = AC$ (Fig. 164) wird in die Komponenten AD senkrecht und AE parallel zur Wand zerlegt. Erstere Komponente wird nach § 372, III) an der elastischen Wand in die entgegengesetzte AF umgewandelt, worauf sich aus AE und AF die resultierende Geschwindigkeit AG zusammensetzt.

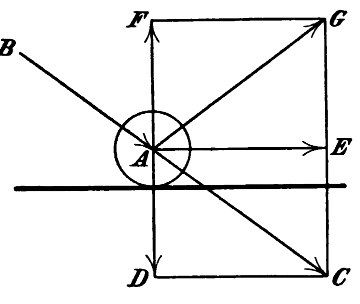


Fig. 164.

Nennt man $\sphericalangle BAF$ den Einfallswinkel, $\sphericalangle GAF$ den Reflexionswinkel, so gilt, wie unmittelbar aus der Figur abzulesen ist, für unsern Fall das Gesetz:

Eine elastische schief auf eine elastische Wand stoßende Kugel prallt an der Wand mit unveränderter Geschwindigkeit nach der entgegengesetzten Seite zurück, so daß der Einfallswinkel gleich dem Reflexionswinkel ist.

II. Stoß einer elastischen Kugel auf eine gleich große ruhende elastische Kugel.

Eine elastische Kugel A (Fig. 165) stoße auf eine ruhende B unter dem gegen die Stoßrichtung AB geneigten Winkel α mit der Geschwindigkeit $c = AC$. Diese Geschwindigkeit zerlege man in die Komponenten $AD = c \cdot \cos\alpha$ nach der Stoßrichtung und $AE = c \cdot \sin\alpha$ senkrecht darauf. Infolge des Stoßes tauschen die Kugeln ihre Geschwindigkeiten aus, also geht die Kugel B mit der Geschwindigkeit $c \cdot \cos\alpha$ in der Richtung

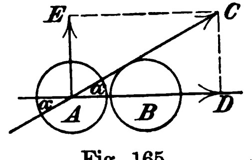


Fig. 165.

des Stoßes fort, während A nur in dazu senkrechter Richtung die Geschwindigkeit $c \cdot \sin \alpha$ hat; die Kugeln gehen daher unter rechtem Winkel auseinander.

376.

Der unvollkommen elastische Stoß. Da es in der Wirklichkeit weder vollkommen elastische noch vollkommen unelastische Körper gibt, so gelten die entwickelten Gesetze nur für ideale Körper, kommen aber, wie Beobachtungen gezeigt haben, der Wirklichkeit sehr nahe.

Bei den realen unvollkommen elastischen Körpern tritt keine vollständige Wiederherstellung der früheren Form ein, so daß die Geschwindigkeitsänderung während der Zeit der Ausdehnung der Körper nicht ganz so groß wie die Geschwindigkeitsänderung während der Zeit des Zusammendrückens ist. Die Geschwindigkeitsänderung des stoßenden Körpers liegt daher zwischen $c_1 - x$ und $2(c_1 - x)$, die des gestoßenen zwischen $x - c_2$ und $2(x - c_2)$, oder sie ist, wenn ε eine zwischen 1 und 2 liegende Zahl bedeutet,

$\varepsilon (c_1 - x)$ für den stoßenden,
$\varepsilon (x - c_2)$ für den gestoßenen

Körper, so daß die neuen Geschwindigkeiten sind

$$c'_1 = c_1 - \varepsilon (c_1 - x) = \varepsilon x - (\varepsilon - 1) c_1$$
$$c'_2 = c_2 + \varepsilon (x - c_2) = \varepsilon x - (\varepsilon - 1) c_2,$$

woraus

$$c'_1 - c'_2 = (\varepsilon - 1)(c_2 - c_1) = \delta (c_2 - c_1)$$

folgt; hierin ist $\delta = \varepsilon - 1$ ein echter Bruch. Die Verbindung dieser Gleichung mit der allgemeinen Gleichung (1) liefert die Geschwindigkeiten c'_1 und c'_2 nach dem Stoße. Wir müssen uns jedoch auf diese Andeutungen beschränken.

377.

Bewegen sich, wie wir im § 363 angenommen haben, zwei Massen m_1 und m_2 mit den Geschwindigkeiten c_1 und c_2 hintereinander her, und haben sie in einem bestimmten Zeitpunkte von einem festen Punkte O die Entfernungen r_1 und r_2, so ist die Entfernung ϱ ihres Schwerpunktes von O durch die Gleichung

$$(m_1 + m_2) \cdot \varrho = m_1 \cdot r_1 + m_2 \cdot r_2$$

bestimmt. Mit den Massen wird sich auch ihr Schwerpunkt

bewegen, und zwar sei c seine Geschwindigkeit in dem betrachteten Zeitpunkte. Ist nun τ ein sehr kleines Zeitelement, in dem die Geschwindigkeiten c, c_1 und c_2 unveränderlich angesehen werden können, so hat sich in diesem der Schwerpunkt um die Strecke $c \cdot \tau$, die Massenpunkte m_1 und m_2 um die Strecken $c_1 \cdot \tau$ und $c_2 \cdot \tau$ von O entfernt, so daß die den Schwerpunkt bestimmende Gleichung jetzt lautet $(m_1 + m_2) \cdot (\varrho + c \cdot \tau) = m_1 \cdot (r_1 + c_1 \cdot \tau) + m_2 \cdot (r_2 + c_2 \cdot \tau)$. Subtrahiert man von dieser Gleichung die vorige, so ergibt sich nach Wegheben des allen Gliedern gemeinsamen Faktors τ

$$(m_1 + m_2) \cdot c = m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2,$$

woraus

$$c = \frac{m_1 \cdot c_1 + m_2 \cdot c_2}{m_1 + m_2}$$

folgt.

Stoßen nun die beiden Massen aufeinander, so wird in dieser Gleichung durch den Stoß weder der Zähler noch der Nenner geändert, so daß auch c unverändert bleibt, woraus der Satz folgt: durch den Stoß wird die Bewegung des gemeinsamen Schwerpunktes zweier Massen nicht geändert.

Anm. Dieser Satz bildet einen Spezialfall eines ganz allgemeinen Lehrsatzes der Mechanik, der das Prinzip von der Erhaltung des Schwerpunktes heißt. Andere Spezialfälle dieses Gesetzes sind die folgenden: Bewegen sich zwei Körper geradlinig gegeneinander oder voneinander weg, und wird ihre geradlinige Bewegung durch nichts gestört, so bleibt ihr Schwerpunkt in Ruhe. Würden z. B. beim Abfeuern eines Geschützes die Bewegungen des Geschützes und des Geschosses nicht durch den Reibungswiderstand der Luft gestört, so bliebe ihr gemeinsamer Schwerpunkt immer an derselben Stelle. — Platzt eine abgeschossene Granate, so beschreibt der gemeinsame Schwerpunkt der einzelnen Sprengstücke die ursprüngliche parabolische Bahn des ganzen Geschosses ungestört weiter.

378.

Der exzentrische Stoß. Von dieser schwierigen und verwickelten Art der Stoßwirkung wollen wir nur eine spezielle

Aufgabe näher betrachten und auch noch unter Voraussetzungen, die die Aufgabe wesentlich vereinfachen: Es werde ein scheibenförmiger Körper, dessen Masse m und dessen Schwerpunkt S sei, durch eine Stoßkraft in einem Punkte A getroffen, der die Entfernung d vom Schwerpunkte hat (Fig. 166).

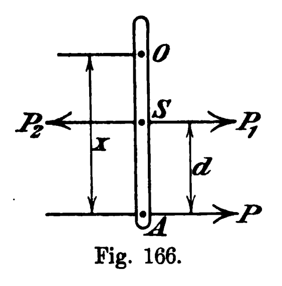


Fig. 166.

Denken wir uns im Schwerpunkte S die beiden gleichen und entgegengesetzten Kräfte P_1 und P_2 (beide gleich P) hinzugefügt, so tritt an Stelle von P die Kraft P_1, die der Scheibe eine fortschreitende Bewegung erteilt, und das Kräftepaar P_2, P am Arme d, das wir durch ein Kräftepaar $(+\frac{1}{2}P, -\frac{1}{2}P)$ am Arme $2d$ ersetzen können, und das eine Drehbewegung der Scheibe um den Schwerpunkt erzeugt.

Da die Stoßkraft nur eine momentan wirkende ist, so ist die Geschwindigkeit der fortschreitenden Bewegung

$$v = \frac{P}{m}$$

und die Winkelgeschwindigkeit der rotierenden Bewegung um den Schwerpunkt

$$\omega = \frac{P \cdot d}{\mathfrak{T}_s},$$

wobei $\mathfrak{T}_s$ das Trägheitsmoment der Scheibe in bezug auf eine Schwerpunktsachse bedeutet.

Die aus beiden Bewegungen resultierende Bewegung wird eine Drehung um eine durch O gehende horizontale Achse sein, wobei x den Abstand von O und A bedeute.

Nach § 331 kann aber die Drehungsenergie um diese Achse in zwei Teile zerlegt werden, von denen der eine, $\frac{1}{2} M \cdot (a\,\omega)^2$, die Energie der fortschreitenden Bewegung des Schwerpunktes ist. Es ist also in unserem Falle, wo $a = x - d$ ist,

$$\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \left((x - d)\,\omega\right)^2$$

oder

$$(x - d)\,\omega = v;$$

setzt man die Werte von v und ω ein, so erhält man

$$(x - d) \cdot \frac{P \cdot d}{\mathfrak{T}_s} = \frac{P}{m},$$

woraus

$$x = d + \frac{\mathfrak{T}_s}{m \cdot d}$$

folgt. Man nennt den durch x bestimmten Punkt O den Mittelpunkt des Stoßes. Ein Vergleich mit § 351 zeigt, daß der Mittelpunkt des Stoßes mit dem Schwingungspunkte eines physischen Pendels in naher Beziehung steht. Es entspricht nämlich der Schwingungspunkt dem Angriffspunkte des Stoßes, wenn der Stoßmittelpunkt dem Aufhängepunkte entspricht.

Denken wir uns die sonst freie durch O gehende Achse fest, so folgt aus dem Vorigen, daß diese Achse durch den Stoß keinen Prall erleiden würde.

Beispiel. Wäre der gestoßene Körper eine homogene Stange von der Länge l und der Masse m und würde sie an einem Ende durch eine Stoßkraft getroffen, so wäre die Entfernung des Stoßmittelpunktes von diesem Ende

$$x = \frac{l}{2} + \frac{\frac{1}{12} m \,.\, l^2}{m \,.\, \frac{l}{2}} = \frac{l}{2} + \frac{l}{6} = \frac{2}{3} l.$$

379.

Das ballistische Pendel. Zur angenäherten Bestimmung der Geschwindigkeit von Geschützkugeln benutzte man früher nach Robins Vorschlage das ballistische Pendel. Es war dies ein mehrere Zentner schwerer mit Eisenblech beschlagener Holzblock oder auch eine Holzkiste, die mit Ton oder einer andern weichen Masse ausgefüllt wurde und wie ein Pendel an einem starken Gestelle um eine horizontale Achse drehbar aufgehängt war.

Gegen dieses ruhende Pendel wurde nun aus dem nahe davor stehenden Geschütze eine Kugel in horizontaler Richtung abgeschossen, die, um die Achse zu schonen, möglichst nahe durch den Mittelpunkt des Stoßes gehen muß, und dadurch das Pendel zum Ausschlagen gebracht. Die Größe

des ersten Ausschlagswinkels zeigte dabei eine unten am Pendel angebrachte Spitze an, die in einer mit weichem Wachse ausgegossenen Rinne lief und die Bewegung sichtbar machte.

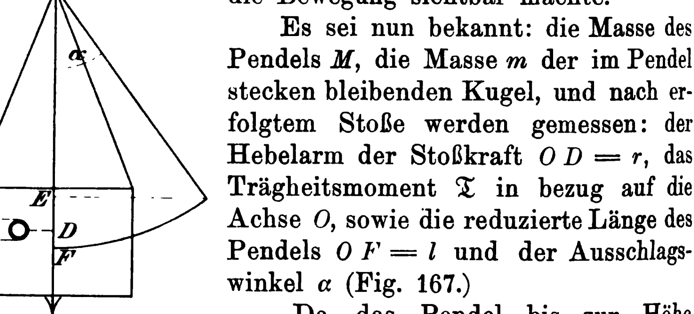


Fig. 167.

Es sei nun bekannt: die Masse des Pendels M, die Masse m der im Pendel stecken bleibenden Kugel, und nach erfolgtem Stoße werden gemessen: der Hebelarm der Stoßkraft $O\,D = r$, das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}$ in bezug auf die Achse O, sowie die reduzierte Länge des Pendels $O\,F = l$ und der Ausschlagswinkel α (Fig. 167.)

Da das Pendel bis zur Höhe

$$E\,F = h = l \cdot (1 - \cos\alpha) = 2\,l\,.\,\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

steigt, so muß seine Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{2\,g\,h} = 2\,.\,\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{g\,.\,l}$$

sein.

Reduziert man die Masse M auf den Punkt D, so ist diese Masse gleich $\frac{\mathfrak{T}}{r^2}$, und ist c die anfängliche Geschwindigkeit der Geschoßkugel, so ist die gemeinsame Geschwindigkeit v' von Pendel und Kugel nach dem Stoße

$$v' = \frac{m\,.\,c}{\frac{\mathfrak{T}}{r^2} + m} = \frac{m\,.\,r^2\,.\,c}{\mathfrak{T} + m\,r^2}.$$

Die Geschwindigkeiten v und v' verhalten sich aber wie die Entfernungen $O\,F$ und $O\,D$ von der Achse, also gilt

$$\frac{m\,.\,r^2\,.\,c}{\mathfrak{T} + m\,r^2} : 2\,.\,\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{g\,.\,l} = r : l,$$

und hieraus folgt

$$c = 2\,.\,\sin\frac{\alpha}{2}\left(\frac{\mathfrak{T} + m\,r^2}{m\,r}\right)\cdot\sqrt{\frac{g}{l}}.$$

Wäre z. B. das Gewicht der Kugel 3 kg, $\mathfrak{T} = 1500$, $m = \frac{3}{9{,}81}$, $r = 1{,}3$ m; $l = 1{,}35$ m, $\alpha = 21^0$, so wäre $c = 3708{,}3\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

Aufgaben.

240. Zwei unelastische Kugeln, die 6 kg und 3 kg wiegen, bewegen sich mit den Geschwindigkeiten 20 $\frac{m}{sec}$ und 40 $\frac{m}{sec}$ gegeneinander. Wie groß ist ihre gemeinsame Geschwindigkeit nach dem Stoße?

Antw.: 0.

241. Zwei unelastische Kugeln von 20 kg und 30 kg Gewicht bewegen sich hintereinander mit den Geschwindigkeiten 100 $\frac{m}{sec}$ und 50 $\frac{m}{sec}$; wie groß ist ihre Geschwindigkeit nach dem Stoße, und wie groß der Verlust an Energie?

Antw.: 70 $\frac{m}{sec}$; 1530 mkg.

242. Wie lauten die Ergebnisse der vorigen Aufgabe, wenn sich die Körper gegeneinander bewegen?

Antw.: 10 $\frac{m}{sec}$; 13760 mkg.

243. Ein Körper von 10 kg Gewicht stößt mit der Geschwindigkeit 15 $\frac{m}{sec}$ auf einen ruhenden Körper von 30 kg Gewicht; welches ist die Geschwindigkeit beider Körper nach dem Stoße, und wie groß der durch den Stoß bewirkte Energieverlust?

Antw.: 3,75 $\frac{m}{sec}$; 86 mkg.

244. Zwei unelastische Körper wiegen zusammen 50 kg; beide bewegen sich gegeneinander, der eine mit 8 $\frac{m}{sec}$, der andere mit 12 $\frac{m}{sec}$ Geschwindigkeit; nach dem Stoße haben sie die Geschwindigkei 2 $\frac{m}{sec}$ in der Bewegungsrichtung des zweiten Körpers; wieviel wiegt jeder Körper?

Antw.: 25 kg.

245. Ein unelastischer Körper von 4 kg Gewicht stößt mit 3 $\frac{m}{sec}$ auf einen zweiten ihm mit 6 $\frac{m}{sec}$ Geschwindigkeit entgegenkommenden; wie schwer muß der zweite sein, wenn die Geschwindigkeit beider nach dem Stoße a) 0; b) 1 $\frac{m}{sec}$ sein soll?

Antw.: a) 2 kg; b) $1^1/_7$ kg oder $3^1/_5$ kg.

246. Zwei unelastische Körper von 2 kg und 8 kg Gewicht bewegen sich gegeneinander; die erstere hat die Geschwindigkeit 10 $\frac{m}{sec}$; wie groß ist die Geschwindigkeit des zweiten Körpers, wenn beide sich nach dem Stoße mit 2 $\frac{m}{sec}$ Geschwindigkeit in der Richtung des ersteren bewegen?

Antw.: 0.

247. Zwei vollkommen elastische Körper von 6 kg und 4 kg Gewicht bewegen sich mit 10 $\frac{m}{sec}$ und 8 $\frac{m}{sec}$ Geschwindigkeit hintereinander; wie groß sind ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße?

Antw.: 8,4 $\frac{m}{sec}$; 10,4 $\frac{m}{sec}$.

248. Wie heißen die Ergebnisse der vorigen Aufgabe, wenn die Körper sich gegeneinander bewegen?

Antw.: — 4,4 $\frac{m}{sec}$; + 13,6 $\frac{m}{sec}$.

249. Wie groß sind die Geschwindigkeiten beider Körper nach dem Stoße, wenn der erstere 8 $\frac{m}{sec}$ und der zweite 10 $\frac{m}{sec}$ Geschwindigkeit hatte und die Bewegung a) hintereinander; b) gegeneinander stattfand?

Antw.: a) 9,6 $\frac{m}{sec}$; 7,6 $\frac{m}{sec}$; b) — 6,4 $\frac{m}{sec}$; 11,6 $\frac{m}{sec}$.

250. Mit welcher Geschwindigkeit muß eine 0,5 kg schwere elastische Kugel auf eine 0,3 kg schwere stoßen, die mit der Geschwindigkeit 3 $\frac{m}{sec}$ ihr entgegenkommt, damit die erstere nach dem Stoße in Ruhe bleibt? Wie groß ist die Geschwindigkeit der zweiten Kugel nach dem Stoße?

Antw.: 9 $\frac{m}{sec}$; 12 $\frac{m}{sec}$.

251. Von zwei vollkommen elastischen Kugeln, die sich mit gleichen Geschwindigkeiten c gegeneinander bewegen, ist die erstere dreimal so schwer als die andere; wie groß sind ihre Geschwindigkeiten nach dem Stoße?

Antw.: 0; $2c$.

Fünfundzwanzigstes Buch.

Von den Hindernissen der Bewegung.

380.

Schon mehrmals ist auf Hindernisse hingewiesen worden, die sich der Bewegung der Körper entgegenstellen.

Nach dem Prinzipe der Trägheit müßte jeder Körper, der durch irgendeine Kraft in Bewegung versetzt worden ist, sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit in gerader Linie bis ins Unendliche bewegen, wenn nicht neue äußere Kräfte auf ihn einwirkten, in der Wirklichkeit aber sehen wir jede Bewegung nach und nach zur Ruhe kommen; die Bewegungsenergie des Körpers geht allmählich verloren, ohne daß neue sichtbare Arbeit geleistet worden wäre.

Diese alltägliche Erfahrung findet ihren Grund und ihre Erklärung in dem Auftreten von Hindernissen oder Widerständen, die die Bewegung der Körper hemmend beeinflussen.

Solcher Bewegungshindernisse unterscheidet man gewöhnlich drei Arten:

1. die Reibung, die auftritt überall da, wo sich ein Körper an einem andern bewegt;
2. den Widerstand des Mittels (des Wassers, der Luft etc.), in dem sich der Körper bewegt;
3. die Steifigkeit der Seile, die bei der Übertragung der Bewegung von einem Körper auf einen andern in Frage kommt.

381.

Soll ein Körper auf oder an einem andern Körper fortbewegt werden, z. B. ein Körper auf einer schiefen Ebene, so tritt ein Widerstand gegen diese Bewegung auf, die man Reibung (Friktion) nennt. Diese Reibung rührt teils aus der Adhäsion der einander berührenden Oberflächenteile beider Körper her, größtenteils aber aus der Unebenheit dieser Oberflächen, indem selbst bei den bestpolierten Körpern immer noch kleine Erhöhungen und Vertiefungen ineinander

greifen, so daß der zu bewegende Körper von seiner Unterlage gleichsam festgehalten wird. Bei der Bewegung muß also die Adhäsion überwunden werden, und es müssen die hervorragenden Teile beider Körper teils zur Seite gebogen, teils abgebrochen, teils übereinander weggehoben werden. Die Reibung ist die Gesamtheit dieser sich aus Adhäsion, Elastizität und Schwere zusammensetzenden Widerstände und muß als eine Kraft betrachtet werden, die der Richtung der stattfindenden oder beabsichtigten Bewegung entgegen und parallel der Berührungsfläche der Körper wirkt.

Daß diese Kraft bedeutend sein kann, sieht man daraus, daß ein Schiff durch die bloße Reibung eines Seiles, das ohne Knoten nur einige Male um einen Pfahl gewickelt ist, festgehalten wird.

382.

Arten der Reibung. Man unterscheidet zweierlei Arten von Reibung:

1. die gleitende, wenn ein Körper auf seiner Unterlage fortgezogen oder fortgeschoben wird, so daß alle seine Punkte gleiche und parallele Wege zurücklegen;

2. die rollende oder wälzende, wenn ein Körper z. B. eine Walze oder ein Rad auf einer Unterlage fortrollt, also eine drehende Bewegung ausführt, bei der immer neue Teile des Körpers mit seiner Unterlage in Berührung kommen.

Ein besonderer Fall der gleitenden Reibung ist die Zapfenreibung oder drehende Reibung, die entsteht, wenn ein zylindrischer Zapfen sich in seinen Lagern dreht.

Wegen des verwickelten Ursprunges der Reibung gibt es keine allgemein gültigen Gesetze derselben; nur von der gleitenden Reibung sind einige genauere, auf empirischem Wege gefundene Gesetze bekannt, die zunächst mitgeteilt seien.

383.

Gesetze der gleitenden Reibung. 1. Die Reibung ist dem Drucke der beiden Körper gegeneinander proportional.

2. Die Reibung ist bei gleichem Drucke unabhängig von der Größe der einander reibenden Flächen.

3. Die Reibung ist bei dem Übergange aus der Ruhe in die Bewegung größer als während der Bewegung; ist der Körper aber einmal in Bewegung, so ist sie innerhalb gewisser Grenzen unabhängig von der Geschwindigkeit, mit der sich der Körper bewegt.

4. Die Reibung ist für verschiedene Körper sehr ungleich; sie ist bei gleichartigen Körpern größer als bei ungleichartigen; sie ist um so größer, je weicher und rauher die aneinander gleitenden Körper sind.

384.

Das erste der im vorigen Paragraphen angegebenen Gesetze wurde durch Coulomb*) durch folgende einfache Experimente mit Hilfe des in Fig. 168 skizzierten, von ihm Tribometer genannten Apparates bestätigt.

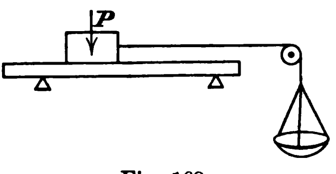


Fig. 168.

Auf zwei horizontalen Schienen liegt ein Kästchen mit ebener Grundfläche, das beliebig mit Gewichten belastet werden kann. Der durch das Gewicht des Kästchens samt seiner Belastung ausgeübte vertikale Druck wird durch den Widerstand der festen horizontalen Schienen aufgehoben. Eine an dem Kästchen befestigste Schnur geht in horizontaler Richtung über eine Leitrolle und trägt an ihrem Ende eine Wagschale. Auf diese werden so lange Gewichte gelegt, bis das Kästchen auf den sogenannten Punkt der Unterbrechung gebracht ist, so daß durch die kleinste Vergrößerung der Gewichte in der Wagschale das Kästchen sich in Bewegung setzte. Die aufgelegten Gewichte samt dem Gewichte der Wagschale sind alsdann das Maß für die Größe der Reibung.

Wird nun durch Hinzulegung neuer Gewichte der Druck auf die horizontale Unterlage vergrößert, macht man ihn z. B.

*) Théorie des machines simples (1779).

dreimal so groß, so zeigt sich, daß auch die Reibung dreimal so groß geworden ist, wie vorher. Wird der Druck n-mal so groß, so wird auch die Reibung n-mal so groß.

Bezeichnet man die Größe der Reibung mit F, mit P den Druck des Kästchens, so nennt man das nach dem Vorigen für dieselben Körper konstante Verhältnis zwischen F und P den Reibungskoeffizienten der betreffenden Körper. Bezeichnet man ihn mit f, so ist

$$f = \frac{F}{P} \text{ oder } F = f \, . \, P;$$

d. h. man findet die Größe der Reibung, wenn man die Größe des Druckes mit dem Reibungskoeffizienten multipliziert.

Da für $P = 1$ kg $F = f$ wird, so kann man den Reibungskoeffizienten auch definieren als die Größe der Reibung beim Drucke 1.

385.

Zur Erhaltung der gleichen Resultate wie Coulomb benutzte Morin*) eine schiefe Ebene, die gehoben oder gesenkt werden konnte, und bestimmte den kleinsten Neigungswinkel φ, bei dem ein auf der schiefen Ebene mit ebener Fläche aufliegender Körper vom Gewichte P entlang der schiefen Ebene zu gleiten begann. Die Reibung ist in diesem Augenblicke gleich der den Körper vom Gewichte P auf der Ebene hinabtreibenden Kraft, also $P \, . \, \sin \varphi$, während der Normaldruck zwischen Körper und Ebene $P \, . \, \cos \varphi$ ist. Das Verhältnis von Reibung und Normaldruck ist daher jetzt

$$\frac{P \, . \, \sin \varphi}{P \, . \, \cos \varphi} = tg \, \varphi = f.$$

Den Winkel φ, dessen Tangente gleich dem Reibungskoeffizienten ist, nennt man den Reibungswinkel.

Findet man z. B., daß ein Würfel aus Eisen auf einer schiefen Ebene aus Holz hinabzugleiten beginnt, wenn der Neigungswinkel der schiefen Ebene $\varphi = 21^0 \, 30'$ ist, so ergibt sich hieraus der Reibungskoeffizient zwischen Eisen und Holz $f = 0{,}394$.

386.

Auch das zweite Gesetz der gleitenden Reibung wurde

*) Nouvelles expériences de frottement, Paris 1833—35.

durch die Versuche von Coulomb und Morin bestätigt. Doch kann es auch durch folgende Überlegung aus dem ersten abgeleitet werden. Denkt man sich zwei Körper aus demselben Materiale von gleichen Gewichten und gleichen Reibungsflächen auf einer horizontalen Ebene liegend, und beträgt die Größe der Reibung bei jedem Körper z. B. 1 kg, so würde die Reibung für beide Körper, wenn sie als einer gedacht und mit zwei Seitenflächen zusammengeleimt werden, offenbar 2 kg betragen. Das würde aber auch der Fall sein, wenn statt dessen der eine Körper auf den andern gelegt wird, weil dann die halb so große Reibungsfläche noch einmal so stark drückt.

Als selbstverständlich wird bei dem zweiten Gesetze vorausgesetzt, daß die Reibungsfläche nicht zu schmal sein darf, d. h. keine so scharfe Kante ist, daß sie etwa in die Unterlage einschneidet oder mit Spitzen darauf ruht.

387.

Daß die Reibung aus der Ruhe in die Bewegung größer ist als die Reibung in der Bewegung erklärt sich daher, daß, wenn die Körper längere Zeit in Berührung gewesen sind, die Unebenheiten der gleitenden Flächen mehr ineinander haben eindringen können als bei der Bewegung.

Daß die Reibung in der Bewegung unabhängig von der Geschwindigkeit ist, mit der der gleitende Körper sich bewegt, wurde wohl zuerst durch Versuche von Rumford bestätigt; doch zeigte Thomson, daß dieses Gesetz nicht mehr bei ganz geringen Geschwindigkeiten $\left(3 \frac{\text{mm}}{\text{sec}}\right)$ gültig sei.

Die Gültigkeit des vierten im § 383 ausgesprochenen Gesetzes ist ohne weiteres aus der im folgenden Paragraphen mitgeteilten Tabelle einiger Reibungskoeffizienten zu erkennen.

Es ist übrigens ganz allgemein bekannt, daß die Reibung durch Polieren, Ölen, Schmieren oder Einseifen der reibenden Flächen, wodurch die Vertiefungen ausgefüllt werden, erheblich verkleinert werden kann; freilich wird dadurch die Adhäsion begünstigt, doch hat das geringeren Einfluß auf die Größe des Reibungskoeffizienten.

388.

Einige Reibungs-Koeffizienten:

Reibende Flächen	Reibungskoeffizient bei Reibung	
	in der Ruhe	in der Bewegung
Holz auf Holz, trocken	0,50	0,34
„ mit Seife geschmiert . . .	0,35	0,15
„ mit Wasser befeuchtet . .	0,68	0,25
Holz auf Metall, trocken	0,60	0,42
„ mit Öl geschmiert	0,10	0,08
„ mit Wasser befeuchtet . .	0,65	0,24
Metall auf Metall, trocken	0,18	0,18
„ mit Schweinefett geschmiert	0,10	0,09
„ mit Öl geschmiert	0,12	0,07
Seile auf Holz, trocken	0,63	0,45
„ mit Wasser befeuchtet . .	0,47	0,33
Lederriemen auf trockenem Holz	0,47	0,30
„ auf fettigem Metall	0,28	0,23

Die Zahlen der vorstehenden Tabelle können nur als Mittelwerte betrachtet werden, denn die Reibung hängt von mancherlei äußeren Umständen ab; sie wächst z. B. bei Metallen mit der Temperatur, bei Hölzern mit der Feuchtigkeit der Luft, ist für Hölzer geringer bei gekreuzten als bei parallelen Fasern. Die Reibung von Metall auf Metall wird verkleinert, wenn man verschiedene Metalle nimmt; man läßt deshalb eiserne (stählerne) Achsen in bronzenen Lagern laufen.

Größere Tabellen für Reibungskoeffizienten, die für den Maschinenkonstrukteur von Wichtigkeit sind, findet man in jedem Ingenieurkalender.

389.

Zapfenreibung. Der Unterschied zwischen der gleitenden Reibung und der Zapfenreibung besteht im wesentlichen darin, daß Versuche ergeben haben, daß die Reibungskoeffizienten bei der Zapfenreibung im allgemeinen geringer sind als bei der gleitenden Reibung, und daß sie kleiner ist bei alten als bei neuen Zapfen, da sich die Unebenheiten mit der Zeit allmählich abschleifen.

Beim Schmieren mit Öl oder Schweinefett ist bei

Bronze auf Bronze	$f = 0{,}097$
Schmiedeeisen auf Bronze	0,075
Gußeisen auf Gußeisen	0,070
Schmiedeeisen auf Gußeisen . . .	0,070
Schmiedeeisen auf Pockholz . . .	0,125
Gußeisen auf Pockholz	0,100
Pockholz auf Pockholz	0,070.

390.

Um die Reibung eines horizontalen zylindrischen Zapfens, eines sogenannten Tragzapfens, zu finden, beachte man, daß die durch den Druck P entstehende Reibung F am Zapfenumfange in der Richtung der Tangenten an den Zylinderzapfen wirkt und die Größe $f \cdot P$ hat. Ihr Moment in bezug auf die Drehachse ist also, wenn r den Radius des Zapfens bedeutet,

$$M = f \cdot P \cdot r,$$

zu dessen Überwindung ein entgegengesetzt gerichtetes Kraftmoment erforderlich ist.

Die zur Überwindung dieses Widerstandes erforderliche Arbeit ist bei einer Umdrehung $F \cdot s = F \cdot 2\pi r = f \cdot P \cdot 2\pi r$. Ist n die Tourenzahl des Zapfens in der Minute, so ist

$$A = \frac{2\pi n}{60} r \cdot f \cdot P$$

die Arbeit, die die Zapfenreibung in einer Sekunde beansprucht. Drückt man r in Metern, P in Kilogrammen aus, so erhält man in

$$N = \frac{2\pi n}{60 \cdot 75} r \,.\, f \,.\, P = 0{,}001\,396\, r \,.\, n \,.\, f \,.\, P$$

den durch die Reibung am zylindrischen Tragzapfen in der Sekunde verursachten Verlust an Effekt, ausgedrückt in Pferdestärken.

391.

Um die Reibung eines vertikalen zylindrischen Zapfens, eines sogenannten Spurzapfens zu finden, der sich mit einer ebenen Kreisfläche, deren Radius r sei, auf einer ebenen Unterlage dreht, überlege man folgendes: Jeder Punkt der

Kreisfläche erleidet zwar denselben Druck und dieselbe Reibung, aber die Momente der einzelnen reibenden Punkte sind verschieden, weil sie verschiedene Entfernungen von der Achse (Drehpunkt C) haben. Denkt man sich aber den Kreis in so kleine Ausschnitte zerlegt (Fig. 169), dass man sie als Dreiecke betrachten kann, so kann man auch annehmen, daß annähernd alle reibenden Punkte eines so kleinen Dreiecks sich nach parallelen Richtungen (senkrecht auf einem Radius) bewegen.

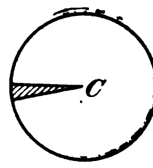


Fig. 169.

Die Resultante aller dieser gleichen parallelen Reibungskräfte ist gleich ihrer Summe, und der Angriffspunkt ist der Schwerpunkt des kleinen Ausschnitts (Dreiecks), der um $\frac{2}{3}\,r$ vom Mittelpunkte C entfernt ist. Da nun dies von allen sehr kleinen Ausschnitten gilt, so kann man annehmen, daß der auf alle Punkte gleichmäßig verteilte Druck P ganz auf die mit $\frac{2}{3}\,r$ beschriebene Kreisperipherie oder auch auf einen Punkt derselben fällt. Die Reibung $f \,.\, P$ wirkt daher am Hebelarme $\frac{2}{3}\,r$ und ihr Moment ist

$$M = f \,.\, P \,.\, \frac{2}{3}\,r.$$

Diese Größe nimmt also mit r ab; wenn man daher den Zapfen so dünn als möglich macht oder ihn konisch oder kugelförmig verjüngt, so wird das Moment der Reibung vermindert.

Das Moment der Reibung des Spurzapfens ist also nur $\frac{2}{3}$ des Reibungsmomentes des Tragzapfens.

Die zur Überwindung der Reibung bei einer Umdrehung erforderliche Arbeit ist $F \,.\, s = F \,.\, 2\,\pi \,.\, \frac{2}{3}\,r = f \,.\, P \,.\, \frac{4}{3}\,\pi\,r$. Ist n die Tourenzahl des Zapfens in der Minute, so ist

$$A = \frac{4\,\pi\,n}{3 \,.\, 60}\,r \,.\, f \,.\, P$$

die Arbeit, die die Zapfenreibung in der Sekunde beansprucht; oder es ist

$$N = \frac{4\,\pi\,n}{3 \,.\, 60 \,.\, 75}\,r \,.\, f \,.\, P = 0{,}000931\,r \,.\, n \,.\, f \,.\, P$$

der durch die Reibung am zylindrischen Spurzapfen verursachte Effektverlust, in Pferdestärken ausgedrückt.

Anm. Bei einem neuen Zapfen ist die Abnutzung an der Peripherie wegen der größeren Geschwindigkeit größer als bei den innen liegenden Teilen, so daß die Druckverteilung keine gleichmäßige mehr ist, sondern der Druck von innen nach außen abnimmt. Dies dauert so lange fort, bis überall gleiche Abnutzung stattfindet, bis sich der Zapfen, wie man sich ausdrückt, eingelaufen hat. Durch die Erfahrung hat man festgestellt, daß das Reibungsmoment für den eingelaufenen Spurzapfen nur $\frac{1}{2} r \,.\, f \,.\, P$ beträgt, also halb so groß als beim Tragzapfen von gleichem Halbmesser ist. Der Effektverlust ist daher auch beim eingelaufenen Spurzapfen geringer als beim neuen und beträgt nur

$$N = \frac{\pi n}{60 \,.\, 75} r \,.\, f \,.\, P = 0{,}000698\, r \,.\, n \,.\, f \,.\, P.$$

392.

Die rollende Reibung. Da beim Rollen eines runden Körpers (einer Walze oder einer Kugel) immer neue Teile mit der Unterlage in Berührung kommen, während andere von den Unebenheiten der Unterlage abgehoben, nicht über sie hinweggeschleift werden, so ist leicht erklärlich, daß die rollende Reibung viel kleiner ist als die gleitende.

Erfahrungsgemäß gelten für sie die Gesetze:

die rollende Reibung ist dem Drucke direkt und dem Halbmesser der Walze umgekehrt proportional.

An Lastwagen werden daher zur Verkleinerung der Reibung die Räder möglichst breit und möglichst hoch gemacht.

Nach den Messungen beträgt die rollende Reibung

auf Eisenbahnen	$^1/_{200}$
bei Frachtwagen	
auf sehr guter Straße	$^1/_{50}$
auf einer gewöhnlichen Straße	$^1/_{35}$
auf sehr gutem Pflaster	$^1/_{65}$
auf schlechtem Pflaster	$^1/_{46}$

der Belastung.

393.

Nicht als Hindernis, sondern zur Erzielung einer beabsichtigten Wirkung tritt die Reibung auf beim Befestigen und Verbinden der Körper durch Klemmen, Nägel, Schnüre, Schrauben usw. Auch in vielen anderen Fällen bringt die Reibung Vorteile: ohne sie würde kein Gehen, kein Festhalten von Gegenständen zwischen den Fingern und ähnliches mehr möglich sein.

Die Fortpflanzung und Übertragung von Bewegungen durch Räder, Rollen, Riemen, Seile usw., das ganze Maschinenwesen würde ohne Reibung nicht möglich sein. Lokomotiven würden bei fehlender Reibung mit rotierenden Rädern auf den Schienen stehen bleiben.

Bei zu geringer Reibung sucht man sie künstlich zu vergrößern: bei Glatteis wird Sand gestreut; nach Regenwetter werden, damit die Räder besser „fassen“, die Schienen der Straßenbahnen mit Sand bestreut; Riemen und Seile werden mit Kreide oder Kolophonium bestrichen.

Namentlich macht man vielfache Anwendungen von dem großen Unterschiede zwischen gleitender und rollender Reibung. Durch Umwandlung gleitender Reibung in rollende findet eine große Ersparnis an Kraft statt, daher werden zu bewegende Lasten, wie Steinblöcke usw., auf Walzen gelegt; an den Füßen schwerer Möbelstücke (Klaviere) werden Rollen angebracht usw. Umgekehrt verwandelt man die rollende Reibung der Wagenräder durch Hemmschuhe in gleitende, um an Abhängen einen größeren Widerstand zu haben. In analoger Weise macht man beim Herablassen von Lasten zur Verzögerung der Geschwindigkeit Gebrauch von Tauwindungen; alle Bremsvorrichtungen an Wagen und Maschinen vermehren absichtlich die Reibung.

394.

Der Pronysche Zaum oder das Bremsdynamometer ist eine Vorrichtung, um vermittels der Zapfenreibung den Effekt einer Kraftmaschine (oder auch einer animalischen Kraft) praktisch zu messen.

Sie besteht in der Hauptsache aus einem längeren Hebel AB (Fig. 170), an dessen einem Ende A eine Wagschale

hängt, an dessen anderem Ende zwei segmentartig ausgeschnittene Holzstücke C und D sich befinden, die durch die Schrauben E und F einander beliebig genähert werden können.

Um den Effekt der Kraftmaschine zu messen, trennt man sie von der Arbeitsmaschine und steckt den Apparat so auf die von der Kraftmaschine bewegte Welle, daß diese von den Holzbacken C und D umschlossen wird. Zieht man die Schrauben E und F zunächst schwach an und setzt die Kraftmaschine in Bewegung, so entsteht an den Holzbacken eine Reibung, die den Apparat zugleich mit der Welle zu drehen strebt. Diese Drehung wird jedoch durch zwei feste Hindernisse G und H oberhalb und unterhalb des Hebels AB verhindert. Durch auf die Wagschale aufgelegte Gewichte kann dann bewirkt werden, daß die Hebelstange AB wagrecht zwischen diesen Hindernissen spielt. Zieht man nun die Schrauben E und F so fest an, daß die Welle der Kraftmaschine ebensoviel Umdrehungen macht, als sie bei angekuppelter Arbeitsmaschine machen soll, so kann man durch weitere Gewichte in A den Hebel AB zwischen G und H wagrecht frei schwebend erhalten.

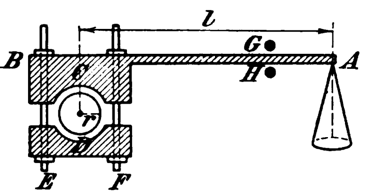


Fig. 170.

Jetzt verbraucht offenbar die Reibung des Zaumes dieselbe Arbeit wie die Arbeitsmaschine. Diese Reibung kann aber nunmehr leicht gemessen werden, da das Moment der in A aufgelegten Gewichte Q gleich dem Momente des an dem Umfange der Welle auftretenden Reibungswiderstandes ist. Ist der Hebelarm von A in bezug auf die Achse der Welle gleich l und r der Radius der Welle, so gilt für deu Reibungswiderstand F die Gleichung

$$F \cdot r = Q \cdot l,$$

woraus

$$F = Q \cdot \frac{l}{r}$$

folgt.

Bei einer Umdrehung wird zur Überwindung dieses Widerstandes die Arbeit

$$F \cdot 2\pi r = 2\pi l \cdot Q$$

verbraucht. Ist n die Tourenzahl der Welle, so folgt hieraus der Effekt, der zur Überwindung der Reibung nötig war, oder, was dasselbe ist, der Nutzeffekt der Maschine in Pferdestärken:

$$N = \frac{2\pi \, . \, l \, . \, n}{60 \, . \, 75} \, . \, Q = 0{,}001396 \, . \, n \, . \, l \, . \, Q,$$

wobei l in Metern und Q in Kilogrammen ausgedrückt werden müssen.

395.

Widerstand des Mittels. Auf der Erde, wohl auch im Weltenraume bewegt sich kein Körper in einem absolut leeren Raume, sondern überall innerhalb eines leicht beweglichen Stoffes, den man das „Mittel“ nennt, in dem die Bewegung stattfindet. Auf der Erde ist dieses Mittel gewöhnlich Luft oder Wasser, doch können auch weiche Erde, loser Sand als solche Mittel aufgefaßt werden. Dieses Mittel leistet nun der Bewegung Widerstand und ist dadurch ein Hindernis für die Bewegung. Zum kleinsten Teile wird dieser Widerstand durch die bei der Bewegung zwischen dem Körper und den Teilchen des Mittels auftretende Reibung, zum größten Teile aber dadurch hervorgerufen, daß der sich bewegende Körper wegen der allgemeinen Eigenschaft der Undurchdringlichkeit der Materie die vor ihm liegenden Teile des Mittels verdrängen, ihre Trägheit sowie ihre Kohäsion überwinden und ihnen eine gewisse Geschwindigkeit erteilen muß, um ihre Stelle einnehmen zu können. Dadurch geht natürlich ein Teil der Energie des bewegten Körpers verloren oder wird vielmehr in andere Energie (Wärme) umgesetzt.

Schon Newton fand, daß dieser Widerstand im allgemeinen dem Quadrate der Geschwindigkeit des bewegten Körpers proportional sei, wenngleich genauere neuere Untersuchungen ergeben haben, daß man bei kleineren Geschwindigkeiten die erste Potenz nehmen kann, bei sehr großen die dritte Potenz nehmen muß. Der Widerstand ist ferner proportional der Dichte des Mittels und der Größe des zur Bewegungsrichtung senkrechten Querschnittes des Körpers. Genaueres hierüber gehört

aber in die Hydromechanik (33. Buch) und Aeromechanik (37. Buch).

Folgen des Widerstandes sind z. B., daß ein Körper, der eine große Höhe in der Luft herabfällt, eine gleichförmige Bewegung annimmt, daß im lufterfüllten Raume eine Flaumfeder langsamer fällt als eine kleine schwere Bleikugel.

Um den Widerstand des Mittels zu verringern, gibt man dem bewegten Körper eine besondere Gestalt, so den Schiffen, den Scheiben an den Uhrpendeln, den Geschossen der Geschütze, dem lenkbaren (?) Luftballon.

396.

Steifigkeit der Seile. Seile, Riemen und Ketten, wie sie häufig in der Praxis um eine Walze oder eine Rolle gewickelt vorkommen, sind nicht vollkommen biegsam, setzen vielmehr dem Biegen beim Aufwickeln auf die Rolle, sowie später dem Geradestrecken beim Abwickeln von der Rolle einen Widerstand entgegen, den man mit dem allgemeinen Worte Steifigkeit der Seile bezeichnet.

Die Größe dieses Widerstandes kann nur durch Versuche bestimmt werden. Auf Grund der Versuchsresultate von Coulomb und Prony hat Eytelwein (1808) angegeben, daß der Seilwiderstand proportional der Spannung des Seiles, umgekehrt proportional dem Radius der Rolle oder Walze und bei Ketten proportional dem Querschnitte, bei Seilen proportional dem Quadrate des Querschnittes ist.

In der Praxis nimmt man als Mittelwerte für Ketten $0{,}15 \cdot \frac{d}{r} \cdot P$, für Seile $0{,}13 \cdot \frac{d^2}{r} \cdot P$ für den Seilwiderstand an, wo P die Spannung, d den Durchmesser der Kette, bez. des Seiles in cm und r den Radius der Rolle in cm bezeichnet.

Auch die sonstige Beschaffenheit der Seile hat Einfluß auf die Steifigkeit der Seile; nach den Versuchen von Weißbach (1848) sind neue Seile steifer als alte, geteerte um $\frac{1}{6}$ steifer als ungeteerte, nasse um $\frac{1}{12}$ steifer als trockene.

Aufgaben.

252. Auf dem horizontalen Boden zieht ein Mann durch eine vermittelst eines Dynamometers gemessene Kraft von 18 kg eine Kiste von 100 kg Gewicht gleichmäßig fort; wie groß ist der Reibungskoeffizient?

Antw.: $f = 0{,}18$.

253. Auf einer schiefen Ebene fängt ein Körper bei 20° Neigungswinkel abzugleiten an; wie groß ist der Reibungskoeffizient?

Antw.: $f = 0{,}364$.

254. Auf einer horizontalen Ebene erteilt eine Kraft von P kg einem Körper vom Gewichte Q kg die Beschleunigung g'; wie groß ist der hierbei auftretende Reibungskoeffizient?

Antw.: $f = \frac{P - \frac{Q}{g} \cdot g'}{Q} = \frac{P}{Q} - \frac{g'}{g}$.

255. Wie groß wäre also f, wenn $P = 50$ kg, $Q = 100$ kg und $g' = 4 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$ gemessen würden?

Antw.: 0,092.

256. Welchen Weg legt ein Körper auf horizontaler Bahn zurück, wenn er durch einen Stoß die Geschwindigkeit $c = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ erhalten hat und der Reibungskoeffizient $f = 1/_{200}$ beträgt? $\left(g = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}\right)$.

Antw.: Aus $\frac{1}{2} \frac{P}{g} \cdot c^2 = f \cdot P \cdot s$ folgt

$s = \frac{c^2}{2 f \cdot g} = 1000$ m.

257. Bei einem Tragzapfen beträgt der Druck 10000 kg; der Durchmesser des Zapfens ist 160 mm; wieviel Arbeit geht durch Reibung verloren, wenn der Zapfen 10 Touren macht und der Reibungskoeffizient 0,06 ist?

Antw.: $50 \frac{\text{mkg}}{\text{sec}}$.

258. Ein oberschlächtiges Wasserrad, das mit Wasser gefüllt 20000 kg wiegt, macht 6 Umdrehungen in der Minute; welcher Effekt geht durch die Zapfenreibung verloren, wenn $f = 0{,}08$ und der Zapfenradius $r = 75$ mm ist?

Antw.: 1 PS.

259. Ein neuer Spurzapfen hat in der Achsenrichtung das Gewicht $P = 8000$ kg zu tragen; der Durchmesser des Zapfens ist 60 mm

und die Tourenzahl $n = 50$; wieviel Arbeit konsumiert die Reibung des Zapfens, wenn $f = 0{,}07$ gerechnet wird?

Antw.: 0,78 PS.

260. Wie lautet das Ergebnis der vorigen Aufgabe, wenn der Zapfen eingelaufen ist?

Antw.: 0,59 PS.

261. Welche Zugkraft ist erforderlich, um einen 4000 kg schweren Wagen auf gewöhnlicher Straße fortzuziehen?

Antw.: 114 kg.

262. Wie groß würde die Zugkraft sein müssen, wenn die Straße eine Steigung von 1 : 50 hätte, und der Wagen a) aufwärts; b) abwärts auf der Straße bewegt werden sollte?

Antw.: a) 194 kg; b) 34 kg.

263. Eine Welle wurde mit dem Pronyschen Zaume so gebremst, daß sie 80 Touren machte; um den $l = 2$ m langen Hebel des Zaums wagrecht zu erhalten, war eine Belastung von 360 kg nötig; wie groß war der Nutzeffekt der Welle?

Antw.: 80 PS.

Vierter Abschnitt.

Die Maschinen.

Sechsundzwanzigstes Buch.

Von den einfachen Maschinen.

397.

Während es die Aufgabe der Wissenschaft ist, nach den mancherlei in der Natur liegenden Kräftequellen zu forschen und den Zusammenhang von Ursache und Wirkung d. h. die Gesetze zu entdecken, nach denen die Wirkungen aus den Ursachen folgen, ist es die Aufgabe der Technik, jene ursprünglich nur um ihrer selbst willen und nicht ihres praktischen Nutzens halber erworbenen Kenntnisse auszubeuten und dem Menschen dienstbar zu machen.

Aber die dem Menschen sich darbietenden Naturkräfte (Schwerkraft, Kraft des Wassers, Windes und Dampfes, Muskelkraft der Menschen und Tiere etc.) können nicht immer ohne weiteres zu nützlichen, mechanischen Arbeiten verwendet werden, da eine jede Kraft unmittelbar nur in ihrer eigenen Richtung und an ihrem Angriffspunkte wirkt. Der menschliche Geist mußte daher den ihm zur Verfügung stehenden Naturkräften, wenn sie in anderer Richtung als in ihrer eigenen und an anderen Punkten als an ihren Angriffspunkten wirken sollten, geeignete Zwischenkörper gleichsam als Hände und Füße geben.

Statt z. B. die Arbeit, Korn in Mehl zu verwandeln, durch Menschenhände, die das Korn in Mörsern zerstoßen, verrichten zu lassen, wie es etwa vor zweitausend Jahren, wo man noch keine Mühlen hatte, geschah, kam ein findiger Mensch auf den Einfall, dazu irgendeine Naturkraft, z. B.

die Kraft des Windes, zu benutzen; aber diese konnte die ihr aufgegebene Arbeit nicht unmittelbar vollbringen, sondern nur unter Vermittelung einer Mahlmühle.

Jede solche von Menschengeist erfundene Vorrichtung, durch die eine Naturkraft gezwungen wird, in ganz bestimmter Weise zu wirken, nennt man eine **Maschine.**

Der Zweck einer Maschine ist also der, eine zu Gebote stehende Naturkraft zu zwingen, durch die von ihr direkt erzeugte Bewegung unter Vermittelung von Zwischenkörpern andere Körper in planmäßiger Weise zu bewegen. Man kann daher auch sagen, eine Maschine sei eine aus einer Anzahl von Körpern dergestalt zusammengesetzte Vorrichtung, daß jene Körper gezwungen sind, vermöge der Art ihrer Verbindung und der auf sie wirkenden Kräfte nur ganz bestimmte Bewegungen auszuführen.

Die einzelnen Körper, aus denen eine Maschine zusammengesetzt ist, heißen die Maschinenteile. Unter diesen ist der wichtigste der, der mit dem umgebenden Raume in feste Verbindung gebracht ist und daher während der Bewegung der Maschine in Ruhe bleibt; er heißt das Gestell der Maschine.

398.

Die Wirkungsweise einer Maschine besteht darin, daß eine Naturkraft an einem Teile angreift und ihn in Bewegung setzt, also an ihm eine Arbeit leistet; dieser Maschinenteil ist mit einem oder mehreren andern dergestalt in Verbindung, daß er die an ihm geleistete und von ihm konsumierte Arbeit an diese überträgt und so an ihnen Arbeit produziert. Es muß aber ausdrücklich hervorgehoben werden, daß dies bei allen Maschinen durch Vermittelung der in dem Materiale, aus dem der betreffende Maschinenteil gefertigt ist, infolge der Einwirkung der äußeren Kräfte erzeugten inneren Kräfte oder Spannkräfte geschieht, worauf im einzelnen später noch hingewiesen werden soll.

Es ist Aufgabe der Maschinenkonstruktionslehre, nicht nur die einzelnen Maschinen so zu gestalten, daß sie den Zwecken der Maschine dienen können, sondern auch das Material so auszuwählen, daß es widerstandsfähig und fest genug ist, seine Aufgabe der Bewegungsübertragung zu er-

füllen. Unsere Aufgabe in den folgenden Untersuchungen besteht in der Hauptsache nur in der quantitativen Bestimmung der Arbeitsübertragung auf Grund der bisher gewonnenen mechanischen Kenntnisse.

399.

Jede Maschine soll eine Arbeit leisten d. h. einen Widerstand überwinden; man pflegt diesen Widerstand in Hinblick auf den einfachsten Fall, der durch das Heben einer Last geleisteten Arbeit, wobei der Widerstand der Schwerkraft überwunden wird, auch in den Fällen, die mit der Schwere nichts zu tun haben, allgemein Last zu nennen und im Gegensatze dazu die Arbeit erzeugende Naturkraft kurz Kraft.

Bei der Überwindung des Widerstandes aber ist beabsichtigt, daß die Maschine in gleichförmige Bewegung oder in den sogenannten Beharrungszustand gebracht ist. Ist die Maschine in diesem gleichförmigen Bewegungszustande angelangt, so müssen die bewegenden (Arbeit leistenden) Kräfte mit den bewegten (Arbeit verzehrenden) Widerständen im Gleichgewichte sein, da sonst die Maschine in beschleunigte oder verzögerte Bewegung kommen würde. Die Bedingungen des Gleichgewichtes von Kraft und Last sind aber m Beharrungszustande der Maschine genau dieselben wie im Ruhezustande der Maschine. Daher gelangen wir zur Beantwortung der Frage nach der quantitativen Arbeitsübertragung der Maschinen, wenn wir die Gleichgewichtsbedingungen zwischen Kraft und Last an den Maschinen aufsuchen.

400.

Es darf nicht unbemerkt bleiben, daß in bezug auf die zuletzt gestellte Aufgabe ein großer Unterschied darin besteht, ob wir die Arbeitsleistung einer Maschine vom rein theoretischen oder vom praktisch nützlichen Standpunkte aus betrachten.

Die von jeder Maschine geleistete Arbeit besteht nämlich aus zwei Teilen, aus der Nutzarbeit, deren Erzielung der eigentliche Zweck der Maschine ist, und aus der schädlichen oder Nebenarbeit (Überwindung von Bewegungshindernissen u. dergl.); daher ist die Gesamtarbeit einer Maschine stets größer als die Nutzarbeit. Die Technik schätzt die praktische Verwendbarkeit und Brauchbarkeit einer Ma-

schine nach dem Verhältnis der Nutzarbeit zur Gesamtarbeit und nennt dieses Verhältnis den Wirkungsgrad oder das Güteverhältnis einer Maschine.

401.

Wenngleich die Behauptung, die so vielfach aufgestellt und ausgesprochen wird, daß eine jede Maschine, so kompliziert sie auch sei, aus den sogenannten einfachen Maschinen, oder, wie sie auch genannt werden, aus den mechanischen Potenzen zusammengesetzt sei, nicht aufrecht erhalten werden kann, so haben diese doch für die gesamte Maschinenlehre eine solche fundamentale Bedeutung, daß eine genaue Betrachtung ihrer Wirkungen einen wichtigen Bestandteil der Mechanik ausmacht und in keinem Lehrbuche der Mechanik übergangen werden darf.

An diesen einfachen Maschinen können zwei Grundformen nach der Art der bei ihnen vorkommenden Bewegungen unterschieden werden:

einfache Maschinen mit Drehung und
einfache Maschinen mit Gleitung.

Die ersteren werden repräsentiert durch den Hebel und das Wellrad; die letzteren durch die schiefe Ebene und den Keil. Eine Verbindung beider Bewegungen, der Drehung und der Gleitung, findet bei der Schraube statt. Als sechste einfache Maschine kommt zu den genannten noch das Seil mit Gleitvorrichtung hinzu.

402.

Der Hebel. Jeder starre, um eine feste Achse drehbare Körper, an dem zwei oder mehrere Kräfte wirken, heißt ein Hebel. In der Regel ist bei praktischen Anwendungen (§ 409) der Hebel nicht ein beliebig gestalteter Körper, sondern ein um eine Achse drehbarer Stab, der geradlinig oder gebogen ist, wonach man geradlinige Hebel und Winkelhebel unterscheidet.

Derjenige Körper, an dem die Drehungsachse des Hebels befestigt ist, ist das Gestell des Hebels. Die Verbindung der Drehungsachse mit diesem Gestelle kann doppelter Art sein: Hebel und Gestell bilden entweder ein Drehkörperpaar, in-

dem der eine Körper, der als Hohlkörper gearbeitet ist, den andern, der die Gestalt eines in den Hohlkörper passenden Vollkörpers hat, umschließt, oder das Gestell hat nur eine Kante, auf der der Hebel aufliegt, und die die Drehungsachse für den Hebel bildet. Die erstere Verbindung treffen wir z. B. bei einem Hebel an, dessen Drehachse Zapfen hat, die in Lagern am Gestelle laufen, die die Zapfen vollständig umschließen; bei der zweiten Verbindung, wie sie z. B. die Brechstange zeigt, ist der um die Achse drehbare Körper nur so lange ein Hebel, als die Verbindung zwischen dem Körper und dem Gestelle besteht.

403.

Sieht man vorläufig von dem Gewichte des Hebels ab, so wirken meistens am Hebel zwei Kräfte, die Kraft P und die Last Q, deren Angriffspunkte und Richtungen in einer zur Drehungsachse senkrechten Ebene liegend gedacht werden können. Den Punkt, in dem die Drehungsachse diese Ebene schneidet, nennt man den Drehungspunkt oder Stützpunkt des Hebels.

Je nach der Lage dieses Stützpunktes zu den Angriffspunkten von Kraft und Last unterscheidet man zweiarmige und einarmige Hebel; bei dem ersteren (Fig. 171) liegen die

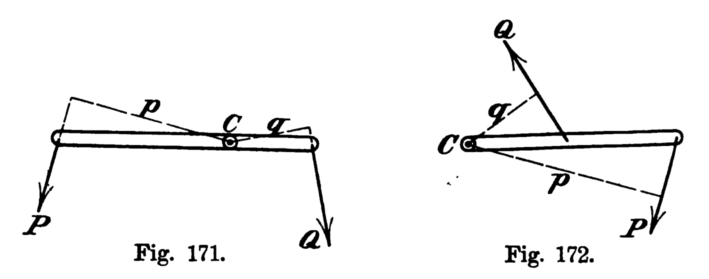


Fig. 171. Fig. 172.

Angriffspunkte von Kraft und Last auf verschiedenen Seiten vom Stützpunkte, bei dem letzteren (Fig. 172) auf derselben Seite des Stützpunktes, wobei der Stützpunkt meistens der eine Endpunkt des Hebels ist. Den einarmigen Hebel nennt man Druckhebel oder Wurfhebel, je nachdem die Entfernung des Angriffspunktes der Kraft vom Stützpunkte größer oder kleiner als die des Angriffspunktes der Last ist.

Anm. Ist die eingangs gemachte Voraussetzung, daß die Richtungen der wirkenden Kräfte in einer zur Drehungsachse senkrechten Ebene liegen, für die eine oder andere der Kräfte nicht erfüllt, so kann man die betreffende Kraft in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine in jener Ebene liegt, die zweite zu ihr senkrecht steht. Letztere wird durch das Gestell aufgehoben und bleibt für die Drehung des Hebels um die Achse wirkungslos.

404.

Wählt man nun in der zur Drehungsachse senkrechten Ebene den Stützpunkt als Momentenpunkt, so folgt aus den allgemeinen für jeden Körper geltenden Gleichgewichtsbedingungen (17. Buch), wonach an einem um eine feste Achse drehbaren Körper Gleichgewicht ist, wenn die algebraische Summe der statischen Momente der an ihm angreifenden Kräft in bezug auf die Drehungsachse gleich Null ist:

am Hebel ist Gleichgewicht, wenn das statische Moment der Kraft in bezug auf den Stützpunkt entgegengesetzt gleich dem statischen Momente der Last in bezug auf den Stützpunkt ist.

Sind P und Q die Größe von Kraft und Last, p und q ihre Hebelarme in bezug auf den Stützpunkt, d. h. die vom Stützpunkte auf die Richtungen von P und Q gefällten Lote, so ist das Gleichgewicht von P und Q durch die Gleichung

$$P \,.\, p - Q \,.\, q = 0 \text{ oder } P \,.\, p = Q \,.\, q$$

oder durch die Proportion

$$P : Q = q : p$$

bestimmt; es verhalten sich also Kraft und Last umgekehrt wie die dazu gehörigen Hebelarme.

405.

Wählt man p im Verhältnis zu q recht groß, so kann man also vermittels des Hebels durch eine verhältnismäßig kleine Kraft P einer großen Last Q das Gleichgewicht halten — freilich nur so lange, als der Stützpunkt des Hebels fest ist; denn durch ihn geht die Resultante der Kräfte P und Q (vergl. § 196), so daß das Gestell einen Druck gleich dieser

Resultante auszuhalten hat. Auch muß das Material, aus dem der Hebel besteht, derart sein, daß es nicht durch die Einwirkung der Kräfte P und Q deformiert wird. Denn erst die in dem Hebel entstehenden inneren Kräfte oder Spannungen vermitteln die Wirkung der Kraft P auf die Last Q.

406.

Wirken an einem Hebel mehr als zwei Kräfte, so ist Gleichgewicht vorhanden, wenn die algebraische Summe der statischen Momente aller Kräfte in bezug auf den Stützpunkt gleich Null ist.

Das ist insbesondere zu beachten, wenn das Gewicht des Hebels nicht, wie wir zunächst angenommen haben, und wie es in vielen praktischen Fällen wegen seiner Kleinheit gegenüber Q geschehen darf, vernachlässigt werden kann. Denken wir uns das Gewicht G im Schwerpunkte vereinigt und ist a der Hebelarm von G in bezug auf den Stützpunkt, so ist die Gleichgewichtsbedingung zwischen P und Q mit Rücksicht auf G in der Gleichung

$$P \cdot p = Q \cdot q \pm G \cdot a$$

ausgesprochen, wo das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem beim zweiarmigen Hebel der Schwerpunkt mit dem Angriffspunkte von Q oder P auf einer Seite des Stützpunktes liegt oder beim einarmigen G in der Richtung von Q oder P wirkt.

407.

Denken wir uns nunmehr den Hebel bewegt, d. h. um den Stützpunkt C gedreht (Fig. 173), so beschreiben die Angriffspunkte A und B der Kraft und der Last die Wege AA' und BB', die wir so klein annehmen wollen, daß sie als zu AB senkrechte Gerade angesehen werden können, sodaß ihre Projektionen auf die Kraftrichtungen $AA' \cdot \sin \alpha$ und $BB' \cdot \sin \beta$ sind, wenn α und β die Winkel sind, die P und Q mit den Verlängerungen des Hebels AB bilden. Bei

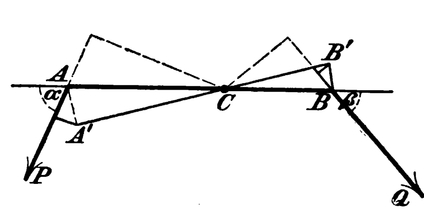


Fig. 173.

der gedachten Bewegung ist also die von der Kraft P geleistete Arbeit $P \,.\, AA' \,.\, sin\ \alpha$, die von der Last Q konsumierte Arbeit $Q \,.\, BB' \,.\, sin\ \beta$. Wegen der Ähnlichkeit der Sektoren $C\,A\,A'$ und $C\,B\,B'$ aber ist

$$AA' : BB' = C\,A : C\,B$$

oder, da $C\,A = \frac{p}{sin\ \alpha}$; $C\,B = \frac{q}{sin\ \beta}$ ist,

$$A\,A' : B\,B' = \frac{p}{sin\ \alpha} : \frac{q}{sin\ \beta},$$

weshalb

$$A\,A' = \lambda \cdot \frac{p}{sin\ \alpha};\ B\,B' = \lambda \cdot \frac{q}{sin\ \beta}$$

gesetzt werden kann. Danach ergibt sich, daß die von P geleistete Arbeit gleich $P \,.\, \lambda \,.\, p$ und die von Q konsumierte gleich $Q \,.\, \lambda \,.\, q$ ist, so daß wegen $P \,.\, p = Q \,.\, q$ der Satz folgt: Bewegt sich der Hebel, so ist die von der Kraft geleistete Arbeit gleich der von der Last konsumierten Arbeit,
in dem die quantitative Bestimmung der Arbeitsübertragung am Hebel ausgesprochen ist.

Aus diesem Satze folgt zugleich, daß zwar vermittels des Hebels an Kraft gespart werden kann, wenn nur p hinreichend groß gewählt wird, daß aber an Arbeit nichts gewonnen wird; was auf der einen Seite an Kraft gewonnen wird, geht auf der andern Seite an Geschwindigkeit oder an Weg verloren.

408.

Da die Kraft P, die durch die Gleichung $P = Q \cdot \frac{q}{p}$ bestimmt ist, der Last Q das Gleichgewicht hält, so muß, wenn durch den Hebel die Last Q gehoben oder genauer ihrer Richtung entgegen bewegt werden soll, was ja der eigentliche Zweck eines jeden Hebels ist, die Kraft P vergrößert werden, so daß sie die Reibung der Drehungsachse überwindet und den Hebel in gleichförmige Bewegung setzt.

Nehmen wir der Einfachheit wegen an, was in den meisten praktischen Fällen auch zutrifft, P, Q und G wirken senkrecht am Hebel, so ist der Druck auf die Drehachse

$P + Q + G$, und es muß, wenn wir den Radius des Drehzapfens mit r, den Reibungskoeffizienten mit f bezeichnen, die Kraft P_1, soll sie die Last mit gleichförmiger Geschwindigkeit heben, die Gleichung

$$P_1 \cdot p = Q \cdot q \pm G \cdot a + (P_1 + Q + G) \cdot f \cdot r$$

erfüllen, aus der

$$P_1 = \frac{Q \cdot q \pm G \cdot a + (Q + G) \cdot f \cdot r}{p - f \cdot r}$$

folgt.

Soll dagegen die Kraft P nur ein Sinken der Last Q oder genauer eine Bewegung von Q in ihrer eigenen Richtung verhindern, so muß sie die Größe

$$P_2 = \frac{Q \cdot q \pm G \cdot a - (Q + G) \cdot f \cdot r}{p + f \cdot r}$$

haben, wie man leicht beweisen kann.

409.

In der Praxis kommt der Hebel so vielfach und in so verschiedener Art zur Anwendung, daß es kaum möglich ist eine nur halbwegs erschöpfende Aufzählung der Gebrauchsformen des Hebels zu geben.

Als zweiarmiger Hebel findet er Verwendung als Brechstange, Kneipzange, Schere, beim Schwengel einer Saugpumpe, bei den Klappen der Blasinstrumente und den Tasten der Klaviere, beim Tragen einer Last an einem Stocke über der Schulter und dergl.; als Fühlhebel braucht man ihn zur Vergrößerung einer Bewegung und Sichtbarmachung kleiner Bewegungen. Als einarmiger Hebel wird er gebraucht als Druckhebel beim Schubkarren, beim Hebebaume (Brechstange mit anderem Stützpunkte), beim Nußknacker und Zuckermesser, bei Brotschneidemaschinen, bei der Druckpumpe und der hydraulischen Presse, beim Sicherheitsventil an Dampfkesseln, ferner als Wurfhebel bei der Wurfschaufel, bei der Sense, bei den Trittbrettern von Spinnrädern, Schleifsteinen und Drehbänken. Türklinken und Klingelzughaken sind Winkelhebel.

Besondere Erwähnung verdient noch der Gebrauch des Hebels bei der Wage, wo er entweder gleicharmig ist, wie

bei der Krämerwage und der chemischcn Wage, oder ungleicharmig, wie bei der Schnellwage.

Auch in der Natur, besonders im Organismus der Menschen und Tiere, spielt der Hebel eine große Rolle. Jeder Muskel ist an zwei verschiedenen Knochen befestigt, das Gelenk bildet den Drehpunkt des beweglichen Knochens. Bei den meisten Muskeln ist der Kraftarm viel kürzer als der Lastarm, daher muß größere Kraft entfaltet werden, wodurch größere Schnelligkeit der Bewegungen erzielt wird. Kann man z. B. mit dem ausgestreckten Arme 25 kg halten, so müßte der Deltoideus, da er etwa 4 cm vom Drehpunkte entfernt angreift, während die Armlänge 72 cm ist, wenn er senkrecht am Arme wirkte, 18 . 25 kg = 450 kg Kraft aufwenden, die aber, da er unter einem spitzen Winkel zieht, in Wirklichkeit erheblich größer ist.

410.

Aufgabe. Wie groß muß die Kraft P sein, die an einem zweiarmigen 8 kg schweren Hebel, dessen Schwerpunkt in der Mitte liegt, der Last $Q = 100$ kg das Gleichgewicht hält, wenn $p = 1$ m, $q = 0{,}20$ m ist? Wie groß aber müssen P_1 und P_2 sein, wenn der Zapfen des Hebels 16 mm Durchmesser hat und der Koeffizient der Zapfenreibung $f = 0{,}1$ ist?

Auflösung. Die Länge des Hebels ist 1,20 m, also der Abstand des Schwerpunktes vom Stützpunkte $a = 0{,}40$ m, und zwar liegt der Schwerpunkt auf derselben Seite vom Stützpunkte, auf der der Angriffspunkt von P liegt. Daher ist

$$P = \frac{Q \cdot q - G \cdot a}{p} = \frac{100 \cdot 0{,}2 - 8 \cdot 0{,}4}{1} \text{ kg} = 16{,}800 \text{ kg}.$$

Nach den im § 408 für P_1 und P_2 angegebenen Formeln ist

$$P_1 = \frac{100 \cdot 0{,}2 - 8 \cdot 0{,}4 + 108 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}008}{1 - 0{,}1 \cdot 0{,}008} \text{ kg} = 16{,}893 \text{ kg}$$

und

$$P_2 = \frac{100 \cdot 0{,}2 - 8 \cdot 0{,}4 - 108 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}008}{1 + 0{,}1 \cdot 0{,}008} \text{ kg} = 16{,}700 \text{ kg}.$$

411.

Das Wellrad besteht in seiner einfachsten Form aus einer zylindrischen Walze (der Welle), auf die ein Rad so

aufgekeilt ist, daß beide eine gemeinsame geometrische Achse haben. An ihren Enden trägt die Welle Zapfen, die sich in den Lagern des Gestelles drehen können.

Das Rad wird verschiedenartig konstruiert, z. B. als Seilrad oder als Riemenscheibe oder als Zahnrad; häufig ist es auch nur ein mit Speichen versehener Radkranz, oder es besteht aus einigen durch die Welle gesteckten Stäben, oder es ist eine Kurbel. Die Welle kann horizontal oder vertikal stehen und darnach hat die Maschine verschiedene Namen: bei horizontaler Welle heißt sie Haspel, bei vertikaler Winde oder Göpel, und zwar unterscheidet man, je nachdem die bewegende Kraft von Menschen oder Tieren ausgeführt wird, Erdwinde (auch Laufspille oder Gangspille genannt) oder Pferdegöpel, wobei die das Rad vertretenden Stangen die Zugstangen heißen.

Die Last wirkt in der Regel an einem direkt um die Welle oder um eine auf der Welle befestigte Seiltrommel geschlungenen Seile, die Kraft an dem Umfange des Rades nach der Richtung irgendeiner Tangente und will die Maschine in entgegengesetztem Sinne drehen als die Last.

412.

Das Wellrad ist offenbar weiter nichts als ein fortdauernd wirkender Hebel, und zwar ein geradliniger, wenn P und Q parallel sind, sonst ein Winkelhebel. Ist r der Radius der Welle (oder der Seiltrommel), R der des Rades, so folgt aus Fig. 174 unmittelbar die Gleichgewichtsbedingung

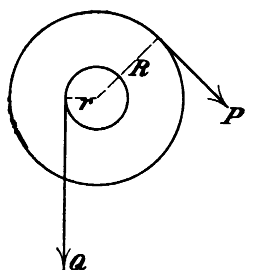


Fig. 174.

$$P \cdot R = Q \cdot r,$$

woraus sich

$$P = \frac{r}{R} \cdot Q \text{ oder } P : Q = r : R$$

ergibt.

Am Wellrade ist also Gleichgewicht, wenn sich die Kraft zur Last verhält wie der Radius der Welle zum Radius des Rades.

413.

Um die Arbeitsübertragung durch das Wellrad zu bestimmen, betrachten wir die Arbeiten von Kraft und Last während einer vollen Umdrehung der Maschine. Die Kraft legt während derselben den Weg $2\pi R$ zurück, leistet also die Arbeit $P \cdot 2\pi R$; die Last konsumiert dagegen die Arbeit $Q \cdot 2\pi r$, da sie um $2\pi r$ gehoben wird. Da nun $P \cdot R = Q \cdot r$ ist, so ist beim Wellrade die von der Kraft geleistete Arbeit gleich der von der Last konsumierten Arbeit.

Wählt man R im Vergleich mit r groß, so wird P in demselben Verhältnis im Vergleich mit Q klein; es kann also durch das Wellrad die Arbeit zwar erleichtert, aber nicht verringert werden: was an Kraft gewonnen wird, geht an Weg verloren.

414.

Soll die Kraft P die Last Q heben, d. h. entgegen ihrer Richtung gleichförmig bewegen, so darf sie nicht nur mit Q im Gleichgewichte sein, sondern muß noch in jedem Augenblicke die Zapfenreibung überwinden. Zur Berechnung derselben bezeichnen wir mit G das Gewicht des Wellrades, mit R den Radius des Rades, mit r den der Welle, mit ϱ den Radius des Zapfens, mit f den Reibungskoeffizienten und Z den Zapfendruck der am Wellrade wirkenden Kräfte.

Eigentlich müßten wir bei jedem Wellrade die Reibung an beiden Zapfen in Rechnung ziehen, dann müßte aber auch der ganze Druck Z auf beide Lager verteilt werden; man erhält folglich dasselbe Resultat, wenn man den ganzen Druck nur auf einen Zapfen wirkend denkt und die Reibung des Gesamtdruckes nur an diesem einen Zapfen in Rechnung zieht.

Die Bedingung für den Zustand einer gleichförmigen Bewegung des Wellrades im Sinne der Kraft P ist dann in der Gleichung

$$P \cdot R = Q \cdot r + f \cdot Z \cdot \varrho$$

ausgesprochen.

Die Größe von Z hängt nun aber wesentlich von den möglichen Richtungen der am Wellrade wirkenden Kräfte P, Q und G ab; da wir unmöglich alle einzelnen Fälle besprechen können, nehmen wir an, Q und G wirken in dem-

selben Sinne, die Welle ist also horizontal, und beschränken uns auf die praktisch wichtigsten Hauptfälle der Wirkung von P.

I. Ist P parallel zu Q und G, so ist

$$Z = Q + G \pm P,$$

je nachdem P vertikal abwärts oder vertikal aufwärts wirkt; die allgemeine Formel lautet alsdann

$$P \cdot R = Q \cdot r + f \cdot (Q + G \pm P) \cdot \varrho,$$

aus der

$$P_1 = \frac{Q \cdot r + f \cdot (Q + G) \cdot \varrho}{R \mp f \cdot \varrho}$$

folgt.

Diese Formel lehrt, daß die erforderliche Kraft desto kleiner ist, je kleiner der Radius ϱ des Zapfens ist; daher werden die Zapfen so dünn als möglich gemacht, wenn sie nur die nötige Festigkeit haben.

Will man auch noch den Widerstand der Seilsteifigkeit in Rechnung ziehen, so hat man zu beachten, daß beim Wellrad in der Regel nur ein Aufwickeln des Seiles auf die Welle (Trommel) erfolgt, aber kein Abwickeln, so daß nur die Hälfte des Seilbiegungswiderstandes in Betracht zu ziehen ist, also nach § 396 die Größe $0{,}065 \cdot \frac{d^2}{r} \cdot Q$, wo d die Seildicke ist. Die Momentengleichung lautet dann

$$P \cdot R = Q \cdot r + f \cdot (Q + G \pm P) \cdot \varrho + 0{,}065 \frac{d^2}{r} \cdot Q \cdot r$$

aus der

$$P_1' = \frac{Q\,r + f \cdot (Q + G) \cdot \varrho + 0{,}065 \cdot d^2 \cdot Q}{R \mp f\varrho}$$

folgt.

II. Ist P rechtwinklig zu Q und G gerichtet, dann erhält man nach dem Pythagoreischen Lehrsatze für Z den Wert

$$Z = \sqrt{P^2 + (Q + G)^2};$$

würde man diesen Wert in die Gleichung $P \cdot R = Q \cdot R + f \cdot Z \cdot \varrho$ einsetzen, so erhielte man für P eine quadratische Gleichung, deren Auflösung zwar keinerlei Schwierigkeiten machte, aber für P einen für praktische Rechnungen viel zu

komplizierten Ausdruck liefern würde. Poncelet hat vorgeschlagen, für Z den Näherungswert

$$Z = 0{,}4\,P + 0{,}96\,(Q + G)$$

zu setzen, wobei der Fehler, da in der Regel $P < (Q + G)$ ist, wegen der sonstigen die Reibung beeinflussenden Zufälligkeiten nicht von Belang ist. Dadurch würde man

$$P_1 = \frac{Q \cdot r + 0{,}96\,(Q + G) \cdot f \cdot \varrho}{R - 0{,}4 \cdot f \cdot \varrho}$$

und mit Beachtung der Seilsteifigkeit

$$P_1' = \frac{Q\,r + 0{,}96\,(Q + G) \cdot f \cdot \varrho + 0{,}065\,d^2 \cdot Q}{R - 0{,}4 \cdot f \cdot \varrho}$$

erhalten.

III. Wirkt die Kraft P normal an einer Kurbel, so ändert sich die Richtung von P beständig, also auch der Zapfendruck Z; dieser schwankt nämlich zwischen dem größten Werte $Q + G + P$, wenn P vertikal abwärts wirkt, und dem kleinsten $Q + G - P$, wenn P vertikal aufwärts wirkt.

Nimmt man für Z das Mittel

$$Z = Q + G,$$

so erhält man

$$P_1 = \frac{Q \cdot r + f \cdot (Q + G) \cdot \varrho}{R}$$

und

$$P_1' = \frac{Q \cdot r + f \cdot (Q + G) \cdot \varrho + 0{,}065\,d^2 \cdot Q}{R}.$$

415.

Die schiefe Ebene ist eine starre, gegen die horizontale Ebene geneigte Ebene; als Maschine betrachtet, bildet sie das Maschinengestell, längs dessen ein anderer Maschinenteil verschoben werden kann.

Man nennt bei einer schiefen Ebene (Fig. 175) $AC = b$ die Basis, $AB = l$ die Länge, $BC = h$ die Höhe der schiefen Ebene, den Winkel α, den sie mit der Horizontalen bildet, ihren Neigungswinkel und das Verhältnis $\frac{h}{l} = \sin\alpha$ ihre Steigung.

Als Last kommt in der Regel ein auf der schiefen Ebene liegender Körper vom Gewichte Q in Frage, der durch eine in seinem Schwerpunkte S angreifende Kraft P längs der schiefen Ebene bewegt werden soll.

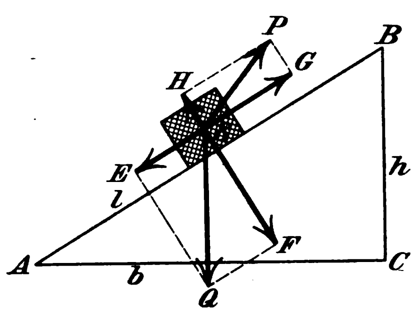


Fig. 175.

Zerlegt man das im Schwerpunkte S der Last angreifende Gewicht Q in zwei Komponenten, $SF = Q \cdot \cos \alpha$ senkrecht zu AB und $SE = Q \cdot \sin \alpha$ parallel zu AB, so würde die letztere (von Bewegungshindernissen abgesehen) der Last eine gleichförmig beschleunigte Bewegung längs der schiefen Ebene abwärts erteilen; zerlegt man ferner die in S angreifende Kraft P, die mit AB den Winkel β bilden möge, in zwei Komponenten $SG = P \cdot \cos \beta$ parallel zu AB und $SH = P \cdot \sin \beta$ senkrecht zu AB, so ist die Kraft P mit der Last Q im Gleichgewichte, wenn

$$P \cdot \cos \beta = Q \cdot \sin \alpha$$

ist. Der auf die schiefe Ebene aber ausgeübte Normaldruck ist durch

$$N = Q \cdot \cos \alpha - P \cdot \sin \beta$$

bestimmt.

416.

Als besondere Fälle kommen für die Richtung der Kraft P die folgenden zwei in Betracht:

I. P wirkt parallel der Länge AB der schiefen Ebene.

Dann ist $\beta = 0^0$, $\cos \beta = 1$, und die Gleichgewichtsbedingung wird durch die Gleichung

$$P = Q \cdot \sin \alpha = Q \cdot \frac{h}{l}$$

ausgesprochen, aus der

$$P : Q = h : l$$

folgt, d. h. bei parallel zur Länge der schiefen Ebene wirkender Kraft verhält sich die Kraft zur Last wie die Höhe zur Länge der schiefen Ebene.

II. P wirkt parallel der Basis AC der schiefen Ebene.

Dann ist $\beta = -\alpha$, $\cos\beta = \cos\alpha$, und die Gleichgewichtsbedingung lautet

$$P = Q \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = Q \cdot tg\,\alpha = Q \cdot \frac{h}{b},$$

aus der

$$P : Q = h : b$$

folgt, d. h. bei parallel zur Basis der schiefen Ebene wirkender Kraft verhält sich die Kraft zur Last wie die Höhe zur Basis der schiefen Ebene.

417.

Zur quantitativen Bestimmung der Arbeitsübertragung bei der schiefen Ebene denken wir uns den Schwerpunkt S von A nach B bewegt. Alsdann ist die von der Kraft P geleistete Arbeit, da ihr Angriffspunkt um l verschoben wird und die Projektion dieses Weges auf die Kraftrichtung $l \cdot \cos\beta$ ist, $P \cdot l \cdot \cos\beta$; dagegen wird die Last Q um die Höhe h gehoben, wodurch die Arbeit $Q \cdot h$ konsumiert wird; nun ist $h = l \cdot \sin\alpha$, also die von der Last konsumierte Arbeit $Q \cdot l \cdot \sin\alpha$. Aus der Gleichung $P \cdot \cos\beta = Q \cdot \sin\alpha$ folgt aber, daß bei einer Verschiebung des Angriffspunktes S die von der Kraft geleistete Arbeit gleich ist der von der Last konsumierten Arbeit.

Es wird also auch bei der schiefen Ebene keine Arbeit gewonnen; die Arbeit kann nur erleichtert werden dadurch, daß P kleiner als Q sein kann, dafür ist aber der Weg um so größer; was an Kraft gewonnen wird, geht an Weg verloren.

418.

Soll die wirkende Kraft nicht nur mit der Last Q im Gleichgewichte sein, sondern dieselbe gleichförmig die schiefe Ebene hinaufbewegen, so hat P außerdem die Reibung zu überwinden. Bezeichnet f den Reibungskoeffizienten, so erhält man zur Bestimmung von P die Gleichung

$$P \cdot \cos\beta = Q \cdot \sin\alpha + f \cdot (Q \cdot \cos\alpha - P \cdot \sin\beta),$$

aus der der Wert

$$P_1 = \frac{Q \cdot (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)}{\cos \beta + f \cdot \sin \beta}$$

folgt.

Soll dagegen die Kraft P bewirken, daß die die schiefe Ebene hinabgleitende Last sich gleichförmig hinabbewege, so kommt die Reibung der Kraft P zu Hilfe, und man erhält aus

$$P \cdot \cos \beta = Q \cdot \sin \alpha - f(Q \cdot \cos \alpha - P \cdot \sin \beta)$$

den Wert

$$P_2 = \frac{Q \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)}{\cos \beta - f \cdot \sin \beta}.$$

Zwischen diesen Werten P_1 und P_2 muß die Kraft P liegen, wenn unter ihrer Einwirkung die auf der schiefen Ebene ruhende Last in Ruhe bleiben und sich weder auf- noch abwärts bewegen soll.

Auch hier sind die beiden speziellen Fälle, die bereits im § 416 angeführt wurden, von besonderem Interesse.

I. $\beta = 0^0$; $P \parallel AB$; da $\cos \beta = 1$ und $\sin \beta = 0$, so erhält man für die parallel der Länge der schiefen Ebene wirkende zur gleichförmigen Aufwärtsbewegung der Last nötige Kraft

$$P_1 = Q \cdot (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)$$

und für die parallel der Länge der schiefen Ebene wirkende, eine gleichförmige Abwärtsbewegung erzeugende Kraft

$$P_2 = Q \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha).$$

Ist die Last aber in Ruhe und reichte im zweiten Falle die Reibung gerade aus, die Last auf der schiefen Ebene im Ruhezustande zu erhalten, so wäre $P_2 = 0$ und es folgte $f = tg\, \alpha$ (vergl. § 385).

II. $\beta = -\alpha$; $P \parallel AC$; da $\cos \beta = \cos \alpha$ und $\sin \beta = -\sin \alpha$, so erhält man

$$P_1 = \frac{Q \cdot (\sin \alpha + f \cdot \cos \alpha)}{\cos \alpha - f \cdot \sin \alpha}$$

$$P_2 = \frac{Q \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)}{\cos \alpha + f \cdot \sin \alpha}$$

für die parallel der Basis der schiefen Ebene wirkende Kraft, die die Last gleichförmig aufwärts oder abwärts bewegen sollte.

419.

Der Keil ist ein gerades dreiseitiges Prisma von geringer Höhe, dessen zu den Seitenkanten normaler Querschnitt entweder ein rechtwinkliges oder ein gleichschenkliges Dreieck ist; im ersteren Falle nennt man den Keil einfach, im zweiten doppelt. Gewöhnlich zeichnet man von dem Keile nur diesen Querschnitt und nennt beim einfachen Keil die eine Kathete (in der Regel die kleinere) dieses Querschnittes den Rücken, die andere Kathete die Höhe und die Hypotenuse die Seite des Keils; der dem Rücken gegenüberliegende Winkel heißt der Keilwinkel. Beim doppelten Keile, der durch die Höhe für die Basis in zwei einfache zerfällt, nennt man die ganze Basis des gleichschenkligen Dreiecks den Rücken, während die übrige Benennung dieselbe wie beim einfachen Keile ist.

Der einfache Keil wird in der Regel in der Weise benutzt, daß er mit der Höhe an einer festen Wand hingeführt wird, die dann für ihn das Gestell ist, wie wenn man z. B. einen auf dem Boden stehenden Gegenstand durch den unterzuschiebenden Keil senkrecht zur Seite des Keils heben will. Zugleich erhellt aus dieser Anwendung des Keils, daß der Keil eine schiefe Ebene ist, nur daß jetzt die schiefe Ebene nicht der feste, sondern der bewegliche Teil ist.

Der doppelte Keil wird in der Regel als Spaltkeil benutzt, dann bildet der zu spaltende Gegenstand das Keilgestell, oder als Preßkeil, wobei der zu pressende Gegenstand und ein besonderer fester Körper das Gestell bilden. Die Anschauung lehrt unmittelbar, daß der doppelte Keil aus zwei schiefen Ebenen besteht, die bewegt werden.

In einzelnen Fällen hat der Keil auch Pyramidenform, wie z. B. bei dreikantigen oder vierkantigen Nägeln.

Außer bei den genannten Vorrichtungen macht man von den Gesetzen des Keils praktische Anwendung bei den meisten Schneidewerkzeugen: Beile, Messer, Scheren usw. sind Keile. Auch zum Befestigen von Körpern untereinander wird der Keil mit Vorteil angewandt.

420.

Setzen wir voraus, wie es in der Praxis stets geschieht, daß beim einfachen Keile (Fig. 176), der in der Richtung

CA längs einer festen Wand bewegt werden soll, die Kraft P senkrecht zum Rücken $BC = r$ des Keils wirkt, während die Last Q senkrecht zur Seite $AB = l$ drückt, so zerlegen wir, um die Gleichgewichtsbedingung zwischen P und Q zu finden, Q in zwei Komponenten, von denen die eine parallel zu AC, die andere senkrecht zu AC ist. Ist α der Keilwinkel, so ist leicht aus der Figur zu ersehen, daß die erstere Komponente gleich $Q \cdot sin\,\alpha$ ist. Sie wirkt der Kraft P entgegen und muß im Falle des Gleichgewichtes gleich P sein, so daß

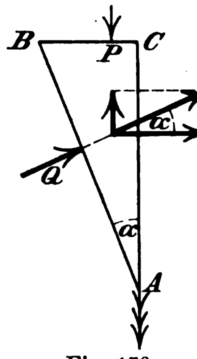


Fig. 176.

$$P = Q \,.\, sin\,\alpha$$

die Gleichgewichtsbedingung oder die Äquivalenz von P und Q ausspricht; ersetzen wir $sin\,\alpha$ durch $\frac{r}{l}$, so kann diese Gleichung in der Form

$$P : Q = r : l$$

geschrieben und in dem Satze ausgesprochen werden:

Beim einfachen Keile ist Gleichgewicht, wenn die Kraft sich zur Last verhält wie der Rücken zur Seite des Keils.

Die andere Komponente von Q, die die Größe $Q \,.\, cos\,\alpha = Q \,.\, \frac{h}{l}$ hat, wenn h die Höhe AC des Keils bedeutet, mißt den Normaldruck zwischen dem Keile und seiner Gleitbahn.

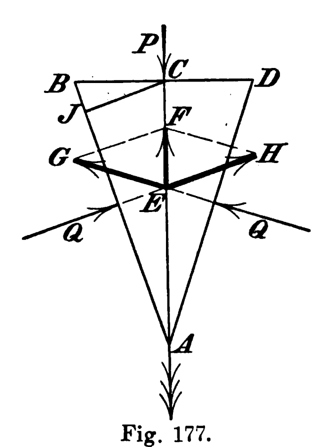


Fig. 177.

421.

Auch beim doppelten Keile (Fig. 177) wirkt die Kraft P senkrecht zum Rücken BD und sucht den Keil in der Richtung CA zu bewegen und die Schneide, d. i. die dem Rücken gegenüberliegende Kante, in ein widerstehendes Mittel zu treiben, das als Last auf beiden Seiten den Druck Q senkrecht auf die Seiten des Keils ausübt. Verlegen wir diese Druckkräfte nach dem Durchschnittspunkte E ihrer

Richtungen und konstruieren ihre Resultante EF, so muß diese, sollen Kraft und Last im Gleichgewichte sein, entgegengesetzt gleich P sein.

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke EFG und BDA aber folgt

$$EF : EG = r : l$$

oder

$$P : Q = r : l,$$

d. h. beim doppelten Keile ist Gleichgewicht, wenn die Kraft sich zur Last wie der Rücken zur Seite des Keils verhält.

Setzt man $\measuredangle BAD = \alpha$, so ist $\frac{r}{2l} = \sin\frac{\alpha}{2}$ und die Gleichgewichtsbedingung nimmt die Form an

$$P = 2Q \cdot \sin\frac{\alpha}{2}.$$

422.

Je kleiner r im Verhältnis zu l, je kleiner also α ist, um so kleiner ist auch P im Vergleich zu Q, so daß auch beim Keile durch eine kleine Kraft eine große Last im Gleichgewichte gehalten wird. Denken wir uns aber den Keil in das widerstehende Mittel von A bis C geschoben, so hat die Kraft P dabei die Arbeit $P \cdot h$ geleistet. Dabei sind zugleich die Druckkräfte Q von A nach B und D verschoben, haben also entgegengesetzt ihrer Richtung je einen Weg zurückgelegt, den man erhält, wenn man CB und CD je auf ihre Richtungen projiziert, also jede einen Weg von der Größe CI; dadurch haben sie die Arbeit $2Q \cdot CI$ konsumiert. Aus der Ähnlichkeit von CIA und BCA aber folgt

$$CI : h = \frac{r}{2} : l$$

oder

$$CI = \frac{h \cdot r}{2l};$$

so daß die von den Druckkräften konsumierte Arbeit $Q \cdot \frac{hr}{l}$ beträgt. Da aber $P = Q \cdot \frac{r}{l}$, so ist $P \cdot h = Q \cdot \frac{hr}{l}$; es wird

also durch den Keil die Arbeit zwar erleichtert, indem eine kleinere Kraft erforderlich ist, aber es wird nichts an Arbeit gewonnen, da die von der Kraft geleistete Arbeit gleich der von der Last konsumierten Arbeit ist.

423.

Soll nun beim Keile die Kraft nicht nur mit der Last im Gleichgewichte sein, sondern soll der Keil gleichförmig in der Richtung der Höhe bewegt werden, so muß die Kraft noch die auftretende Reibung überwinden. Wir beschränken uns hierbei auf den doppelten Keil.

Ist f der Reibungskoeffizient, so tritt an jeder Seite des Keils, da die Druckkraft Q normal zur Seite wirkt, die Reibung als eine längs der Seitenlinie wirkende Kraft von der Größe $f \cdot Q$ auf; projizieren wir diese auf die Höhe AC, in deren Richtung P wirkt, so ist jeder Reibungswiderstand mit $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{l}$ zu multiplizieren, so daß

$$2f \cdot Q \cdot \frac{h}{l}$$

der zu überwindende Reibungswiderstand ist.

Es muß also P, soll sie den Keil in der Richtung CA gleichförmig bewegen, die Größe

$$P_1 = \frac{r}{l} \cdot Q + 2\frac{h}{l} \cdot f \cdot Q = \frac{r + 2hf}{l} \cdot Q$$

haben; die Reibung hat also denselben Einfluß, als wenn man den Rücken um $2hf$ vergrößerte.

Hört die Kraft P zu wirken auf, so hat der Keil das Bestreben zurückzugehen; die Reibung wirkt dann in entgegengesetzter Richtung und die Kraft P_2, die erforderlich ist, um ein Zurückgehen des Keiles zu verhindern, ist

$$P_2 = \frac{r - 2hf}{l} \cdot Q.$$

Ist hierin $2hf > r$, so erscheint P_2 als negative Größe, und das bedeutet, daß der Keil nicht von selbst zurückgeht, sondern daß eine Kraft

$$P'_2 = \frac{2hf - r}{l} \cdot Q$$

in der Richtung AC nötig ist, um den Keil zurückzutreiben.

424.

Die Schraube. Ist das Rechteck $ABCD$ (Fig. 178) der abgewickelte Mantel eines geraden Zylinders, wird derselbe in eine beliebige Anzahl kleinererRechtecke von gleicher Höhe geteilt, werden in diesen die Diagonalen AE, FG, HC, . . . gezogen und wird dann der Mantel wieder zusammengerollt, so bilden die Diagonalen auf dem Mantel des Zylinders eine zusammenhängende krumme Linie, die Schraubenlinie genannt wird.

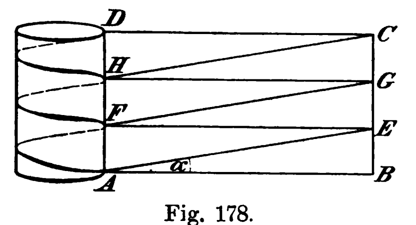


Fig. 178.

Die einzelnen Teile der Schraubenlinie, die von je einer Diagonale gebildet werden, heißen Schraubengänge oder Schraubenwindungen, und die gleichen Höhen $BE = EG = \ldots$ der Rechtecke die Ganghöhe oder Gewindehöhe; der Winkel α, den die Diagonale AE mit AB bildet, wird der Steigungswinkel genannt.

Bewegt sich nun ein gleichschenkliges (gewöhnlich ein nahezu gleichseitiges) Dreieck entlang der Schraubenlinie so auf dem Zylindermantel, daß die Basis immer auf dem Mantel bleibt und die Ebene des Dreiecks stets durch die Achse des Zylinders geht, so entsteht ein scharfgängiges Schraubengewinde (Schraube mit scharfem Gewinde); ist aber diese erzeugende Figur ein Rechteck (in der Regel ein Quadrat), so entsteht ein flachgängiges Schraubengewinde (Schraube mit flachem Gewinde).

Im Gegensatze zu dem auf seinem Mantel erhabenen Gewinde heißt der Zylinder der Schraubenkern, während beide, Kern und Gewinde zusammen, den Namen Schraubenspindel führen.

Denkt man sich nun in einem zweiten Körper einen Hohlzylinder, dessen Durchmesser dem des Zylinderkerns gleich ist, und in der Wandung dieses Hohlzylinders Schraubengänge nach derselben Schraubenlinie so ausgehöhlt, daß die Schraubenspindel genau in diesen Hohlkörper hineinpaßt, so heißt dieser zweite Körper die Schraubennuß oder Schraubenmutter.

Schraubenspindel und Schraubenmutter bilden zusammen die Schraube.

Wird der eine der beiden Körper befestigt, so kann der andere durch Drehung in eine fortschreitende Bewegung gebracht werden. Der feste Teil ist alsdann das Gestell der Maschine; ist die Mutter fest, so dreht sich die Spindel in ihr; ist die Spindel fest, so dreht sich die Mutter um die Spindel. Dabei führt der bewegliche Teil eine fortschreitende Bewegung aus, die zum Pressen von Körpern, Heben von Lasten u. dergl. in der Richtung der Achse der Spindel benutzt werden kann.

Die Anwendungen der Schraube sind außerordentlich mannigfach und können hier nicht aufgezählt werden. Nur mag angegeben sein, daß die scharfgängigen in der Regel angewandt werden, wenn es sich um Befestigen eines Körpers an einem andern handelt, die flachgängigen, wenn es sich um die Ausnutzung der fortschreitenden Bewegung handelt.

425.

Nach dem Gesagten kann die Schraube als eine um den Zylinder gewickelte schiefe Ebene aufgefaßt werden, deren Basis gleich dem Umfange des Schraubenkerns und deren Höhe gleich der Ganghöhe der Schraube ist.

Denkt man sich die Spindel vertikal und auf einen Schraubengang eine Last Q gelegt, so würde diese (wenn keine Reibung vorhanden wäre) auf der schiefen Ebene hinabgleiten, gleichviel ob die Ebene um den Zylinder gewunden wäre oder nicht, und auch gleichviel ob die Last auf einem Gange oder auf mehreren aufliegt.

Soll aber diese Last durch eine tangential an der Spindel wirkende Kraft P am Hinabgleiten gehindert werden, so haben wir den im § 416 unter II. behandelten Fall; es muß sich im Falle des Gleichgewichts die Kraft zur Last wie die Höhe zur Basis der schiefen Ebene verhalten. Genau so ist es aber, wenn die fortschreitende Bewegung eines Schraubenteils zur Fortbewegung eines Körpers benutzt wird: der Widerstand dieses Körpers wirkt in der Richtung der Spindelachse und die bewegende, hier drehende Kraft tangential an der Spindel.

Da aber alle auf die Schraubenfläche wirkenden Druckkräfte parallel, und nahezu gleich sind, so liegt ihre Resul-

tierende nahezu in der Mitte der Schraubenfläche, und man hat als Radius der Schraube das arithmetische Mittel aus dem inneren und äußeren Radius des Schraubengewindes zu nehmen. Bezeichnen wir diesen mittleren Radius mit r, mit h die Gewindhöhe, so hat man also die Gleichung

$$P : Q = h : 2\pi r$$

oder

$$P = \frac{h}{2\pi r} \cdot Q.$$

An der Schraube ist also Gleichgewicht, wenn sich die Kraft zur Last wie die Ganghöhe zum Umfange der Spindel verhält.

426.

In den meisten Fällen greift die Kraft nicht direkt am Umfange der Spindel, sondern an einem mit der Spindel verbundenen Hebelarme an, der je nach seiner Form Schraubenkopf, Schraubenschlüssel etc. heißt. Ist R die Länge des Hebelarmes, so gilt für die an ihm angreifende Kraft P' die Gleichung

$$P : P' = R : r.$$

Setzt man den hieraus folgenden Wert $P = P' \cdot \frac{R}{r}$ in die Gleichung des vorigen Paragraphen ein, so hat man leicht

$$P' = \frac{h}{2\pi R} \cdot Q,$$

d. h. es verhält sich die Kraft zur Last wie die Ganghöhe der Schraube zum Umfange des Kreises, den die Kraft bei einer ganzen Umdrehung der Schraube durchlaufen hat.

Anm. Wie man sieht, kommt in diesem Satze der Radius der Spindel nicht mehr in Betracht, weil es einerlei ist, ob man die schiefe Ebene um einen dicken oder dünnen Zylinder wickelt, da der Steigungswinkel in beiden Fällen derselbe ist.

427.

Macht nun die Schraube eine ganze Umdrehung, so hat die Kraft den Weg $2\pi R$ zurückgelegt, also die Arbeit $P' \cdot 2\pi R$ geleistet; dabei aber ist der Widerstand der Last auf einer Ganghöhe seiner Richtung entgegen überwunden worden, wodurch er die Arbeit $Q \cdot h$ konsumierte. Die beiden Arbeiten sind aber zufolge der Gleichgewichtsbedingung einander gleich, d. h. bewegt sich die Schraube, so ist die Arbeit der Kraft entgegengesetzt gleich der Arbeit der Last.

428.

Soll nun an der Schraube nicht nur Gleichgewicht sein, sondern die Last gleichförmig bewegt werden, so muß die an der Spindel wirkende Kraft P außer Q auch noch die Reibung überwinden.

Bei der flachgängigen Schraube erhält man die dazu nötige Kraft P_1 unmittelbar aus der Formel des § 418 unter II., man braucht nur

$$\sin\alpha = \frac{h}{l}; \quad \cos\alpha = \frac{2\pi r}{l}$$

zu setzen, wo l die Länge eines Schraubenganges ist. Man erhält dadurch für die am Umfange der Spindel nötige Kraft

$$P_1 = \frac{2\pi f \cdot r + h}{2\pi r - f \cdot h} \cdot Q,$$

und für die am Hebelarme R des Schraubenschlüssels wirkende Kraft

$$P_1' = \frac{r \cdot (2\pi f \cdot r + h)}{R \cdot (2\pi r - f \cdot h)} \cdot Q.$$

Bei der scharfgängigen Schraube ist die Reibung erheblich größer als bei der flachgängigen; daher findet die scharfgängige Schraube als Bewegungsvorrichtung so gut wie keine Anwendung.

429.

Das Seil mit Gleitvorrichtung. Läßt man eine Kraft, die an einem Körper wirken soll, nicht direkt an einem Punkte dieses Körpers angreifen, sondern schaltet zwischen

diesen Punkt und die Kraft ein Seil (eine Kette) ein, so kann man die Kraft in jedem Punkte dieses Seiles angreifen lassen und so den Angriffspunkt der Kraft beliebig in der Richtung des Seiles verlegen. In dem Seile werden dadurch Spannkräfte wachgerufen und vermittels dieser wird die Kraft auf den Körper übertragen, so lange diese Spannkräfte nicht größer sind als die Kohäsionskräfte, weil dann das Seil zerreißt.

Fügt man dem biegbaren Seile noch eine Gleitvorrichtung hinzu, so kann auch die Richtung der Kraft geändert werden. Seil mit Gleitvorrichtung bilden also eine Maschine, die den Zweck hat, Angriffspunkt und Richtung einer Kraft beliebig zu verlegen.

Statt z. B. einen schweren Körper durch eine vertikal aufwärts wirkende Kraft in die Höhe zu heben, befestigt man ihn an einem Seile, legt dieses über einen festen horizontalen Balken oder zieht es durch einen fest aufgehängten Ring, und kann nun den Körper durch eine horizontal oder abwärts wirkende Kraft emporziehen.

In diesem eben beschriebenen Falle ist die Gleitvorrichtung fest und bildet das Gestell der Maschine. Es kann aber auch das Seil an einem Ende befestigt werden und die Gleitvorrichtung beweglich sein; dann bildet der zwischen der Gleitvorrichtung und dem befestigten Ende liegende Teil des Seiles das Gestell, und der zu bewegende Körper ist an der Gleitvorrichtung befestigt.

430.

Da die Spannung des Seiles in jedem Punkte nach ent-

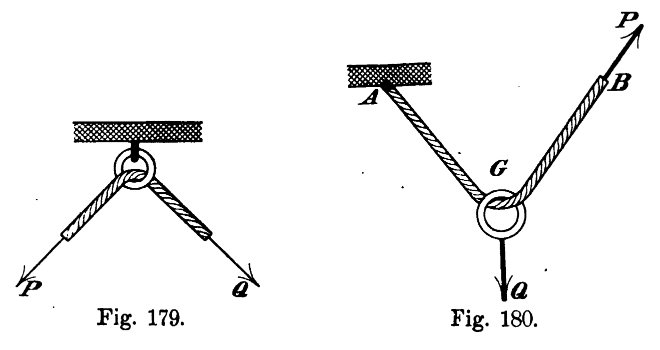


Fig. 179. Fig. 180.

gegengesetzten Richtungen gleichgroß ist, so kann in dem

Falle, daß die Gleitvorrichtung fest ist (Fig. 179), nur dann Gleichgewicht zwischen der Kraft P und der Last Q sein, wenn

$$P = Q$$

ist.

Ist aber das Seil an dem einen Ende A befestigt (Fig. 180) und wirkt an dem nicht befestigten Ende B die Kraft P, während an der Gleitvorrichtung G die Last Q hängt, so muß im Falle des Gleichgewichts die Richtung der Last Q den Winkel $A\,G\,B = \alpha$ halbieren, da zu beiden Seiten von G im Seile die Spannung P herrscht, und Q muß der Größe nach der Resultante dieser beiden Kräfte P gleich sein. Aus der Formel (1) des § 71 erhält man dann

$$Q = \sqrt{2\,P^2 + 2\,P^2 . \cos\alpha} = P . \sqrt{2\,(1 + \cos\alpha)}.$$

Nun ist

$$1 + \cos\alpha = 2 . \cos^2\frac{\alpha}{2} \text{ (Trigonom. § 100)},$$

also

$$Q = 2\,P . \cos\frac{\alpha}{2} \text{ oder } P = \frac{Q}{2 . \cos\frac{\alpha}{2}}.$$

431.

Die gebräuchlichste Gleitvorrichtung ist die **Rolle**; man versteht darunter eine kreisrunde, um eine senkrecht durch ihre Mitte gehende Achse drehbare Scheibe, deren Rand rinnenförmig ausgehöhlt ist, um das Abgleiten des um die Rolle gelegten Seiles zu verhüten.

Bildet die Rolle das Gestell der Maschine, so sind die Lager der Drehachse der Rolle befestigt, so daß die Rolle nur eine drehende, keine fortschreitende Bewegung ausführen kann; man hat dann eine *feste Rolle*.

Ist aber das eine Ende des Seiles das Gestell, so sind die Lager der Rollenachse in einem beweglichen Kloben (auch Gabel genannt) angebracht und können mit diesem verschoben werden; die Rolle kann dann eine drehende und eine fortschreitende Bewegung ausführen und heißt eine *lose Rolle*.

Man wendet die Rolle als Gleitvorrichtung gegenüber

anderen (Ringen etc.) hauptsächlich deshalb an, weil bei ihr die Reibung eine kleinere ist.

432.

Nach § 430 ist an der festen Rolle Gleichgewicht, wenn Kraft und Last einander gleich sind.

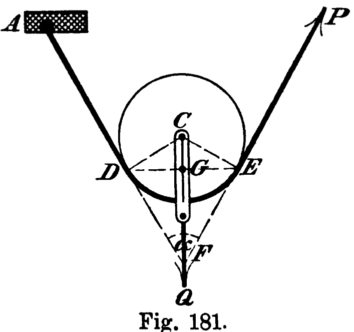


Fig. 181.

Wenn bei einer losen Rolle (Fig. 181) das Seil den Bogen DE umspannt, so denke man sich die Seilrichtungen AD und PE, die in D und E Tangenten sind, bis zum Schnittpunkte F verlängert; alsdann ist $\sphericalangle DFE = \alpha$; verbindet man D mit E und F mit C, so folgt aus ΔCEF sehr leicht

$$EG = \frac{1}{2} DE = \frac{1}{2} s = r \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

oder

$$2 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{r}.$$

Setzt man diesen Wert in die Formel für P am Schlusse des § 430 ein, so erhält man

$$P = \frac{r}{s} \cdot Q \text{ oder } P : Q = r : s,$$

d. h. bei der losen Rolle verhält sich im Zustande des Gleichgewichtes die Kraft zur Last wie der Radius der Rolle zur Sehne des vom Seile umspannten Bogens.

Sind die beiden Teile des Seiles parallel, so wird diese Sehne zum Durchmesser und dann ist

$$P = \frac{1}{2} Q.$$

433.

Wird bei einer festen Rolle die Last um die Höhe h gehoben, konsumiert sie also die Arbeit $Q \cdot h$, so muß die

Kraft in ihrer Richtung den Weg h zurücklegen, also die Arbeit $P.h$ leisten, so daß die Arbeit der Kraft entgegengesetzt gleich der Arbeit der Last ist. Wird bei einer losen Rolle mit parallelen Seilteilen die Rolle um die Strecke h gehoben, so wird jeder Seilteil um die Strecke h verkürzt, und die Kraft P legt den Weg $2h$ zurück, leistet also die Arbeit $P.2h$; die Last konsumiert die Arbeit $Q.h$; beide Arbeiten sind aber wegen der Gleichung $P = \frac{Q}{2}$ einander gleich.

Auch wenn die Seilteile bei der losen Rolle nicht parallel sind, ist die Gleichheit der von der Kraft geleisteten und der von der Last konsumierten Arbeit leicht zu beweisen, doch mag dieser Beweis dem Leser zur Übung überlassen bleiben.

434.

Soll bei dem Seile mit Gleitvorrichtung Bewegung eintreten, so ist sowohl die Reibung des Seiles an der Gleitvorrichtung wie der Widerstand der Seilsteifigkeit zu überwinden.

Bei der festen Rolle muß deshalb die Kraft P größer als die Last Q sein, was man durch die Gleichung

$$P = \mu . Q \quad (\mu > 1)$$

auszudrücken pflegt; man nennt μ den Widerstandskoeffizienten der Rolle; für Seile rechnet man als Durchschnittswert $\mu = 1{,}12$, für Ketten $\mu = 1{,}05$; er ändert sich natürlich mit der Seildicke.

Bei der losen Rolle mit parallelen Seilenden muß hiernach die am freien Seilende wirkende Kraft P μ mal so groß als die Spannung im festen Ende sein; oder letztere ist $\frac{1}{\mu} \cdot P$, so daß die Gleichung für P lautet

$$P + \frac{1}{\mu} \cdot P = Q,$$

aus der

$$P = \frac{Q}{1 + \frac{1}{\mu}}$$

folgt.

435.

Bei der quantitativen Bestimmung der Arbeitsübertragung fanden wir an jeder der betrachteten einfachen Maschinen, wenn wir die Reibung unberücksichtigt ließen, den Satz bestätigt, daß die Arbeit der Kraft entgegengesetzt gleich der Arbeit der Last ist, daß also, wenn s und s' die Projektionen der Wege der Angriffspunkte der Kraft P und der Last Q auf ihre Richtungen sind, stets die Gleichung

$$P \cdot s = Q \cdot s'$$

gilt. Daraus folgt, daß durch keine Maschine die zu leistende Arbeit verringert wird, daß aber die Maschinen die Arbeit erleichtern, weil die Arbeit durch eine geringere Kraft geleistet werden kann. Da aber

$$P : Q = s' : s,$$

so muß, wenn $P = \frac{1}{n} Q$ ist, $s' = \frac{1}{n} s$ sein; wenn also durch eine kleinere Kraft eine größere Last bewegt wird, so kann sie nur auf einem in demselben Verhältnis kleineren Wege überwunden werden. Man pflegt diesen an den Maschinen gewonnenen Erkenntnissatz auch so auszusprechen: was an Kraft gewonnen wird, geht an Weg (oder an Zeit und Geschwindigkeit) verloren, und nennt diesen alle Maschinen beherrschenden Satz die goldene Regel der Mechanik.

In Hinblick auf ihn ist man wohl berechtigt, die Maschinen als Arbeitstransformatoren zu definieren.

436.

Den im vorigen Paragraphen ausgesprochenen, an den einfachen Maschinen gewonnenen Satz hat man zu einem allgemeinen Prinzipe erweitert.

Wenn auf einen Körper Kräfte einwirken, ohne auf seinen Bewegungszustand irgend welchen Einfluß zu haben oder irgend eine Änderung seines Bewegungszustandes zu erzeugen, so müssen diese Kräfte im Gleichgewichte sein. Die Bedingung, unter der dies der Fall ist, ergibt sich wie folgt: Betrachten wir zunächst ein bewegtes Massensystem, so befinden sich an ihm Kräfte im Gleichgewichte, wenn die Summe der von einem Teile dieser Kräfte geleisteten Ar-

beiten gleich der Summe der von dem andern Teile dieser Kräfte verbrauchten Arbeiten ist.

Diese Bedingung läßt sich unmittelbar auf ein ruhendes Massensystem übertragen. Zu diesem Zwecke denkt man sich, dieses System führe eine unendlich kleine, mit der Natur seiner Verbindungen verträgliche Bewegung oder Verschiebung aus, während deren die Kräfte und ihre Richtungen als unveränderlich angesehen werden können. Aus dem geometrischen Zusammenhange des Massensystems und der Kräfte sucht man alsdann die Arbeiten der Kräfte während der unendlich kleinen Verschiebungen zu berechnen und hat als Bedingung für das Gleichgewicht der Kräfte, daß die algebraische Summe der von ihnen dabei geleisteten Arbeiten gleich Null ist.

Man nennt die bei dieser Betrachtungsweise, durch die ein statisches Problem auf ein dynamisches zurückgeführt wird, gedachten Verschiebungen virtuelle, weil nur gedachte, im Gegensatze zu einer wirklich ausgeführten oder aktuellen Bewegung; die Projektionen der virtuellen Verschiebungen auf die Kraftrichtungen nennt man virtuelle Wege (früher virtuelle Geschwindigkeiten) und die Produkte der Kräfte in die Wege virtuelle Arbeiten.

Die oben angegebene Gleichgewichtsbedingung von Kräften an einem Körper aber heißt das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten oder besser das Prinzip der virtuellen Arbeiten und kann in folgendem Satze ausgesprochen werden:

Wenn Kräfte an einem bewegten oder ruhenden Massensysteme im Gleichgewichte sind, so muß die algebraische Summe der von den Kräften während eines beliebig kleinen Zeitteilchens geleisteten Arbeiten gleich Null sein; und umgekehrt

wenn die algebraische Summe der von Kräften, die an einem Massensysteme angreifen, während eines beliebig kleinen Zeitteilchens geleisteten Arbeiten gleich Null ist, so sind diese Kräfte im Gleichgewichte.

Anm. Bleiben bei einer beliebigen Verschiebung des Massensystems die Größen der Kräfte und ihre Lagen in

bezug auf das System immer gleich, so können an Stelle der unendlich kleinen Verschiebungen auch endliche Verschiebungen gedacht werden.

Aufgaben.

264. Ein zweiarmiger Hebel, der die Gestalt einer Stange hat, ist 1,20 m lang und wiegt 8 kg; wie groß muß die Kraft sein, die an einem Ende wirkt, wenn am andern Ende die Last $Q = 50$ kg wirkt, und der Stützpunkt 0,40 m vom Mittelpunkte der Stange aus nach der Last zu liegt?

Antw.: $P = 6{,}8$ kg.

265. Ein Arbeiter soll mit einer 1,40 m langen Brechstange einen 250 kg schweren Steinblock heben; wie weit vom Lastende muß er die Brechstange stützen, wenn seine Druckkraft 30 kg ist, und das Gewicht der Brechstange gerade die Reibung überwindet?

Antw.: 15 cm.

266. Wie groß sind bei dem Hebel der Aufg. 264 P_1 und P_2, wenn der Durchmesser des Hebelzapfens 18 mm und $f = 0{,}1$ ist?

Antw.: $P_1 = 6{,}858$ kg; $P_2 = 6{,}742$ kg.

267. Ein kegelförmiges Sicherheitsventil eines Dampfkessels hat 6 cm unteren Durchmesser; das Ventil wiegt mit Zubehör 1 kg; sein Mittelpunkt hat 8 cm Abstand vom Drehpunkte des Hebels; dieser selbst wiegt 2 kg, und sein Schwerpunkt liegt 20 cm vom Drehpunkte entfernt. In welcher Entfernung vom Drehpunkte muß das Laufgewicht $Q = 40$ kg aufgehängt werden, damit das Ventil sich bei 5 Atmosphären Überdruck öffnet? (1 Atm. $\backsim$ 1 kg/qcm.)

Antw.: 27 cm.

268. Wie groß ist die Kraft, die an einem Wellrade der Last 800 kg das Gleichgewicht hält, wenn die Radien des Wellrades 60 cm und 12 cm sind?

Antw.: 160 kg.

269. Wie groß muß die Kraft sein, die diese Last gleichförmig emporzieht, wenn der Zapfen der Welle den Radius 2 cm hat, die Seildicke $d = 2{,}5$ cm ist und das Rad als Kurbel konstruiert ist? Das Gewicht des Wellrades ist 200 kg und $f = 0{,}1$.

Antw.: 168,75 kg.

270. Der Radius des Rades eines Wellrades ist 80 cm, der der Welle 10 cm; wie groß muß die Kraft sein, die mit diesem Wellrade

die Last $Q = 1000$ kg auf einer schiefen Ebene hinaufbewegen kann, deren Steigungsverhältnis 1 : 3 ist, wenn das Seil parallel der Länge der schiefen Ebene läuft und von der Reibung abgesehen wird?

Antw.: $P \backsim 42$ kg.

271. Wie groß ist der Winkel eines doppelten Keiles, wenn 50 kg Kraft auf jeder Seite 1000 kg Widerstand überwinden?

Antw.: 3^0.

272. Mittelst eines einfachen Keiles soll eine auf einer Ebene ruhende Last von 300 kg gehoben werden; welche Kraft ist dazu nötig, wenn der Rücken des Keils 15 mm, seine Seite 180 mm groß ist?

Antw.: 25 kg.

273. Die Ganghöhe einer Schraube ist 1 mm; der mittlere Radius der Spindel 1 cm; wie verhält sich im Zustande des Gleichgewichtes die Kraft zur Last?

Antw.: 1 : 62,8.

274. Welche Last kann man mit 10 kg Kraft vermittelst einer flachgängigen Schraube, deren Ganghöhe 0,8 cm ist, deren Spindel den mittleren Radius 2 cm und deren Schlüssel den Radius 20 cm hat, heben, wenn $f = 0{,}15$ ist?

Antw.: 463,5 kg.

275. An einer losen Rolle hängt eine Last von 200 kg; welchen Zentriwinkel umspannt das Seil, wenn die Last durch 110 kg im Gleichgewichte gehalten wird?

Antw.: $\alpha \backsim 130^0$.

276. Wie groß ist die Kraft, die an einer losen Rolle 100 kg emporzieht, wenn auf Reibung und Seilsteifigkeit Rücksicht genommen wird, und die Seile parallel sind?

Antw.: 52,830 kg.

277. Wie groß muß eine wagerechte Kraft sein, die einen Eisenbahnwagen (Gewicht 10000 kg) bei einer Steigung 1 : 120 und $f = {}^1/_{200}$ am Hinablaufen verhindert?

Antw.: $\backsim$ 85 kg.

Siebenundzwanzigstes Buch.

Einige zusammengesetzte Maschinen.

437.

Wer die Theorie der einfachen Maschinen gut begriffen hat, der wird imstande sein, die Konstruktion einer jeden zusammengesetzten Maschine, was nämlich ihren Mechanismus d. h. das Ineinandergreifen ihrer Organe betrifft, richtig zu beurteilen, indem er die Wirkung des ersten Organes, an dem die Kraft wirkt, durch alle Zwischenglieder hindurch bis zum letzten, wo die Last wirkt, oder umgekehrt verfolgt. Bei der großen Mannigfaltigkeit zusammengesetzter Maschinen kann es hier nur unsere Aufgabe sein, die Art der Berechnung der wirkenden Kräfte an einigen besonders wichtigen Beispielen zu zeigen, was immer durch eine Reihe von ebensoviel Gleichungen, als Organe da sind, geschieht.

438.

Hebelverbindungen. Sind mehrere zweiarmige Hebel so miteinander verbunden, daß an dem einen äußersten Ende die Kraft P, am anderen äußersten Ende die Last Q wirkt,

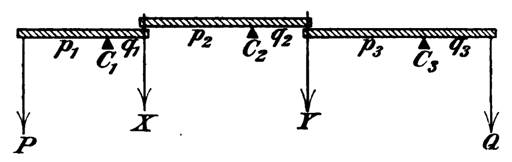


Fig. 182.

während die inneren Endpunkte durch Druck oder Zug aufeinander wirken, so müssen, damit P und Q im Gleichgewichte sind, die einzelnen Hebel im Gleichgewichte sein.

Bezeichnen wir die an den Verbindungsstellen der in Fig. 182 dargestellten Hebelverbindung herrschenden Drucke mit X und Y, so gelten nach dem Gesetze vom einfachen Hebel die Gleichungen

$$P \cdot p_1 = X \cdot q_1,$$
$$X \cdot p_2 = Y \cdot q_2,$$
$$Y \cdot p_3 = Q \cdot q_3,$$

aus denen durch Multiplikation und nachheriger Division durch $X \cdot Y$ die das Gleichgewicht zwischen P und Q aussprechende Gleichung

$$P \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = Q \cdot q_1 \cdot q_2 \cdot q_3$$

folgt.

Anm. Zur Bewegung der Last Q würde ein solches Hebelwerk nicht geeignet sein, weil die Hebelarme voneinander abgleiten; deshalb kam ein nachdenkender Mensch auf den Einfall, diesen Zweck durch eine kleine Abänderung der Form zu erreichen, und ersann das Räderwerk.

439.

Das Räderwerk ist eine Verbindung von mehreren in einem gemeinschaftlichen Gestelle lagernden Wellrädern, so daß die Umdrehung der einen Welle eine Umdrehung der anderen hervorbringt. Die Übertragung der Bewegung der einen Welle auf die andere geschieht entweder bei unmittelbarer Berührung der Wellen durch Druck und Reibung oder durch Verzahnung oder bei nicht unmittelbar in Berührung stehenden durch Riemen, Seile oder Ketten.

Bei den Reibungsrädern sind die Wellen parallel, berühren einander am Umfange und werden dort durch einen Druck zusammengepreßt; die dabei an den glatten Umfängen entstehende Reibung dient zur Bewegungsübertragung.

Bei den Zahnrädern sind die Umfänge der Räder und der Wellen mit Ausnahme des Rades, woran die Kraft, und der Welle, woran die Last wirkt, mit sogenannten Zähnen versehen, die ineinandergreifen und so eine Drehung des ersten Rades auf das letzte übertragen (Fig. 183). Ein solches System von gezähnten Rädern kommt in sehr verschiedenen Formen vor. Die Zähne gehen dabei entweder radial (Stirnräder), wenn die Wellen parallel sind, oder stehen senkrecht auf den Radien (Kronenräder) oder liegen schräg zu den Radien und zur Achse des Rades (konische Räder), wenn die Wellen einen Winkel miteinander bilden.

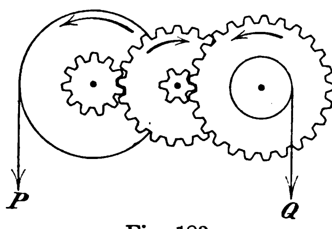


Fig. 183.

Bei den Riemenscheiben wird die Bewegung durch einen geschlossenen Riemen von einem Wellrade auf das andere übertragen, und zwar unterscheidet man offenen und geschränkten (gekreuzten) Riementrieb; der obere Teil des

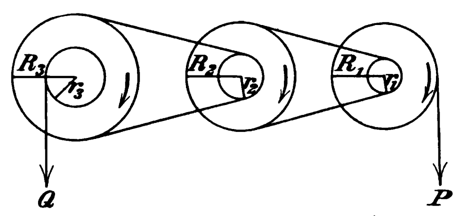


Fig. 184.

Riemens heißt der ziehende oder führende Trum, der untere der gezogene Trum (Fig. 184).

Eine solche Verbindung von Wellrädern ist offenbar nichts anderes als eine Hebelverbindung, weshalb die Gleichgewichtsbedingung in der Formel des § 438 mit enthalten ist. Bezeichnen R_1, R_2, R_3 die Radien der Räder, r_1, r_2, r_3 die der Wellen, so ist

$$P \cdot R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 = Q \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3$$

oder

$$P : Q = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 : R_1 \cdot R_2 \cdot R_3 ;$$

am Räderwerke ist Gleichgewicht, wenn die Kraft sich zur Last wie das Produkt aller Wellenradien (Getriebe) zum Produkte aller Räderradien verhält.

440.

Die Brückenwage. (Fig. 185.) Auf einem in C_1 unterstützten einarmigen Hebel $A_1\ C_1$ liegt der Stützpunkt C_2

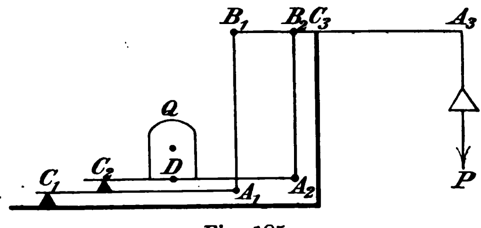


Fig. 185.

eines zweiten einarmigen Hebels $A_2\ C_2$; die Endpunkte A_1 und A_2 beider Hebel sind durch Zugstangen $A_1\ B_1$ und $A_2\ B_2$

mit einem dritten in C_3 unterstützten zweiarmigen Hebel verbunden, an dessem Endpunkte A_3 eine Wagschale hängt. Das ganze Hebelsystem ist so eingerichtet, daß es für sich im Gleichgewichte ist, und daß die drei Hebel horizontal, die Zugstangen vertikal sind. Nun wird auf den Hebel $C_2\,A_2$ (die sogenannte Brücke) die Last Q gelegt; man soll das Gewicht bestimmen, das auf die Wagschale in A_3 zur Wiederherstellung des Gleichgewichtes gelegt werden muß.

Die Last Q kann in dem vertikal unter ihrem Schwerpunkte liegenden Punkte D wirkend angenommen werden; dann sind die Drucke Q_1 und Q_2, die Q auf die Punkte C_2 und A_2 ausübt, nach dem Momentensatze

$$Q_1 = \frac{D\,A_2}{C_2\,A_2} \cdot Q \text{ und } Q_2 = \frac{D\,C_2}{C_2\,A_2} \cdot Q.$$

Der Druck Q_1 zerlegt sich nun in bezug auf den Hebel $C_1\,A_1$ in den Druck

$$Q_1' = \frac{C_2\,A_1}{C_1\,A_1} \cdot Q_1 \text{ wirkend auf } C_1$$

und

$$Q_1'' = \frac{C_1\,C_2}{C_1\,A_1} \cdot Q_1 \text{ wirkend in } A_1.$$

Die gesuchte Kraft P muß nun mit den am Hebel $A_3\,C_3$ in A_1 und A_2 oder vielmehr in B_1 und B_2 wirkenden Zugkräften Q_1'' und Q_2 im Gleichgewichte sein.

Daher ist

$$\begin{aligned} P \cdot A_3\,C_3 &= Q_2 \cdot B_2\,C_3 + Q_1'' \cdot B_1\,C_3 \\ &= \left(\frac{D\,C_2}{C_2\,A_2} \cdot B_2\,C_3 + \frac{C_1\,C_2}{C_1\,A_1} \cdot \frac{D\,A_2}{C_2\,A_2} \cdot B_1\,C_3\right) \cdot Q. \end{aligned}$$

Macht man nun, um diese Formel praktisch nützlich zu machen, die Verhältnisse der Hebelarme so, daß

$$\frac{C_1\,C_2}{C_1\,A_1} = \frac{B_2\,C_3}{B_1\,C_3},$$

so ist

$$\begin{aligned} P \cdot A_3\,C_3 &= \left(\frac{D\,C_2}{C_2\,A_2} \cdot B_2\,C_3 + \frac{D\,A_2}{C_2\,A_2} \cdot B_2\,C_3\right) \cdot Q \\ &= B_2\,C_3 \cdot \frac{D\,C_2 + D\,A_2}{C_2\,A_2} \cdot Q \\ &= B_2\,C_3 \cdot Q \end{aligned}$$

oder

$$P = \frac{B_2 C_3}{A_3 C_3} \cdot Q.$$

Durch die gemachte Annahme ist nun der merkwürdige Umstand herbeigeführt, daß die Lage des Punktes D oder die Lage von Q auf der Brücke $C_2 A_2$ beliebig sein kann; je nachdem nun der Erfinder Quintenz (1821) noch das Verhältnis

$$\frac{B_2 C_3}{A_3 C_3} = \frac{1}{10} \text{ oder} = \frac{1}{100}$$

wählte, was ihm völlig frei stand, hatte er die für die Praxis so wichtige Dezimalwage oder Zentesimalwage konstruiert.

441.

Der gemeine Flaschenzug ist eine Vereinigung zweier durch ein einziges Seil verbundener Rollensysteme, wovon das eine sich in einem festen Gehäuse (Flasche, Kloben), das andere aber in einem beweglichen Gehäuse befindet. (Fig. 186.) Die im oberen Gehäuse befindlichen Rollen sind feste, die im unteren befindlichen lose Rollen. Die Einrichtung kann übrigens sehr verschieden sein. Statt daß die Rollen eines jeden Systems sich untereinander befinden, wie es der Deutlichkeit halber in der Figur gezeichnet ist, können sie sich auch nebeneinander befinden und um eine gemeinschaftliche Achse drehbar sein. Vorteilhaft ist es aber, wenn die tragenden Seile möglichst parallel der Richtung der Last laufen, die an dem beweglichen Kloben befestigt ist.

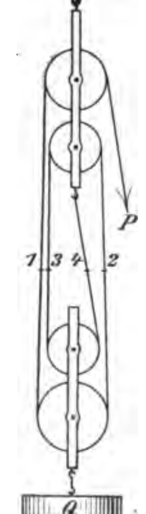


Fig. 186.

Da für den Zustand des Gleichgewichtes die Spannung der Seile in allen Punkten dieselbe ist, nämlich gleich der gesuchten Kraft P, so wäre, wenn die untere Flasche n Rollen hätte, die Last also durch $2\,n$ Seile getragen würde, und man sich diese $2\,n$ tragenden Seile in den angedeuteten Punkten durchschnitten dächte, zur Erhaltung des Gleichgewichtes in jedem Durchschnittspunkte offenbar die Kraft P erforderlich. Die Resultante dieser

$2\,n$ gleichen und parallelen Kräfte P muß gleich Q sein, also lautet die Gleichgewichtsbedingung

$$2\,n\,.\,P = Q \text{ oder } P = \frac{Q}{2\,n}.$$

Man erhält also die Kraft, wenn man die Last durch die Anzahl der tragenden parallelen Seile dividiert.

442.

Berücksichtigung der Reibung. Nach § 434 ist die Spannung des Seiles in den mit 1, 2, 3, 4 in der Figur bezeichneten Seilteilen

$$\frac{P}{\mu};\ \frac{P}{\mu^2};\ \frac{P}{\mu^3} \text{ und } \frac{P}{\mu^4};$$

ihre Summe muß gleich der Last Q sein; man erhält also bei n Rollen in jedem Kloben

$$P\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} + \ldots + \frac{1}{\mu^{2n}}\right) = Q.$$

Nun ist

$$\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu^2} + \ldots + \frac{1}{\mu^{2n}} = \frac{1}{\mu^{2n}}\,(1 + \mu + \ldots + \mu^{2n-1})$$

$$= \frac{1}{\mu^{2n}} \cdot \frac{\mu^{2n} - 1}{\mu - 1},$$

so daß

$$P = \frac{\mu^{2n}\,(\mu - 1)}{\mu^{2n} - 1} \cdot Q$$

ist, wo $\mu = 1{,}12$ ist.

Da ohne Berücksichtigung der Reibungswiderstände und der Seilsteifigkeit

$$P = \frac{Q}{2\,n}$$

war, so ist der Wirkungsgrad (§ 400) des gemeinen Flaschenzuges

$$\eta = \frac{\mu^{2n} - 1}{2\,n\,.\,\mu^{2n}\,(\mu - 1)}.$$

443.

Der Potenzflaschenzug ist die Vereinigung mehrerer loser Rollen mit einer einfachen, wie sie durch Fig. 187 veranschaulicht wird. Die unterste lose Rolle trägt die Last Q, jede lose Rolle wird von einem besonderen Seilstücke umfaßt und die Kraft wirkt an dem letzten über die feste Rolle geschlungenen Seilende.

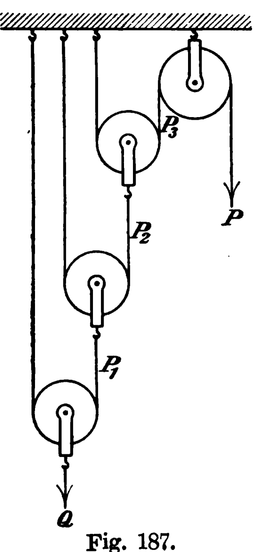


Fig. 187.

Unter der Voraussetzung, daß die tragenden Seile alle parallel sind, ist ohne Rücksicht auf Bewegungshindernisse die Spannung in dem die unterste lose Rolle umschlingenden Seile

$$P_1 = \frac{Q}{2}.$$

P_1 ist aber zugleich die Last für die zweite lose Rolle, also die Spannung in dem diese Rolle tragenden Seile

$$P_2 = \frac{P_1}{2} = \frac{1}{2^2} \cdot Q$$

u. s. f.; bei n losen Rollen ist

$$P = P_n = \frac{1}{2} P_{n-1},$$

woraus leicht

$$P = \frac{1}{2^n} \cdot Q$$

folgt. Man erhält also die Kraft, wenn man die Last durch die sovielte Potenz von 2 dividiert als lose Rollen vorhanden sind.

Trotz der großen Kraftersparnis findet der Potenzflaschenzug in der Praxis sehr wenig Anwendung, einmal, weil er einen ziemlich großen Raum beansprucht und dann, weil die Last nur auf eine verhältnismäßig kleine Höhe gehoben werden kann, weil die Rollen zusammenstoßen.

280. Welche Kraft ist bei einem gemeinen Flaschenzuge von zwei festen und zwei losen Rollen einer Last von 1200 kg im Gleichgewichte?

Antw.: 300 kg.

281. Wie groß muß die Kraft sein, wenn jeder Kloben drei Rollen enthält?

Antw.: 200 kg.

282. Wie groß ist in der Aufg. 281 die Kraft, die nötig ist, 1200 kg gleichmäßig zu heben?

Antw.: 292 kg.

283. Wie groß ist also der Wirkungsgrad dieses Flaschenzuges?

Antw.: $\eta = 0{,}685$.

284. Wie viele lose Rollen müßte ein Potenzflaschenzug mindestens haben, wollte man durch 50 kg die Last 1000 kg im Gleichgewichte halten?

Antw.: 5.

285. Wieviel wiegt ein Steinblock, der vermittelst eines gemeinen Flaschenzuges, dessen jede Flasche 3 Rollen hat, durch 75 kg in der Schwebe gehalten wird?

Antw.: 450 kg.

286. Ein Geldschrank von 4500 kg Gewicht soll vermittelst eines Differentialflaschenzuges, dessen Radien das Verhältnis $\frac{r}{R} = \frac{14}{15}$ gehoben werden; wie groß ist die dazu erforderliche Kraft a) ohne, b) mit Berücksichtigung der Reibung?

Antw.: a) 150 kg; b) 366 kg.

287. Wie groß ist das Güteverhältnis eines Differentialflaschenzuges bei dem $\frac{r}{R} = \frac{7}{8}$ ist?

Antw.: $\eta = 0{,}569$.

Fünfter Abschnitt.

Hydromechanik.

Achtundzwanzigstes Buch.

Grundeigenschaften der tropfbar flüssigen Körper.

446.

Bei den Körpern, die wir feste nennen, hängen die einzelnen Teilchen durch die Kraft der Kohäsion so fest miteinander zusammen, daß es einer bald größeren, bald geringeren, aber immerhin merklichen Kraft bedarf, die Lage der Teilchen der Körper zu verändern oder ihren Zusammenhang ganz zu trennen. Infolgedessen haben die festen Körper nicht nur selbständiges Volumen, sondern auch selbständige Gestalt.

Bei den Körpern aber, die wir flüssige nennen, ist die Kohäsion so gering, daß die kleinste Kraft ausreicht, die gegenseitige Lage der Moleküle zu ändern. Infolge dieser leichten Verschiebbarkeit der Teilchen besitzen die flüssigen Körper zwar ein selbständiges Volumen, aber (der Anziehung der Erde unterworfen) keine selbständige Gestalt, sondern nehmen die Gestalt des Gefäßes an, in dem sie aufbewahrt werden.

447.

Daß trotzdem die Kohäsion zwischen den Molekülen nicht ganz fehlt, ist daraus zu erkennen, daß jede Flüssigkeit der Einwirkung äußerer Kräfte entzogen Kugelgestalt annimmt. Besonders deutlich zeigt dies der Plateausche Versuch: bringt man eine Ölmasse mittels einer Pipette in eine solche Mischung von Alkohol und Wasser, daß das spezi-

fische Gewicht der Mischung gleich dem des Öles ist, so nimmt die Ölmasse Kugelgestalt an und schwebt in der Flüssigkeit an der Stelle, an die man sie gebracht hat. — Auch die sogenannte Tropfenbildung, wegen deren die flüssigen Körper tropfbar flüssige heißen, ist eine Wirkung der Kohäsion.

Für kleinere Mengen von Flüssigkeiten ist die Schwerkraft so gering, daß sie die Kohäsion nicht überwinden kann, und daß die Flüssigkeit dadurch gleichsam unabhängig von der Schwerkraft ist. So nehmen kleine Wassermengen (Regentropfen), geschmolzenes Blei (beim Gießen von Bleischrot) beim Fallen, Wasser beim Spritzen auf eine bestäubte Fläche Kugelgestalt an. Kleine Quecksilbertröpfchen auf einer horizontalen Glastafel sind beinahe kugelförmig, größere erscheinen unter der Wirkung der Schwere etwas abgeplattet. Die Erde und die andern Planeten haben Kugelgestalt, weil sie sich früher in (feurig) flüssigem Zustande befanden.

Eine andere Wirkung der Kohäsion der Flüssigkeiten ist die sogenannte Oberflächenspannung, der zufolge die Flüssigkeit wie mit einem Häutchen überzogen ist, und die daher erklärt wird, daß die Moleküle an der Oberfläche von den unter ihnen liegenden Teilchen angezogen werden, während die Anziehungen im Innern der Flüssigkeit von allen Seiten gleich stark erfolgen und deshalb gegenseitig einander aufheben.

448.

Eine andere merkwürdige Eigenschaft der tropfbar flüssigen Körper, wodurch sie sich ebenfalls von den festen Körpern unterscheiden, besteht darin, daß alle festen Körper, selbst die dichtesten (Gold, Platin), wegen der in ihnen vorhandenen Poren sich merklich zusammendrücken (verdichten) lassen, die tropfbar flüssigen (von Poren freien) Körper dagegen so wenig, daß wir bei den folgenden Betrachtungen von der Zusammendrückbarkeit (Kompressibilität) ganz absehen, sie einfach Null setzen können.

Lange Zeit hielt man die Flüssigkeiten überhaupt für unzusammendrückbar, doch läßt sich die Zusammendrückbarkeit mit dem von Oerstedt (1822) angegebenen Piezometer unschwer nachweisen. Nach neueren Messungen werden durch den Druck einer Atmosphäre (§ 451) Wasser um 50, Weingeist um 80, Queck-

silber nur um 3 Milliontel ihres ursprünglichen Volumens zusammengepreßt.

Hört der Druck aber auf, so nehmen die Flüssigkeiten genau ihr früheres Volumen wieder ein. Die Flüssigkeiten sind in diesem Sinne vollkommen elastisch. Man nennt diese Elastizität im Gegensatz zu der bei den festen Körpern sich zeigenden, die sich auf die Gestalt bezieht, Volumenelastizität.

449.

Aus der leichten Verschiebbarkeit der Teilchen einer Flüssigkeit, der zufolge sie der kleinsten formändernden Kraft nachgibt, und aus ihrer Unzusammendrückbarkeit, wegen der mit einer Formänderung keine Volumenänderung verbunden ist, folgt eine dritte sehr wichtige Eigenschaft der tropfbar flüssigen Körper, die sich auf ihr Verhalten gegenüber einem von außen auf sie ausgeübten Drucke bezieht.

Befindet sich in einem Zylinder zwischen den beiden beweglichen Kolben *A* und *B* (Fig. 189) eine Flüssigkeitsmenge *C*, und wird auf den Kolben *A* ein Druck ausgeübt, so pflanzt sich dieser ähnlich, wie wenn zwischen *A* und *B* eine elastische Feder angebracht wäre, durch die Wassermenge *C* auf den Kolben *B* fort, so daß *B* denselben Druck empfängt, wie wenn *A* direkt auf *B* gewirkt hätte. Soll der Kolben *B* in dem Zylinder nicht fortgeschoben werden, so muß auf ihn ein gleichgroßer Gegendruck ausgeübt werden.

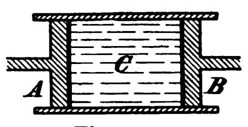


Fig. 189.

Aber auch in jeder Schicht des Wassers *C* zwischen *A* und *B* entsteht ein Spannungszustand, infolgedessen jede Schicht gerade so stark wie der Kolben *A* nach *B* hin und umgekehrt gerade so stark wie der Kolben *B* nach *A* hin drückt.

Soweit stimmt das Verhalten der Flüssigkeiten mit dem der festen Körper überein, bei denen die Fortpflanzung des Druckes in der Druckrichtung, aber auch nur in dieser erfolgt; im übrigen besteht aber folgender besondere Unterschied.

Wird auf eine in einem Gefäße eingeschlossene Flüssig-

keit von irgendeiner Seite ein Druck ausgeübt, so suchen die gedrückten Teilchen auszuweichen; wegen der leichten Verschiebbarkeit der Teilchen nach allen Richtungen macht sich aber dieses Bestreben nach allen Richtungen hin geltend, so daß die unmittelbar gedrückten Teilchen auf alle sie ringsum umgebenden Teilchen drücken; diese wollen ebenfalls ausweichen, sind aber daran gehindert und drücken nun ihrerseits nach allen Richtungen und also auch rückwärts auf die drückenden Teilchen. So geht dies fort bis zur Wand des Gefäßes, die ebenso gedrückt wird wie die Teilchen, diesen Druck aber nicht mehr weiter, sondern nur zurückgeben kann.

Der auf eine Flüssigkeit von außen ausgeübte Druck pflanzt sich also in derselben nach allen Richtungen und mit gleicher Stärke fort.

Das in diesen Worten ausgesprochene Gesetz vom hydrostatischen Drucke, wohl auch das Pascalsche Prinzip genannt, ist zuerst von Stevin (1600) und Pascal (1650) ausgesprochen, aber erst von d'Alembert als das Fundament der Mechanik der flüssigen Körper erkannt worden.

450.

Die Fortpflanzung des Druckes nach allen Richtungen kann man dadurch zeigen, daß man ein kugelförmiges Gefäß, das mit Öffnungen an verschiedenen Stellen versehen ist, mit einem Zylinder, in dem ein Kolben leicht verschiebbar ist, verbindet, mit Wasser füllt und auf dieses durch den Kolben drückt: aus sämtlichen feinen Öffnungen spritzt das Wasser senkrecht zur Kugeloberfläche und aus allen mit derselben Geschwindigkeit.

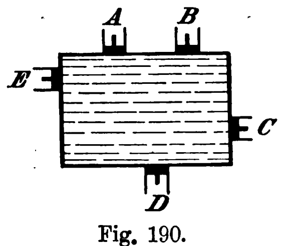


Fig. 190.

451.

Ein Gefäß von beliebiger Gestalt sei vollständig mit Wasser gefüllt; die Wand des Gefäßes sei an mehreren Stellen durch zylindrische Ansatzrohre von gleichen Weiten *A*, *B*, *C*, ... (Fig. 190) durchbrochen, die durch bewegliche, dicht schließende Kolben geschlossen sind. Vom Gewichte der Wassermenge und der Kolben werde abgesehen.

Wird nun auf den Kolben A ein Druck von P kg ausgeübt, so pflanzt sich dieser durch die Flüssigkeit auf alle Teile der Gefäßwand mit gleicher Stärke fort, so daß die Kolben B, C, . . . ebenfalls mit einem Drucke von P kg belastet werden müssen, damit das Gleichgewicht erhalten bleibt und die Kolben B, C, . . . nicht in ihren Rohren verschoben werden.

Denkt man sich 2, 3, . . . der Rohre B, C, . . . zu einem einzigen vereinigt, so müßte der betreffende Kolben mit $2\,P$, $3\,P$, . . . belastet werden.

Der auf einen beliebigen Teil der Gefäßwand senkrecht zur Oberfläche ausgeübte Druck ist also der Größe des Flächenteiles proportional.

Da also, wenn von dem Drucke, unter dem eine Flüssigkeit steht, die Rede ist, die Größe der gedrückten Fläche mit angegeben werden muß, so versteht man unter dem hydrostatischen Drucke an einer Stelle einer Flüssigkeit stets denjenigen Druck, der auf die Flächeneinheit (in der Regel 1 qcm) senkrecht zu ihr ausgeübt wird; man nennt ihn wohl auch spezifischen Druck. Als Einheit des Flächendruckes ist der Druck von 1 kg auf 1 qcm angenommen worden; man nennt diese Einheit

$$1 \frac{\text{kg}}{\text{qcm}} = 1 \text{ Atmosphäre.}$$

Ist q der spezifische Druck, so ist der Druck P_1 auf eine Fläche F_1

$$P_1 = q \cdot F_1,$$

und der Druck P_2 auf eine Fläche F_2

$$P_2 = q \cdot F_2.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$P_1 : P_2 = F_1 : F_2$$

d. h. die Druckkräfte verhalten sich wie die gedrückten Flächen.

452.

Auch eine im Innern der Flüssigkeit gedachte Ebene erhält einen senkrecht zu ihr gerichteten Druck, der ihrer Größe proportional ist; denn die auf beiden Seiten der Fläche

liegenden Flüssigkeitsteilchen üben aufeinander einen gleichen Druck aus wie auf ein Stück der Gefäßwand von gleicher Größe. Aber ein Unterschied ist doch dabei zu beachten: Im Innern der Flüssigkeit sind Druck und Gegendruck im Gleichgewichte, an der Gefäßwand dagegen wirkt der Flüssigkeitsdruck nur einseitig.

Anm. Es mag noch angedeutet werden, daß das Pascalsche Prinzip auch aus dem Arbeitsprinzipe abgeleitet werden kann, indem man zeigt, daß, wenn der Kolben A in Fig. 190 durch einen auf ihn ausgeübten Druck P um die Strecke s in seinem Ansatzrohre in die Flüssigkeit hineingeschoben wird, die übrigen n Kolben je um $\frac{1}{n}s$ nach außen verschoben werden; damit die dabei am Kolben A geleistete Arbeit $P \cdot s$ gleich der konsumierten ist, muß jeder der n Kolben mit dem Drucke P verschoben werden, denn nur dann ist die konsumierte Arbeit $P \cdot n \cdot \frac{1}{n} s$ gleich der produzierten.

453.

Praktische Anwendung von dem Gesetze des hydrostatischen Druckes wird in der von dem englischen Mecha-

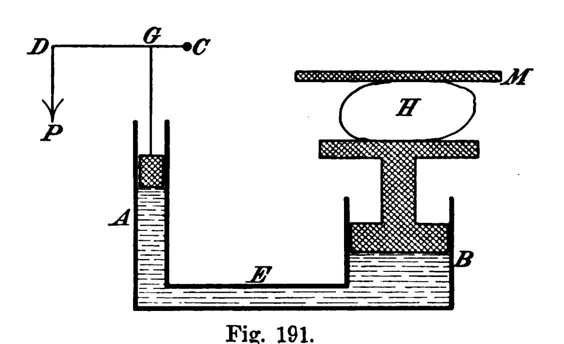


Fig. 191.

niker Bramah (1796) erfundenen Presse gemacht, die nach ihm Bramahsche, meistens aber hydraulische*) Presse heißt.

*) Richtiger wäre der Name „hydrostatische Presse".

Zwei durch ein Querrohr E verbundene Zylinder A und B (Fig. 191) von verschiedenen Weiten sind mit Wasser (oder Öl) gefüllt; jeder Zylinder ist durch einen beweglichen, wasserdicht schließenden Kolben verschlossen. Vermittels eines einarmigen Hebels, dessen Stützpunkt C ist, drückt auf den Kolben im engeren Rohre, den sogenannten Druckkolben, dessen Querschnitt f sei, eine Kraft P. Der dadurch auf den Kolben in A ausgeübte Druck pflanzt sich durch das Verbindungsrohr E auf die Flüssigkeit im weiteren Zylinder B fort und übt auf die untere Fläche F des in diesem Zylinder befindlichen Kolbens, des Preßkolbens oder Treibkolbens, einen Druck Q aus, der sich zu dem auf den Druckkolben ausgeübten Drucke wie $F : f$ verhält. Diesen Druck benutzt man, um einen Widerstand H gegen eine feste Platte M zu pressen.

Bezeichnen L und l die Hebelarme CD und CG, so ist der auf den Druckkolben ausgeübte Druck P' durch die Gleichung

$$P' = \frac{L}{l} \cdot P$$

bestimmt. Da nun

$$Q : P' = F : f,$$

so ist

$$Q = \frac{F}{f} \cdot P' = \frac{F}{f} \cdot \frac{L}{l} \cdot P.$$

Sind d und D die Durchmesser des Druck- und des Preßkolbens, so ist

$$f = \frac{1}{4} \pi d^2; \; F = \frac{1}{4} \pi D^2,$$

und für Q erhält man den Wert

$$Q = \frac{L}{l} \cdot \frac{D^2}{d^2} \cdot P.$$

Der Flächendruck oder spezifische Druck aber beträgt

$$q = \frac{4 P'}{\pi d^2} = \frac{4 Q}{\pi D^2} \text{ Atmosphären.}$$

Beispiel. Bei einer hydraulischen Presse sei $L = 60$ cm; $l = 10$ cm; $D = 300$ mm; $d = 20$ mm, und $P = 10$ kg, dann ist

$$P' = \frac{60}{10} \cdot 10 \text{ kg} = 60 \text{ kg},$$

$$Q = \frac{60 \cdot 30^2 \cdot 10}{10 \cdot 2^2} \text{ kg} = 13500 \text{ kg}$$

und der spezifische Druck

$$q = 19{,}1 \frac{\text{kg}}{\text{qcm}} \text{ (Atmosphären).}$$

Anm. 1. Die hydraulische Presse kann als eine einfache Maschine angesehen werden, deren Körper durch die Flüssigkeit gebildet wird. Daß auch an ihr die goldene Regel der Mechanik gilt, läßt sich leicht zeigen: wird der Druckkolben um die Strecke s abwärts bewegt, so ist die Arbeit $P' \cdot s$ geleistet worden; dabei ist die Flüssigkeitsmenge $f \cdot s$ in den Zylinder B getrieben und der Preßkolben um die Strecke $s' = \frac{f \cdot s}{F}$ gehoben und damit die Arbeit $Q \cdot s'$ geleistet worden. Das aber ist gleich $P' \cdot s$, wie die obigen Formeln sofort zeigen. Was also an Kraft gewonnen worden ist, ist an Geschwindigkeit (Weg) verloren worden.

Noch sei hervorgehoben, daß ein großer Teil der Kraft durch die Reibung an den die Dichtung zwischen Kolben und Zylinder bewirkenden Lederstulpen verloren geht, so daß das Güteverhältnis (§ 400) etwa zu 0,70 bis 0,75 gerechnet werden kann.

Anm. 2. Die Figur stellt die hydraulische Presse nur in schematischer Weise dar; in der Praxis ist mit ihr eine Saug- und Druckpumpe verbunden, die beständig neues Wasser nach B treibt. Auch ist am Verbindungsrohre, um ein Zersprengen des Apparates zu vermeiden, ein Sicherheitsventil angebracht, das der Flüssigkeit Abfluß gestattet, sobald der Druck eine für die Sicherheit des Apparates zulässige Grenze überschreitet. Endlich gestattet ein Manometer jederzeit die Ablesung der Größe des Druckes.

454.

Die bisher besprochenen Eigenschaften der tropfbar flüssigen Körper, nämlich: der sehr geringe Zusammenhang und die daher entspringende äußerst leichte Trennung und Verschiebbarkeit ihrer kleinsten Teilchen, ferner die äußerst geringe Zusammendrückbarkeit und die Fortpflanzung des

gleichen Druckes, sind ganz unabhängig von der Anziehungskraft der Erde, d. h. die Flüssigkeiten würden diese Eigenschaften behalten, wenn sie auch gar kein Gewicht hätten. Da sie aber wie alle andern Körper der Schwerkraft (von der wir bisher abstrahieren konnten) unterworfen sind und dadurch Gewicht bekommen, so wollen wir jetzt auch dies mit in Betracht ziehen und sehen, welche Erscheinungen sich hieraus mathematisch voraussagen lassen.

Neunundzwanzigstes Buch.

Einfluß der Schwerkraft auf die tropfbar flüssigen Körper.

455.

Gestalt der freien Oberfläche tropfbar flüssiger Körper. Denken wir uns die Oberfläche einer in einem Gefäße befindlichen Flüssigkeitsmenge irgendwie gekrümmt (Fig. 192), so wirkt auf ein Teilchen A in dieser Oberfläche die Schwerkraft, die durch AB dargestellt werde. AB können wir in zwei Komponenten AC und AD zerlegen, von denen AC in der Richtung der Normale der Oberfläche, AD senkrecht dazu in der Tangentialebene an die Oberfläche wirkt. Die erstere Komponente AC wird durch den Widerstand der unter A befindlichen Flüssigkeitsteilchen aufgehoben und übt auf diese einen Druck aus, von dem weiterhin die Rede sein wird; die andere Komponente AD aber bewegt das Teilchen A wegen der leichten Verschiebbarkeit der Teilchen auf der durch die Tangentialebene gebildeten schiefen Ebene hinab. Es kann also so lange kein Gleichgewicht bestehen, solange AB in der angegebenen Weise in Komponenten zerlegt werden kann, solange also die Oberfläche der Flüssigkeit nicht überall senkrecht zu AB, der Richtung der Schwere, steht.

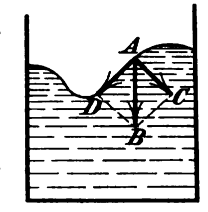


Fig. 192.

Da nun die Schwerkraft überall auf der Erde nach dem Erdmittelpunkte gerichtet ist, so ist die Oberfläche einer freien Flüssigkeit auf der Erdoberfläche kugelförmig. So

gestaltet ist daher die Oberfläche der Meere und großen Seen. Ist aber das Gefäß, in dem die Flüssigkeit sich befindet, klein, so können die Richtungen nach dem Erdmittelpunkte als parallel angesehen werden (vergl. § 249), und daher ist die Oberfläche (das Niveau) einer Flüssigkeit in einem Gefäße **horizontal***).

Durch die gleiche Überlegung schließt man, daß, wenn auf eine Flüssigkeit mit einer freien Oberfläche andere Kräfte als die Schwerkraft wirken, die Oberfläche dieser Flüssigkeit nur dann im Gleichgewichte ist, wenn an jeder Stelle die Resultante der wirkenden Kräfte normal zur Oberfläche ist.

Anm. Praktische Anwendung der unter dem alleinigen Einflusse der Schwere stets horizontalen Richtung einer freien Oberfläche macht man bei der Wasserwage oder Libelle zum Wagerechtstellen ebener Flächen und beim künstlichen Horizonte (Quecksilberhorizont) zum Messen von Sonnen- und Sternenhöhen.

456.

Innerer Druck einer Flüssigkeit. Im Gegensatze zu dem im vorigen Buche behandelten äußeren Drucke auf eine Flüssigkeit nennt man den Druck, den die Flüssigkeitsteilchen aufeinander infolge der Schwerkraft ausüben, den inneren Druck der Flüssigkeit.

Für diesen inneren Druck gilt zunächst das Gesetz, daß bei einer sich im Gleichgewichte befindlichen Flüssigkeit der Druck in einunddderselben Horizontalebene überall gleichgroß ist. Denn wäre das nicht der Fall, so würden wegen der leichten Verschiebbarkeit der Teilchen und der Fortpflanzung des Druckes nach allen Seiten und in gleicher Stärke sich die Teilchen der betreffenden Horizontalschicht verschieben, wodurch eine Störung des Gleichgewichts eintreten müßte.

Flächen gleichen Druckes nennt man Niveauflächen;

*) Die Erscheinung der Kapillarität, daß die Flüssigkeit an den Seitenwänden der Gefäße in die Höhe gezogen oder niedergedrückt wird, was eine Folge von Molekularkräften ist, lassen wir hier außer acht.

sie sind nach dem Vorigen bei einer in einem Gefäße befindlichen, nur der Schwerkraft unterworfenen Flüssigkeit horizontale Ebenen, in den Meeren dagegen zur Erdoberfläche konzentrische Kugelflächen.

Der innere Druck nimmt in den einzelnen Horizontalebenen von oben nach unten zu. Denken wir uns nämlich im Innern der Flüssigkeit ein horizontales Flächenstück f (Fig. 193), dessen Abstand von der Oberfläche h sein möge, so hat dieses Flächenstück das Gewicht einer Flüssigkeitssäule vom Volumen $f \cdot h$ zu tragen, also das Gewicht $f \cdot h \cdot s$, wenn s das Eigengewicht der Flüssigkeit ist. Nennt man den Abstand h einer horizontalen Schicht von der Oberfläche die Niveauhöhe oder Druckhöhe der Schicht, so ist der Schwerdruck auf eine horizonale Schicht proportional dem Querschnitte der Schicht und proportional ihrer Niveauhöhe.

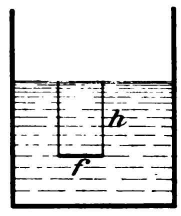


Fig. 193.

In abgekürzter Redeweise pflegt man den hydrostatischen Druck durch Angabe der Druckhöhe allein zu bezeichnen, so daß z. B. der hydrostatische Druck von 10 m Wasser den Druck einer Wassersäule von 10 m Höhe auf das Quadratzentimeter Fläche bedeutet.

Wie sich aber der äußere Druck in einer Flüssigkeit nach allen Richtungen mit gleicher Stärke fortpflanzt, so pflanzt sich auch der innere Druck mit gleicher Stärke nach allen Richtungen fort; er äußert sich daher für das Innere der Flüssigkeit nicht nur als ein Druck des Gewichtes der darüber lagernden Flüssigkeit in der Richtung der Schwerkraft vertikal nach unten als sogenannter Bodendruck, sondern auch nach allen seitlichen Richtungen als Seitendruck und in der Richtung von unten nach oben als sogenannter Auftrieb. Von diesen drei Wirkungen des Schwerdruckes soll im folgenden ausführlich gehandelt werden.

457.

Der Bodendruck ist der Druck, den die Bodenfläche eines mit einer Flüssigkeit gefüllten Gefäßes durch die Flüssigkeit erfährt.

Ist der Boden des Gefäßes **horizontal**, so gilt über die Größe des Bodendruckes der folgende Satz:

Der Bodendruck ist gleich dem Gewichte eines Flüssigkeitsprismas, dessen Grundfläche der Boden und dessen Höhe der Abstand des Bodens vom Spiegel der Flüssigkeit oder die Niveauhöhe des Bodens ist, welche Gestalt auch die Wände des Gefäßes haben mögen.

Sind die Seitenwände des Gefäßes vertikal, so ist der Satz selbstverständlich, denn die Flüssigkeit kann nicht an den Wänden des Gefäßes durch die Reibung getragen werden, sondern der Boden hat, da er die Flüssigkeit am Fallen hindert, ihr ganzes Gewicht zu tragen. Ist F die Größe der Bodenfläche, h ihre Niveauhöhe und s das Eigengewicht der Flüssigkeit, so ist der Bodendruck

$$P = F \cdot h \cdot s.$$

Hätte z. B. ein zylindrisches Gefäß einen Durchmesser $d = 120$ mm und wäre es bis zur Höhe $h = 10$ cm mit Wasser gefüllt, so wäre der Bodendruck

$$P = \frac{1}{4}\pi d^2 \cdot h = 1131 \text{ g};$$

wäre Quecksilber die Flüssigkeit, so wäre der Bodendruck, da $s = 13{,}6$ das spezifische Gewicht des Quecksilbers ist,

$$P = \frac{1}{4}\pi d^2 \cdot h \cdot s = 15{,}381 \text{ kg}.$$

Sind die Seitenwände des Gefäßes schief, so hat man im wesentlichen zwei Fälle zu unterscheiden: das Gefäß kann nach oben enger oder weiter werden. Nehmen wir zunächst an, daß das Gefäß sich nach oben nicht allmählich, sondern stufenförmig (in Absätzen) verengere, und daß Fig. 194 den Durchschnitt eines solchen Gefäßes darstelle.

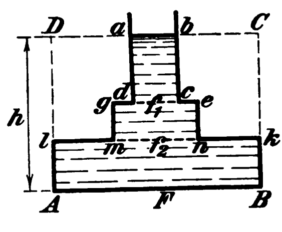


Fig. 194.

Die in dem oberen Teile $a\,b\,c\,d$ des Gefäßes, dessen Höhe $a\,d$ gleich h_1 und dessen Grundfläche $c\,d$ gleich f_1 sein möge, befind-

liche Flüssigkeit übt auf die Niveaufläche f_1 einen Druck aus, der die Größe

$$P_1 = f_1 \cdot h_1 \cdot s$$

hat. Dieser Druck pflanzt sich nach allen Richtungen fort und drückt also auch auf die Niveaufläche $m\,n$, die f_2 sei, so daß diese dadurch den Druck $P'_2 = P_1 \cdot \frac{f_2}{f_1} = f_2 \cdot h_1 \cdot s$ erfährt. Auf die Fläche f_2 drückt aber außerdem noch die Flüssigkeitssäule in dem Gefäßteile $e\,g\,m\,n$, dessen Höhe $g\,m = h_2$ sei, so daß der Gesamtdruck auf die Niveaufläche f_2 sich darstellt durch

$$P_2 = f_2 \cdot h_1 \cdot s + f_2 \cdot h_2 \cdot s = f_2\,(h_1 + h_2) \cdot s.$$

Dieser Druck pflanzt sich wieder nach allen Richtungen fort, gelangt auch zur Bodenfläche F und hat dort die Größe $P'_3 = P_2 \cdot \frac{F}{f_2} = F\,(h_1 + h_2) \cdot s$; der Gesamtdruck P auf den Boden setzt sich nun aus diesem Drucke P'_3 und dem Drucke der in dem Gefäßteile $k\,l\,A\,B$ von der Höhe $l\,A = h_3$ befindlichen Flüssigkeitsmenge zusammen, hat also den Wert

$$\begin{aligned} P &= F\,(h_1 + h_2) \cdot s + F \cdot h_3 \cdot s \\ &= F\,(h_1 + h_2 + h_3) \cdot s \\ &= F \cdot h \cdot s. \end{aligned}$$

Nun ist aber $F \cdot h \cdot s$ das Gewicht der zwischen senkrechten Wänden gedachten Flüssigkeitsmenge $A\,B\,C\,D$. Der Druck auf den Boden F ist also ganz derselbe als wenn die vertikalen Wände $A\,l$ und $B\,k$ bis zum Niveau $D\,C$ reichten und die gebrochenen Wände $a\,d$, $d\,g$, $g\,m$, etc. gar nicht vorhanden wären.

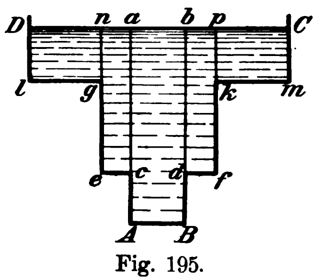


Fig. 195.

Wird das Gefäß nach oben stufenförmig weiter, hat es also etwa die in Fig. 195 im Durchschnitt dargestellte Gestalt, so drückt die Flüssigkeitssäule $D\,n\,g\,l$ auf den Boden $l\,g$, $n\,a\,c\,e$ auf den Boden $c\,e$, $b\,p\,f\,d$ auf den Boden $f\,d$, $C\,p\,k\,m$ auf den Boden $k\,m$, so daß auf den eigentlichen Gefäßboden $A\,B$ nur der Druck der Flüssigkeitssäule $A\,B\,b\,a$ wirkt, also der Druck

der auf den Boden F zwischen senkrechten Wänden befindlichen Flüssigkeitsmenge oder der Druck

$$P = F \cdot h \cdot s.$$

Stellt man sich nun vor, die stufenförmigen Absätze der Seitenwände würden immer kleiner und kleiner, so bleibt der Druck auf den Boden des sich nach oben verengenden oder erweiternden Gefäßes offenbar derselbe; die Formel

$$P = F \cdot h \cdot s$$

gilt daher auch noch, wenn die Anzahl der Stufen unendlich groß wird, wenn also die Stufen ganz verschwinden, die Seitenflächen ebene oder krumme Flächen werden und die Gefäße allmählich nach oben enger oder weiter werden.

Anm. 1. Aus dem bewiesenen Satze folgt, daß die Größe des Bodendruckes gar nicht von der im Gefäße vorhandenen Flüssigkeitsmenge, sondern lediglich von der Größe der Bodenfläche und der Niveauhöhe abhängt, so daß unter geeigneten Umständen eine kleinere Flüssigkeitsmenge einen größeren Bodendruck ausüben kann als eine größere. In

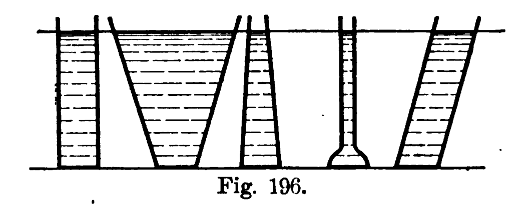


Fig. 196.

Fig. 196 sind die Durchschnitte einiger Gefäße dargestellt, die alle dieselbe Bodenfläche und die gleiche Niveauhöhe, sonst aber ganz verschiedene Gestalt haben; in allen ist der Bodendruck der gleiche, selbst dann wenn der Boden nicht senkrecht unter dem Niveau liegt.

Die experimentelle Bestätigung der Richtigkeit des Satzes durch den Haldatschen (Pascalschen) Apparat findet sich in jedem Lehrbuche der Experimentalphysik beschrieben und kann hier übergangen werden.

Stellt man die verschiedenen Gefäße auf eine Wage, so gibt diese natürlich für die in ihnen enthaltenen Flüssigkeitsmengen verschiedene Gewichte an. Bei Gefäßen mit vertikalen Wänden sind das Gewicht der Flüssigkeit und

der Bodendruck gleich, bei sich nach oben verengenden Gefäßen ist das Gewicht der Flüssigkeit kleiner als der Bodendruck, bei sich erweiternden Gefäßen wiegt die Flüssigkeit mehr als der Bodendruck beträgt. Wegen dieses scheinbaren Widerspruchs, der im folgenden seine Lösung finden wird, nennt man den Satz vom Bodendrucke auch das hydrostatische Paradoxon.

Anm. 2. Der Fall, daß der Boden des Gefäßes nicht horizontal, sondern schief gegen den Horizont ist, wird sich als ein besonderer Fall aus den Resultaten des folgenden Paragraphen ergeben.

458.

Der Seitendruck ist der Druck, den eine Flüssigkeit durch ihr Gewicht auf die Seitenwände des Gefäßes ausübt.

Dieser Druck ist senkrecht gegen die Wand, also bei Gefäßen mit vertikalen Wänden horizontal, bei sich nach oben verengenden Gefäßen schief nach oben, bei sich nach oben erweiternden Gefäßen schief nach unten gerichtet. Für seine Größe gilt das Gesetz:

Der Seitendruck ist gleich dem Gewichte eines Flüssigkeitsprismas, dessen Grundfläche die gedrückte Fläche und dessen Höhe der Abstand des Schwerpunktes der gedrückten Fläche von der Oberfläche oder die Niveauhöhe des Schwerpunktes ist.

Zum Beweise dieses Satzes denken wir uns die Seitenwand oder einen Teil A derselben in unendlich schmale horizontale Elementarstreifen zerlegt, die man als Rechtecke betrachten kann, und deren Inhalte $a_1, a_2, a_3, \ldots$ sein mögen. Die Streifen werden so schmal gedacht, daß der Druck auf alle Punkte eines Streifens konstant angenommen werden kann. Werden die Niveauhöhen der einzelnen Streifen mit $x_1, x_2, x_3, \ldots$ bezeichnet, und ist s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, so erfahren die einzelnen Elementarstreifen die Drucke $a_1 x_1 s$; $a_2 x_2 s$; $a_3 x_3 s$; . . ; der Druck auf die ganze Fläche A ist daher

$$a_1 x_1 s + a_2 x_2 s + a_3 x_3 s + \cdots = s \cdot \Sigma a \ x_i.$$

Das Produkt $a_i x_i$ ist aber das statische Moment des Elementarstreifens a_i in bezug auf die Ebene des Flüssigkeits-

spiegels, und $\Sigma a_i z_i$ die Summe der statischen **Momente** aller Elementarstreifen in bezug auf diese Ebene; **diese Summe** ist daher gleich dem statischen Momente der ganzen **Fläche** A in bezug auf diese Ebene, d. h. gleich dem **Produkte** $A \cdot z$, wenn z den Abstand des Schwerpunktes von A **vom Wasser**spiegel bezeichnet. Der Druck P auf den **Teil** A einer Seitenfläche ist daher

$$P = A \cdot z \cdot s,$$

womit der Satz allgemein bewiesen ist.

Zusatz. Der Druck auf eine beliebig gerichtete *ebene*, in eine Flüssigkeit getauchte Fläche bleibt also **immer derselbe**, wenn man sie um ihren Schwerpunkt beliebig *dreht*, z. B. auch in eine horizontale Lage bringt, so **daß** also der Druck auf eine vertikale Gefäßwand derselbe **ist**, *als* ob sie horizontal in der Niveauhöhe ihres Schwerpunktes läge.

Hat daher ein Gefäß keinen horizontalen, sondern **einen** schiefen Boden, so ist der Druck auf denselben eben*falls* $F \cdot h \cdot s$, wobei F die Größe des Bodens, h aber die **Ent**fernung des Schwerpunktes des Bodens von der Oberfläche der Flüssigkeit ist.

459.

Mittelpunkt des Druckes. Da die auf die Elementarstreifen normal zur Seitenwand drückenden, also parallelen Kräfte nicht gleich sind, vielmehr um so größer werden, je tiefer die Streifen unter der Oberfläche der Flüssigkeit liegen, so liegt auch offenbar der Mittelpunkt oder der Angriffspunkt der Resultante dieser parallelen Kräfte, der hier der Mittelpunkt des Druckes heißt, tiefer als der Schwerpunkt der gedrückten Fläche.

Zerlegen wir wieder die Seitenwand in horizontale Elementarstreifen, so ist der Mittelpunkt der parallelen Druckkräfte nach § 229 dadurch bestimmt, daß das statische Moment der in ihm angreifenden Summe der Einzelkräfte in bezug auf die Ebene der Flüssigkeitsoberfläche gleich der algebraischen Summe der statischen Momente der einzelnen

Kräfte ist. Bezeichnet also x die Niveauhöhe des gesuchten Mittelpunktes, so ist x durch die Gleichung

$$P \cdot x = s\,(a_1\, z_1{}^2 + a_2\, z_2{}^2 + \ldots a_n\, z_n{}^2)$$

bestimmt, da $a_i\, z_i{}^2$ das statische Moment des auf den Streifen a_i ausgeübten Druckes $a_i\, z_i$ in bezug auf die Ebene der Flüssigkeitsoberfläche ist. Setzt man für P den Wert $s \cdot \Sigma\, a_i\, z_i$ ein, so ergibt sich aus der Gleichung

$$x \cdot s \cdot \Sigma\, a_i\, z_i = s \cdot \Sigma\, a_i\, z_i{}^2$$

für x der Wert

$$x = \frac{\Sigma\, a_i\, z_i{}^2}{\Sigma\, a_i\, z_i}.$$

Im allgemeinen ist die weitere Bestimmung von x nur mit Hilfe der höheren Mathematik möglich. Doch kann die Bestimmung in einem besonderen Falle — dem praktisch wichtigsten — auf elementarem Wege durchgeführt werden.

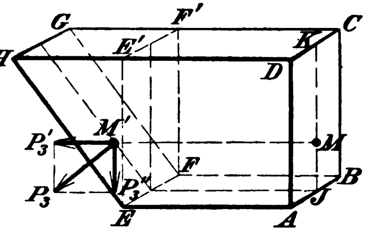


Fig. 197.

Ist nämlich die Seitenwand ein Rechteck $ABCD$ (Fig. 197), von dem zunächst angenommen werde, daß es rechtwinklig zur Grundfläche $ABFE$ des Gefäßes stehe, und ist das Gefäß, dessen Höhe $AD = h$ ist, vollständig mit Flüssigkeit gefüllt, so zerlege man das Rechteck $ABCD$ in Elementarstreifen von der Höhe $\frac{h}{n}$ durch Parallele zu AB. Ist dann $AB = a$, so ist die Größe eines jeden Streifens $a_i = a \cdot \frac{h}{n}$ und sein Abstand von der Oberfläche $z_i = \frac{ih}{n}$. Dadurch geht die obige Gleichung für x über in

$$x = \frac{a \cdot \frac{h}{n}\left(\left(\frac{h}{n}\right)^2 + \left(\frac{2\,h}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n\,h}{n}\right)^2\right)}{a \cdot \frac{h}{n}\left(\frac{h}{n} + \frac{2\,h}{n} + \ldots + \frac{n\,h}{n}\right)},$$

woraus folgt

$$x = \frac{\dfrac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3}}{\dfrac{1 + 2 + \ldots + n}{n^2}} \cdot h.$$

Läßt man nun n größer und größer werden, so ergibt sich, da nach § 282

$$\lim_{n=\infty} \frac{1^2 + 2^2 + \ldots + n^2}{n^3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n^2} = \frac{1}{2}$$

ist,

$$x = \frac{2}{3} h,$$

d. h. der Mittelpunkt des Druckes für eine rechteckige vertikale Wand von der Höhe h liegt $\frac{2}{3} h$ unter dem Spiegel der Flüssigkeit und zwar ist er der Punkt M, der die die Mitten der beiden horizontalen Seiten AB und DC verbindende Gerade JK so teilt, daß $KM = 2\,MJ$ ist.

Es ist nunmehr leicht einzusehen, daß dasselbe auch von der schräg stehenden rechteckigen Seitenwand $EFGH$ gilt; denn bezeichnet man den Winkel, unter dem die schräge Seitenwand gegen die vertikale gedachte Wand $EFF'E'$ geneigt ist, mit α und ist $h' = EH$ die Höhe des Rechtecks $EFGH$, so ist

$$a_i = a \cdot \frac{h'}{n}; \quad x_i = \frac{i\,h'}{n} \cdot \frac{1}{\cos\alpha},$$

und es ergibt sich

$$x = \frac{2}{3} h' \cdot \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{2}{3} h.$$

460.

Aufgabe. Das in Fig. 197 abgebildete Gefäß, dessen horizontaler Boden das Rechteck $ABFE$ mit den Seiten $AB = a$ und $AE = b$ ist, dessen Seitenflächen zwei Rechtecke, das vertikale mit der Kante $AD = c$ und das schräge

mit der Kante $EH = d$, und zwei kongruente vertikale Trapeze sind, ist mit Wasser gefüllt. Es sollen der Bodendruck und die Drucke auf die Seitenwände berechnet werden.

$$a = 30 \text{ cm}; \; b = 60 \text{ cm}; \; c = 40 \text{ cm}; \; d = 50 \text{ cm}.$$

Auflösung. Der Druck P_1 auf den Boden ist

$$P_1 = a \cdot b \cdot c = 30 \cdot 60 \cdot 40 \text{ g} = 72 \text{ kg}.$$

Der Druck P_2 auf die vertikale rechteckige Seitenwand ist

$$P_2 = a \cdot c \cdot \frac{1}{2} c = 30 \cdot 40 \cdot 20 \text{ g} = 24 \text{ kg}.$$

Der normale Druck P_3 auf die schräge rechteckige Seitenwand ist

$$P_3 = a \cdot d \cdot \frac{1}{2} c = 30 \cdot 50 \cdot 20 \text{ g} = 30 \text{ kg}.$$

Der Druck P_4 endlich, den jede der vertikalen Seitenflächen erfährt, die die Gestalt eines Trapezes haben, beträgt, da $HE' = \sqrt{d^2 - c^2} = 30$ cm, mithin $DH = e = 90$ cm ist, unter Berücksichtigung von § 266

$$P_4 = \frac{b + e}{2} \cdot c \cdot \frac{c}{3} \cdot \frac{e + 2b}{e + b} = \frac{60 + 90}{2} \cdot 40 \cdot \frac{40}{3} \cdot \frac{210}{150} \text{ g}$$
$$= 56 \text{ kg}.$$

Der Mittelpunkt des Druckes liegt für beide rechteckigen Wände gleich tief unter dem Wasserspiegel, nämlich

$$\frac{2}{3} c = \frac{2}{3} \cdot 40 \text{ cm} = 26\frac{2}{3} \text{ cm}$$

tief. In dieser Tiefe wäre ein um das Gefäß zum Schutze gegen das Zerbersten zu legender Streifen von Eisenblech am vorteilhaftesten angebracht.

Anm. Zerlegt man den normalen Druck P_3 auf die schräge Seitenwand in zwei Komponenten P_3' und P_3'' in horizontaler und vertikaler Richtung, so ist der horizontale Druck auf beide rechteckige Seitenflächen gleich groß; wie aus den ähnlichen Dreiecken $M' P_3' P_3$ und $E E' H$ folgt, ist nämlich

$$P_3' : P_3 = c : d,$$

woraus

$$P_3' = \frac{c}{d} \cdot P_3 = a \cdot c \cdot \frac{1}{2} c = P_2.$$

32*

folgt. Für die vertikale Komponente hat man

$$P_3'' : P_3 = \sqrt{d^2 - c^2} : d$$

oder

$$P_3'' = \frac{\sqrt{d^2 - c^2}}{d} \cdot P_3 = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sqrt{d^2 - c^2}.$$

Dies aber ist das Gewicht der von den beiden parallelen dreieckigen Wänden $E\,E'\,H$ und $F\,F'\,G$ und den beiden Rechtecken $E\,F\,G\,H$ und $E\,F\,F'\,E'$ begrenzten Wassermenge, nämlich

$$\frac{1}{2} c \cdot \sqrt{d^2 - c^2} \cdot a = \frac{40}{2} \cdot 30 \cdot 30 \text{ g} = 18 \text{ kg}.$$

Mit 18 kg wird also das Gefäß — vom Gewichte des Gefäßes abgesehen — stärker auf eine Wagschale als das darin enthaltene Wasser auf den Boden drücken.

Wäre die schräge Wand bei gleicher Neigung gegen die Horizontale statt nach außen nach innen gekehrt, so hätte P_3' die Richtung nach oben, der Druck auf die Wagschale wäre um 18 kg geringer als der Bodendruck.

Hierin findet das hydrostatische Paradoxon seine Erklärung. Vergl. hierzu § 468, wo dieser Gegenstand nochmals berührt wird.

461.

Aufgabe. In einer vertikalen Seitenwand eines mit Wasser gefüllten Gefäßes befindet sich eine rechteckige Klappe mit zwei horizontalen Seitenlinien $A\,B$ und $D\,C$ (Fig. 198). Die Klappe ist um eine horizontale Achse $M\,N$ so drehbar, daß der obere Teil sich nach auswärts, der untere sich also nach einwärts bewegen kann. Es ist $A\,D = a$ und die Niveauhöhe von A, die Strecke $A\,E = b$; es soll angegeben werden, in welcher Höhe x über $D\,C$ die Achse $M\,N$ angebracht sein muß, damit die Klappe unter dem Drucke des Wassers geschlossen bleibt.

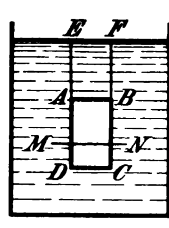


Fig. 198.

Auflösung. Soll die Klappe geschlossen bleiben, so muß der Druck des Wassers auf die Klappe durch die Achse $M\,N$ aufgehoben werden; es muß also der Mittelpunkt des Druckes

in die Achse MN fallen. Die Breite $AB = c$ der Klappe kommt beim Ergebnisse nicht weiter in Betracht.

Derselbe Weg, den wir im § 459 eingeschlagen haben, führt uns auch hier zum Ziele. Nach § 458 ist der Druck P auf die Klappe

$$P = a \cdot c \cdot \left(\frac{a}{2} + b\right),$$

folglich das statische Moment des Gesamtdruckes in bezug auf die Ebene des Wasserspiegels

$$a \cdot c \cdot \left(\frac{a}{2} + b\right) \cdot (a + b - x).$$

Dieses Moment muß gleich sein der Summe der statischen Momente der einzelnen Druckkräfte. Zerlegen wir die Fläche $ABCD$ in n horizontale Streifen von der Breite $\frac{a}{n}$, dann ist das Moment des $i$ten Streifens

$$\frac{a}{n} \cdot c \cdot \left(\frac{i\,a}{n} + b\right)^2$$

Bildet man die Summe dieser statischen Momente, indem man $i = 1, 2, \ldots n$ setzt, so erhält man die Momentengleichung

$$a \cdot c \cdot \left(\frac{a}{2} + b\right)(a + b - x) = \frac{a}{n} \cdot c \cdot \Sigma \left(\frac{i\,a}{n} + b\right)^2,$$

die auch geschrieben werden kann

$$\frac{a + 2\,b}{2}(a + b - x) = a^2 \cdot \Sigma \frac{i^2}{n^3} + 2\,a\,b \cdot \Sigma \frac{i}{n^2} + \frac{n \cdot b^2}{n}.$$

Läßt man n über alle Grenzen wachsen, so geben die Gleichungen des § 282

$$\frac{a + 2\,b}{2}(a + b - x) = \frac{1}{3}\,a^2 + a\,b + b^2 = \frac{a^2 + 3\,ab + 3\,b^2}{3},$$

aus der nach einigen leichten Rechnungen

$$x = \frac{a}{3} \cdot \frac{a + 3\,b}{a + 2\,b}$$

folgt. Bezeichnet y die Entfernung der Drehachse MN vom Niveau, so ist

$$y = a + b - x = \frac{2}{3} \cdot \frac{a^2 + 3\,a\,b + 3\,b^2}{a + 2\,b}.$$

Steigt das Wasser über das Niveau EF, so nimmt der Druck auf dem obern Teile $ABNM$ der Klappe mehr zu als auf dem untern Teile: die Klappe öffnet sich so lange bis das Wasser bis zum Niveau EF wieder gefallen ist.

Für die Zahlenwerte

$$a = 120 \text{ cm}; \; b = 180 \text{ cm}$$

erhält man aus obigen Gleichungen

$$x = 55 \text{ cm und } y = 245 \text{ cm}.$$

462.

An dem im § 460 ausführlich behandelten Beispiele hat sich ergeben, daß der horizontale Seitendruck einer Flüssigkeit auf zwei gegenüberstehende Gefäßwände gleich groß ist. Daß dasselbe in jedem ringsum geschlossenen Gefäße der Fall sein muß, folgt schon durch die Überlegung, daß das Gefäß unter verschiedenem Seitendrucke auf die Wände sich bewegen müßte; da es aber in Ruhe bleibt, so wird der Seitendruck auf die eine Wand durch den gleichen Druck auf die entgegengesetzte Wand aufgehoben.

Wird aber in die eine Gefäßwand eine Öffnung gemacht, durch die die Flüssigkeit ausfliessen kann, so wird diese Wand und damit auch der Druck darauf kleiner, während der Druck auf die gegenüberstehende Wand unverändert bleibt; letzterer wird also durch den Druck auf die erstere Wand nur zum Teile aufgehoben, so daß der Überschuß Bewegung erzeugen und so sichtbar werden kann.

Kann man z. B. eine in der Nähe des Bodens eines zylindrischen Gefäßes befindliche Seitenöffnung nach Belieben schließen und öffnen, und hängt man das Gefäß bei verschlossener Öffnung an einem Faden auf, so wird es vertikal hängen; öffnet man jetzt den Verschluß, so daß die Flüssigkeit ausfließen kann, so neigt sich das Gefäß nach der dem ausfließenden Strahle entgegengesetzten Richtung. — Setzt man ein Gefäß auf einen großen Kork und läßt es auf Wasser schwimmen, so bewegt es sich, wenn aus einer Seitenöffnung Flüssigkeit ausfließt, geradlinig in der der Ausflußrichtung entgegengesetzten Richtung.

Auf diesem sogenannten Reaktionsdrucke (Rückdrucke)

beruht das Segnersche Wasserrad. Dasselbe besteht aus einem größeren Hohlzylinder zur Aufnahme von Wasser, der um eine vertikale Achse leicht drehbar ist. Am untern Ende ist dieser Zylinder mit zwei oder mehreren horizontalen Röhren versehen, die seitliche Ausflußöffnungen haben, deren Mündungen sämtlich nach derselben Seite gerichtet sind. Sobald das Wasser aus diesen Mündungen ausfließt, wird der Zylinder durch den Drucküberschuß in, den ausströmenden Wasserstrahlen entgegengesetzt gerichtete, Rotation versetzt. — Die in der Praxis gebrauchten schottischen oder Reaktions-Turbinen (Withelawsche Turbinen) beruhen auf demselben Prinzipe, nur sind die Ausflußröhren (in der Regel drei) S-förmig gebogen, wodurch erreicht wird, daß das Wasser allmählich ausfließt und einen Teil seiner Geschwindigkeit an die Ausflußröhren überträgt.

Auch die sich auf Gestellen drehenden Spritzrädchen, die zum Bespritzen von Rasenflächen dienen, und die sich drehenden Mundstücke von Springbrunnen beruhen auf demselben Prinzipe.

Über die Größe des Reaktionsdruckes vergl. § 506.

463.

Kommunizierende Gefäße heißen zwei oder mehrere aufrecht stehende offene Gefäße, die unten durch ein Quergefäß so miteinander verbunden sind, daß eine Flüssigkeit frei aus dem einen in jedes andere fließen kann. Weil die Gefäße in vielen Fällen die Form von Röhren haben, nennt man sie auch häufig kommunizierende Röhren.

Gießt man in ein solches System kommunizierender Gefäße eine Flüssigkeit, so gilt der Satz, daß die freien Oberflächen der Flüssigkeit in allen Gefäßen in derselben Horizontalebene (in einerlei Niveau) liegen, wie verschieden auch die Weiten und die Gestalten der Gefäße sein mögen.

Beim Beweise dieses Satzes wollen wir uns auf den Fall beschränken, daß wir zwei Gefäße A und B (Fig. 199) haben; die Schlüsse sind bei mehreren Gefäßen genau die gleichen.

Denken wir uns an irgend einer Stelle des Verbindungsrohres einen Querschnitt Q gelegt, legen durch den Schwerpunkt von Q eine Horizontalebene und bezeichnen mit h_1 und h_2 die Niveauhöhen des Schwerpunktes von Q in bezug auf die Flüssigkeiten in den Gefäßen A und B, so ist der Druck, den Q von A aus erfährt, $P_1 = Q \cdot h_1 \cdot s$ und der, den Q von B aus erfährt, $P_2 = Q \cdot h_2 \cdot s$, wenn s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit ist. Da im Falle des Gleichgewichts beide Drucke einander gleich sein müssen, so ist

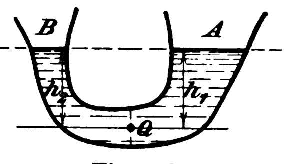


Fig. 199.

$$P_1 = P_2 \text{ oder } Q \cdot h_1 \cdot s = Q \cdot h_2 \cdot s,$$

woraus die Behauptung

$$h_1 = h_2$$

folgt.

464.

Von den vielfachen praktischen Anwendungen der kommunizierenden Gefäße seien nur einige der wichtigsten herausgehoben.

Die Kanalwage oder das Nivellierinstrument ist ein etwa $\frac{1}{2}\,m$ langes, mit Wasser gefülltes und auf einem Gestelle in wagerechter Lage drehbares Metallrohr, das an seinen Enden zwei aufrecht stehende Glaszylinder trägt, deren Wasserspiegel eine wagerechte Gesichtslinie bilden.

Die Wasserstandsmesser an Dampfkesseln, Gasometern und dergl. sind vertikale Glasröhren, deren oberes und unteres Ende mit dem höchsten und tiefsten Teile des Wasserbehälters luftdicht verbunden sind, und die die Standhöhe des Wassers in dem Behälter anzeigen.

Das Rohrnetz einer Wasserleitung ist ein System kommunizierender Gefäße, durch die das Wasser zu jeder Stelle hingeleitet wird, die nicht höher liegt als die Quelle (als das Niveau des Bassins oder des Reservoirs).

Aus dem Gesetze der kommunizierenden Röhren erklärt sich das Steigen und Fallen des Grundwassers, des

Wassers in Teichen, die sich in der Nähe von Flüssen befinden, die Entstehung der Quellen und artesischen Brunnen.

465.

Gießt man in zwei kommunizierende Gefäße zwei verschiedene Flüssigkeiten von verschiedenen spezifischen Gewichten, die sich nicht mischen, z. B. Quecksilber und Wasser, so daß die schwerere das Verbindungsrohr und den untern Teil beider Gefäße ausfüllt, so ist das Niveau der Flüssigkeiten in beiden Gefäßen verschieden hoch, und zwar ist das Niveau der spezifisch leichteren Flüssigkeit höher als das der spezifisch schwereren.

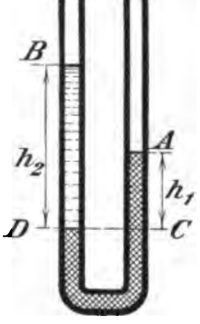


Fig. 200.

Ist das Gefäß A (Fig. 200) mit der spezifisch schwereren Flüssigkeit gefüllt und denken wir uns durch die Berührungsstelle der beiden Flüssigkeiten im Gefäße B die Horizontalebene $C\,D$ gelegt, so muß im Falle des Gleichgewichts in dieser Horizontalen überall gleicher Druck herrschen. Ist s_1 das spezifische Gewicht der schwereren Flüssigkeit und h_1 die Höhe $A\,C$, s_2 das spezifische Gewicht der leichteren Flüssigkeit und h_2 die Höhe BD, so ist der Druck auf 1 qcm der Horizontalebene im Gefäße A gleich $h_1 \cdot s_1$ und im Gefäße B gleich $h_2 \cdot s_2$; diese Drucke müssen gleich sein, also ist

$$h_1 \cdot s_1 = h_2 \cdot s_2$$

oder

$$h_1 : h_2 = s_2 : s_1,$$

d. h. in kommunizierenden Gefäßen verhalten sich die vom Niveau der Trennungsfläche aus gerechneten Höhen zweier verschiedenen Flüssigkeiten umgekehrt wie die spezifischen Gewichte derselben.

Man kann dieses Gesetz zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes einer Flüssigkeit benutzen.

Gießt man z. B. in eine U-förmig gebogene graduierte Röhre zunächst Quecksilber, dann in den einen Schenkel Wasser bis zur Höhe von 34 cm, so beobachtet man, daß das Quecksilberniveau 2,5 cm über dem Niveau der Scheidungs-

fläche der Flüssigkeiten steht; hieraus ergibt sich das spezifische Gewicht des Quecksilbers aus

$$34 : 2{,}5 = s_2 : 1$$

zu

$$s_2 = \frac{34}{2{,}5} = 13{,}6.$$

466.

Aufgabe I. In einem zylindrischen Wasserbehälter befindet sich ein wasserdicht schließender Kolben, dessen Radius r sei; wie groß muß eine auf diesen Kolben drückende Kraft sein, um in einem mit dem Behälter kommunizierenden Rohre das Wasser in der Höhe h über dem Niveau des Kolbens zu halten?

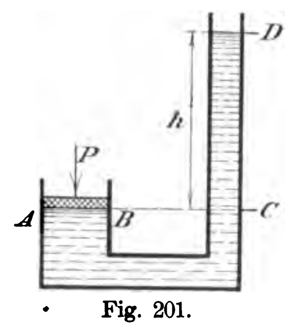


Fig. 201.

Auflösung. Ist $A\,B\,C$ das Niveau des Kolbens, $CD = h$ (Fig. 201), dann hält die Wassersäule $C\,D$ einer ebenso hohen Säule im andern Gefäße das Gleichgewicht, folglich muß die Kraft P dem Gewichte dieser letzteren Säule gleich sein, oder

$$P = \pi\, r^2 \cdot h.$$

Die Weite und Form des Rohres $C\,D$ kommt dabei nicht weiter in Betracht.

Ist $r = \frac{1}{2}$ m, $h = 20$ m, so ist $P = 15708$ kg.

Anm. Umgekehrt kann man durch die Wassersäule $C\,D$ auf den beweglichen Kolben $A\,B$ genau denselben Druck ausüben und den Kolben durch diesen Druck in die Höhe heben, wie dies beim hydraulischen Aufzuge in der Praxis benutzt wird.

Aufgabe II. Zwei kommunizierende prismatische Gefäße sind bis zur Höhe $A\,D$ mit Wasser gefüllt. Über der hori-

zontalen Klappe AB steht das Wasser in dem engeren Gefäße noch bis zur Höhe $AE = h$; wie hoch wird nach dem Öffnen der Klappe AB das Wasser in dem andern Gefäße über das Niveau CD steigen, wenn F_1 und F_2 die Querschnitte der Gefäße sind (Fig. 202).

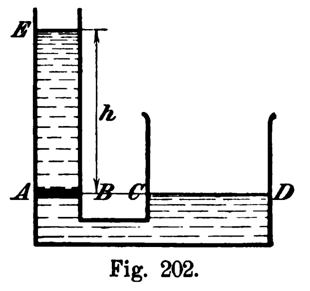


Fig. 202.

Auflösung. Das in dem prismatischen Gefäße AE befindliche Quantum Wasser muß sich in beide prismatische Gefäße so verteilen, daß sich in beiden das Niveau um die gesuchte Höhe x hebt, also ist

$$(F_1 + F_2)\, x = F_1 \cdot h,$$

woraus

$$x = \frac{F_1}{F_1 + F_2} \cdot h$$

folgt.

467.

Der Auftrieb ist der in einer Flüssigkeit von unten nach oben vorhandene Druck.

Von ihm gilt das Gesetz, daß er an jeder Stelle gleich dem an dieser Stelle von oben nach unten wirkenden Bodendrucke ist, so daß, wenn f ein horizontales Flächenstück mit der Niveauhöhe h ist, der auf dieses Flächenstück von unten wirkende Auftrieb der Flüssigkeit vom spezifischen Gewichte s die Größe $f \cdot h \cdot s$ hat.

Bereits im § 456 ist nämlich ausgeführt, daß der Druck, den das horizontale Flächenstück f durch die darüber lagernde Flüssigkeitsmenge von oben nach unten erfährt, sich nach allen Richtungen fortpflanzt. Er pflanzt sich daher auch auf den Boden und von diesem nach dem Gesetze der Wechselwirkung in gleicher Stärke rückwärts nach oben fort. Bodendruck und Auftrieb heben sich deshalb an jeder Stelle im Innern der Flüssigkeit auf; gäbe es den Auftrieb nicht, so könnte an keiner Stelle im Innern der Flüssigkeit unter der alleinigen Wirkung des Bodendrucks Gleichgewicht sein.

Der Auftrieb rührt aber nicht nur von dem Teile der Flüssigkeit her, der sich über einem Flächenstücke befindet,

sondern auch von der Flüssigkeit, die sich über der ganzen horizontalen Ebene befindet, von der das Flächenstück f ein Teil ist. Der Auftrieb ist also auch noch vorhanden, wenn man die über einem Flächenstücke vorhandene Flüssigkeit wegnimmt und durch einen festen Körper ersetzt; ja in diesem Falle ist der Auftrieb besonders erkennbar zu machen und z. B. in folgender Weise experimentell nachweisbar.

Ein auf beiden Seiten offener Glaszylinder mit eben geschliffenem Rande, wird auf der unteren Seite durch eine ebene Metall- oder Glasplatte verschlossen, indem man die Platte mit Hülfe eines durch den Zylinder gehenden Fadens anzieht. Taucht man nun den Zylinder unter Wasser, so fühlt man nicht nur deutlich den Widerstand, sondern erkennt ihn daran, daß die Platte nicht abfällt, wenn man den Faden losläßt, sondern fest an den Zylinder angedrückt wird, und zwar um so mehr, je tiefer man den Zylinder eintaucht. Gießt man nun in den Zylinder (etwas angefärbtes) Wasser, so fällt die Platte erst ab, wenn der Zylinder nahezu*) bis zur Höhe des äußeren Wasserspiegels gefüllt ist.

468.

Der Auftrieb erklärt nun auch das hydrostatische Paradoxon vollständig.

In dem in Fig 203 im Durchschnitt abgebildeten zylindrischen Gefäße, das mit Flüssigkeit vom spezifischen Gewichte s gefüllt ist, beträgt der Druck auf den Boden AB, wie aus § 457 bekannt, $f_2 (h_1 + h_2) \cdot s$, während das Gewicht der Flüssigkeit nur $(f_1 . h_1 + f_2 . h_2) \cdot s$ ist. Der Druck $f_1 . h_1 . s$ des oberen Gefäßes $EFGH$ auf die Fläche f_1 wirkt aber als Auftrieb auf die ringförmige Fläche CD und hat die Größe $(f_2 - f_1) \cdot h_1 \cdot s$; dieser Auftrieb wirkt aber dem Bodendrucke entgegen, so daß beide sich teilweise aufheben; ihre alge-

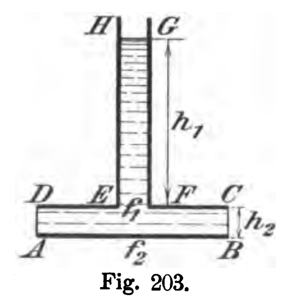


Fig. 203.

*) Da die Platte etwas schwerer ist als das gleiche Volumen Wasser, so kann die Flüssigkeit innen nicht genau so hoch steigen wie außen.

braische Summe aber ist

$$f_2 (h_1 + h_2) \cdot s - (f_2 - f_1) \cdot h_1 \cdot s = f_2 h_2 \cdot s + f_1 \cdot h_1 \cdot s,$$

also gleich dem Gewichte der Flüssigkeit.

Ist z. B. $f_1 = 1$ qcm; $h_1 = 2$ m; $f_2 = 900$ qcm, $h_2 = 10$ cm und das spezifische Gewicht der Flüssigkeit (Petroleum) $s = 0{,}8$, so wiegt die Flüssigkeit im oberen engen Gefäße $1 \cdot 200 \cdot 0{,}8$ g = 160 g, die im unteren weiteren Gefäße $900 \cdot 10 \cdot 0{,}8$ g = 7200 g, so daß das ganze Gewicht der Flüssigkeit 7,360 kg beträgt. Der Druck auf den Boden AB aber beträgt $900 \cdot 210 \cdot 0{,}8$ g = 151,200 kg, und der nach oben gerichtete Auftrieb auf die Ringfläche CD hat die Größe $899 \cdot 200 \cdot 0{,}8$ g = 143,840 kg. Die Differenz aus Bodendruck und Auftrieb ist

$$151{,}200 \text{ kg} - 143{,}840 \text{ kg} = 7{,}360 \text{ kg},$$

gleich dem Gewichte der Flüssigkeit.

In Verbindung mit den Bemerkungen in § 457 erhält man nunmehr das Gesetz:

Das Gewicht einer Flüssigkeit ist die algebraische Summe aus dem Bodendrucke und dem Wanddrucke, und deshalb ist der Bodendruck von dem durch eine Wage angegebenen Gewichte der Flüssigkeit verschieden; nur bei senkrechten Gefäßwänden ist die Resultante des Wanddruckes Null, also der Bodendruck gleich dem Gewichte der Flüssigkeit.

In diesem Satze ist nunmehr die vollständige Erklärung des hydrostatischen Paradoxons enthalten.

469.

Das Archimedische Prinzip. Taucht man einen starren Körper in eine Flüssigkeit, so wirkt der hydrostatische Druck an jeder Stelle senkrecht zur Oberfläche des eingetauchten Körpers. Um das Resultat aller dieser Druckwirkungen übersehen zu können, betrachten wir zunächst den einfachsten Fall, daß der Körper die Gestalt eines geraden Prismas habe, der mit vertikalen Seitenkanten in die Flüssigkeit getaucht werde (Fig. 204).

Da der Druck in derselben Horizontalebene EF überall der gleiche ist, so heben sich die horizontalen Drucke an je zwei in derselben horizontalen Ebene liegenden Stellen der vertikalen Seitenflächen auf; anders verhalten sich aber die Druckwirkungen auf die horizontalen Endflächen. Da nämlich der Druck mit der Niveauhöhe zunimmt, so wird die untere Grundfläche AB stärker durch den Auftrieb nach oben gedrückt, als die obere CD durch den Bodendruck nach unten.

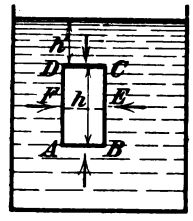


Fig. 204.

Ist F die Größe der Grundflächen des Prismas und s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit, so drückt auf AB der Auftrieb

$$F \cdot (h + h') \cdot s$$

nach oben und auf CD der Bodendruck

$$F \cdot h' \cdot s$$

nach unten. Die Differenz beider ist

$$F \cdot h \cdot s;$$

dies aber ist das Gewicht der vom starren Körper verdrängten Flüssigkeitsmenge.

Da man sich einen beliebigen Körper in unendlich viele, unendlich dünne, senkrechte Prismen zerlegt denken kann, so gilt das gefundene Resultat für jeden beliebig gestalteten Körper.

Die berechnete Differenz zwischen Auftrieb und Bodendruck wirkt von unten nach oben, also dem Gewichte des Körpers entgegen und bewirkt daher einen scheinbaren Gewichtsverlust des Körpers nach dem Gesetze:

Jeder in eine Flüssigkeit getauchte Körper verliert von seinem Gewichte so viel, als das Gewicht der von ihm verdrängten Flüssigkeitsmenge beträgt.

Dieser Satz wird nach seinem Entdecker (220 v. Chr.) das Archimedische Prinzip genannt.

Anm. Wir sagten, der Körper erleide einen „scheinbaren“ Gewichtsverlust, weil durch das Eintauchen die Wirkung der Schwere nicht geändert, sondern nur ein Teil der Schwere durch den Auftrieb der Flüssigkeit aufgehoben wird,

indem die Flüssigkeit einen Teil des Gewichtes des eingetauchten Körpers gleichsam trägt.

Bemerkt sei ferner noch, daß man vielfach nicht nur, wie wir es getan haben, den in einer Flüssigkeit von unten nach oben herrschenden Druck Auftrieb nennt, sondern in prägnantem Sinne mit dem Worte „Auftrieb eines Körpers" die Resultante der gesamten hydrostatischen Druckwirkungen des in eine Flüssigkeit getauchten Körpers bezeichnet, d. h. den Überschuß des Druckes, den der Körper von unten erfährt, über den Druck, den er von oben zu erleiden hat.

470.

Zum experimentellen Nachweise des Archimedischen Prinzipes benutzt man einen massiven Metallzylinder der genau in einen zweiten hohlen Metallzylinder paßt, und eine Wage, deren eine Wagschale hoch aufgehängt ist, und unten einen Haken hat (hydrostatische Wage). Auf diese kurze Wagschale stellt man den Hohlzylinder und hängt den Vollzylinder mittelst eines möglichst feinen Drahtes an den Haken, so daß er in ein darunter gestelltes leeres Wasserglas hineinhängt, und äquilibriert die Wage durch auf die andere Wagschale gelegte Gewichte. Gießt man jetzt Wasser in das Glas, so daß der Vollzylinder ganz in das Wasser eintaucht, so wird das Gleichgewicht der Wage gestört, indem die kurze Wagschale steigt; das Gleichgewicht wird aber dadurch wieder hergestellt, daß man den Hohlzylinder mit Wasser füllt.

In anderer Anordnung kann man diesen Versuch auch folgendermaßen anstellen: auf die eine Wagschale setzt man ein mit Wasser gefülltes Glas, auf die andere den Hohlzylinder und so viele Gewichte, daß Gleichgewicht herrscht; taucht man dann den an einem Faden hängenden Vollzylinder in das Wasserglas, so sinkt die Wage auf dieser Seite, kommt aber wieder ins Gleichgewicht, wenn man den Hohlzylinder auf der andern Seite voll Wasser gießt. Hierbei nimmt also das Gefäß, in das ein Körper getaucht wird, so viel an Gewicht zu, als die vom Körper verdrängte Flüssigkeit wiegt (als der Auftrieb des Körpers beträgt). Die Flüssigkeit steigt nämlich in dem Glase um so viel, als das Volumen des Körpers beträgt, und

das Gewicht steigt daher um so viel, als hätte man ein gleiches Volumen Wasser hinzugegossen.

471.

Praktische Anwendung vom Archimedischen Prinzipe macht man zur Bestimmung des Volumens eines unregelmäßig gestalteten festen Körpers.

Wiegt der Körper p g, in Wasser getaucht p' g, so ist sein Gewichtsverlust gleich dem Gewichte der von ihm verdrängten, ihm volumengleichen Wassermenge. Da das Eigengewicht des Wassers 1 g ist, so ist das Volumen V der verdrängten Wassermenge und auch des Körpers

$$V = p - p'$$

oder der im Wasser beobachtete Gewichtsverlust eines Körpers in Grammen gibt sein Volumen in Kubikzentimetern an.

Beispiel. Ein Stück Marmor wiegt $p = 2$ kg, in Wasser getaucht nur $p' = 1{,}285$ kg; sein Volumen V beträgt

$$V = (2000 - 1285) \text{ ccm} = 715 \text{ ccm}.$$

472.

Eine zweite praktische Anwendung des Archimedischen Prinzipes ist die Bestimmung des spezifischen Gewichtes fester Körper.

Hat ein fester Körper das Volumen v ccm und ist s g sein Eigengewicht, so ist das Gewicht p des Körpers $p = v \cdot s$ g. Wird dieser Körper in eine Flüssigkeit vom Eigengewichte s_1 g getaucht, so wiegt die von ihm verdrängte Flüssigkeitsmenge $v \cdot s_1$ g, so daß der Gewichtsverlust p' des Körpers $p' = v \cdot s_1$ g ist. Die Division der beiden Gleichungen ergibt

$$s = \frac{p}{p'} \cdot s_1.$$

Ist der Körper, dessen spezifisches Gewicht bestimmt werden soll, in Wasser unlöslich und schwerer als Wasser, so bestimmt man seinen Gewichtsverlust p' in Wasser und hat, da das Eigenwicht des Wassers 1 g ist,

$$s = \frac{p}{p'},$$

d. h. das spezifische Gewicht ist gleich dem Quotienten aus dem absoluten Gewichte des Körpers und seinem Gewichtsverluste im Wasser.

Ist der Körper leichter als Wasser, so verbindet man ihn mit einem bekannten Metall-(Blei-)Stücke, taucht ihn in Wasser und bestimmt den Gewichtsverlust, den die Verbindung beider Körper erfährt; subtrahiert man davon den bekannten Gewichtsverlust des Metallstücks, so erhält man den Gewichtsverlust des Körpers und dann aus obiger Formel sein spezifisches Gewicht.

Ist der Körper im Wasser löslich, so taucht man ihn in eine Flüssigkeit von bekanntem spezifischen Gewichte s_1, in der er unlöslich ist, z. B. Kochsalz in Terpentinöl, und bestimmt den Gewichtsverlust.

Beispiel. Ein Steinblock wiegt $p = 60$ kg, unter Wasser aber nur $p_1 = 40$ kg; wie groß ist das spezifische Gewicht der Steinart?

Antwort. Da der Gewichtsverlust $p' = p - p_1 = 20$ kg ist, so ist das gesuchte spezifische Gewicht

$$s = \frac{60}{20} = 3.$$

Anm. Bei genauen Bestimmungen ist der Einfluß der Temperatur auf das Volumen der Körper zu berücksichtigen; man reduziert daher das Volumen des Wassers auf das Volumen bei 4°, wo das Wasser seine größte Dichte hat, das der festen Körper auf 0° oder auf die normale Zimmertemperatur von 15°.

473.

Das Schwimmen der Körper. Wird ein fester Körper, dessen Volumen V und dessen Eigengewicht s ist, in eine Flüssigkeit vom Eigengewichte s_1 getaucht, so wirken an ihm zwei Kräfte: das im Schwerpunkte des Körpers angreifende, vertikal abwärts gerichtete Gewicht $P = V \cdot s$ des Körpers und der im Schwerpunkte der verdrängten Flüssigkeitsmenge angreifende, vertikal aufwärts gerichtete Auftrieb des Körpers, der gleich dem Gewichte $P_1 = V \cdot s_1$ der verdrängten Wassermenge ist.

Ist nun $P > P_1$ oder $s > s_1$, so ist die Resultante der

Kräfte P und P_1 abwärts gerichtet: der Körper sinkt in der Flüssigkeit.

Ist $P = P_1$ oder $s = s_1$, so ist die Resultante der Kräfte P und P_1 gleich Null: der Körper schwebt in der Flüssigkeit an der Stelle, an die man ihn gebracht hat (Plateaus Ölkugel § 447).

Ist $P < P_1$ oder $s < s_1$, so ist die Resultante der Kräfte P und P_1 aufwärts gerichtet: der Körper steigt in der Flüssigkeit, und zwar nennt man den Überschuß von P_1 über P die Steigkraft des Körpers.

Es ist ohne weiteres einleuchtend, daß diese Schlüsse ebensowohl für Vollkörper wie für Hohlkörper gelten.

Steigt ein Körper in einer Flüssigkeit und gelangt zu ihrer Oberfläche, so steigt er weiter über diese hinaus, so daß ein Teil des Körpers aus der Flüssigkeit herausragt. Man sagt dann, der Körper schwimme auf der Flüssigkeit.

Dabei wird das Volumen der verdrängten Flüssigkeitsmenge, also auch der Auftrieb P_1 des Körpers immer kleiner, und es tritt Gleichgewicht ein, wenn $P_1 = P$ wird. Daraus ergibt sich das wichtige Gesetz für das Schwimmen eines festen Körpers auf einer Flüssigkeit:

Ein auf einer Flüssigkeit schwimmender Körper taucht so tief in die Flüssigkeit ein, daß das Gesamtgewicht des Körpers gleich dem Gewichte der von ihm verdrängten Flüssigkeitsmenge ist.

474.

Aufgabe. Wieviel kg Kork vom spezifischen Gewichte $s' = 0{,}24$ muß man mit $P = 14$ kg gegossenem Eisen, dessen spezifisches Gewicht $s = 7{,}21$ ist, verbinden, damit beide verbundene Körper in Wasser getaucht in diesem schweben?

Auflösung. Sollen die verbundenen Körper im Wasser schweben, so muß ihr Gewicht gleich dem Gewichte eines gleichen Volumens Wasser sein; ist daher x das gesuchte Gewicht des Korkes, so ist $\frac{x}{s'} + \frac{P}{s}$ das Volumen der ver-

bundenen Körper und daher gilt die Gleichung, da das spezifische Gewicht des Wassers 1 ist,

$$P + x = \left(\frac{x}{s'} + \frac{P}{s}\right) \cdot 1,$$

woraus

$$x = \frac{s'}{s} \cdot \frac{s - 1}{1 - s'} \cdot P$$
$$= 3{,}808 \text{ kg}$$

folgt.

475.

Aufgabe. Ein Zylinder von geschmiedetem Eisen, dessen Radius $r = 1{,}5$ cm, dessen Höhe $h = 1{,}25$ m und dessen spezifisches Gewicht $s = 7{,}79$ ist, soll mit einem Korkringe umgeben werden, dessen Höhe $h' = 0{,}50$ m ist. Wie groß muß die Dicke des Korkringes sein, wenn das spezifische Gewicht des Korkes $s' = 0{,}24$ ist und beide verbundene Körper im Wasser schweben sollen?

Auflösung. Das Volumen des eisernen Zylinders ist $\pi r^2 \cdot h$, folglich sein Gewicht $\pi r^2 \cdot h \cdot s$ g, wobei r und h in cm auszudrücken sind; ist x der äußere Durchmesser des Korkringes, so ist sein Volumen $\pi (x^2 - r^2) \cdot h'$ und sein Gewicht $\pi (x^2 - r^2) \cdot h' \cdot s'$. Wie im vorigen Paragraphen hat man daher die Gleichung

$$\pi r^2 \cdot h \cdot s + \pi (x^2 - r^2) \cdot h' \cdot s' = \pi r^2 \cdot h + \pi (x^2 - r^2) \cdot h'$$

oder

$$(x^2 - r^2) \cdot h' + r^2 \cdot h = r^2 \cdot h \cdot s + (x^2 - r^2) \cdot h' \cdot s',$$

aus der leicht

$$x = r \cdot \sqrt{\left(\frac{h}{h'} \cdot \frac{s - 1}{1 - s'} + 1\right)}$$

folgt. Durch Einsetzen der numerischen Werte erhält man

$$x = 7{,}246 \text{ cm}$$

und hieraus für die Dicke d des Korkringes

$$d = x - r = 5{,}746 \text{ cm}.$$

476.

Aufgabe. Aus $P = 6$ kg Eisen, dessen spezifisches Gewicht $s = 7{,}21$ ist, soll eine Hohlkugel geformt werden, die

in Wasser getaucht gerade zur Hälfte untersinkt; wie groß müssen die Radien r und ϱ der äußeren und inneren Fläche sein?

Auflösung. Das Volumen des verdrängten Wassers ist $\frac{2}{3}\pi r^3$, das Gewicht der Hohlkugel ist $\frac{4}{3}\pi(r^3 - \varrho^3)\cdot s$. Beide Gewichte müssen einander gleich und gleich P sein; daher hat man die Gleichungen

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = P;$$

$$\frac{4}{3}\pi(r^3 - \varrho^3)\cdot s = P,$$

aus denen sich ergeben

$$r = \sqrt[3]{\frac{3P}{2\pi}} \text{ und } \varrho = \sqrt[3]{\frac{3P(2s-1)}{4\pi s}};$$

$$r = 14{,}202 \text{ cm}; \quad \varrho = 13{,}867 \text{ cm}.$$

477.

Aufgabe. Es sei der horizontale Boden einer Fähre (eines Pontons) ein Rechteck, dessen Länge $CD = a = 6$ m, Breite $DE = b = 3$ m sei. Zwei Seitenwände seien vertikale gleichschenklige Trapeze, deren vordere und hintere

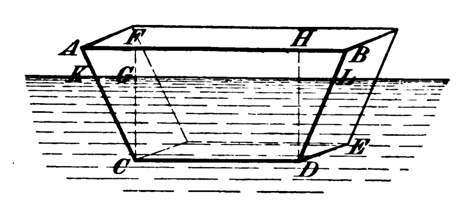


Fig. 205.

Anlage $AF = BH = c = 1{,}25$ m und deren Höhe $CF = d = 2$ m sei. Das ganze Gewicht des Fahrzeuges sei $P = 6000$ kg. Welche Last P' wird es laden können, wenn es $CG = h = 1{,}50$ m tief gehen soll? (Fig. 205).

Auflösung. Der verdrängte Wasserkörper ist offenbar ein Prisma, dessen Höhe $DE = b$ und dessen eine parallele

Grundfläche das vertikale Trapez $CKLD$ ist. Zur Bestimmung dieser Grundfläche hat man

$$CG : CF = KG : AF$$
$$h : d = KG : c$$
$$KG = \frac{h \cdot c}{d}.$$

Es ist mithin

$$KL = a + 2 \cdot \frac{hc}{d} = \frac{ad + 2hc}{d},$$

und die Grundfläche $CKLL$

$$\frac{1}{2}\left(a + \frac{ad + 2hc}{d}\right) \cdot h = \frac{ad + hc}{d} \cdot h.$$

Das Gewicht des zu verdrängenden Wasserkörpers ist also $\frac{ad + hc}{d} \cdot h \cdot b$ und man kann, um $\frac{1}{2}$ m Bord zu erhalten, das Fahrzeug mit

$$P' = \frac{ad + hc}{d} \cdot b \cdot h - P$$
$$= 31218{,}75 \text{ kg} - 6000 \text{ kg} = 25218{,}75 \text{ kg}$$

belasten.*)

Anm. Hat man zu beiden Seiten eines eingerammten Pfahls ein solches Ponton gelegt und läßt durch eine im Boden befindliche Klappe das Wasser in beide bis KL eindringen, befestigt den Pfahl an einem quer über die beiden Pontons gelegten Balken, und pumpt nun das Wasser wieder aus, so erlangen sie dadurch eine Tragkraft von 50437,5 kg, mit der sie den Pfahl auszuziehen bestrebt sind.

Die vom russischen Ingenieurgeneral de Witte erfundenen sogenannten Kamele, durch die zu tief gehende Schiffe über Untiefen fortgeführt werden, beruhen auf demselben Prinzipe, das auch den schwimmenden Docks zu Grunde liegt.

478.

Gleichgewicht schwimmender Körper. Damit ein auf einer Flüssigkeit schwimmender Körper im Gleichgewichte

*) Solche Aufgaben über Gewicht, Belastung und Tragfähigkeit der Schiffe findet man in den Lehrbüchern der Schiffsbaukunst.

ist, müssen nicht nur die beiden auf ihn wirkenden Kräfte, das im Schwerpunkte S des Körpers angreifende Gewicht P und der im Schwerpunkte S_1 der verdrängten Flüssigkeitsmenge angreifende Auftrieb P_1 des Körpers, entgegengesetzt gleich sein, sondern ihre Richtungen müssen auch in der Verbindungslinie ihrer Angriffspunkte liegen, da sie sonst ein Kräftepaar bilden und den Körper zu drehen streben. Da die Richtungen der beiden Kräfte vertikal sind, so müssen zum Gleichgewichte des Körpers S und S_1 in einer Vertikalen liegen. Man nennt die Gerade, die in dieser Lage durch S und S_1 gelegt werden kann, die Schwimm-Achse des Körpers. Es muß übrigens im Auge behalten werden, daß der Schwerpunkt S des Körpers eine unveränderliche Lage zum Körper hat, daß dagegen die Lage von S_1 im allgemeinen sich mit der Stellung ändert, die der Körper in der Flüssigkeit hat.

Was die Art des Gleichgewichts anlangt, so schwimmt ein Körper stets labil, wenn sein Schwerpunkt S tiefer liegt als der Schwerpunkt S_1 der von ihm verdrängten Flüssigkeitsmenge. Denn bringt man den Körper ein wenig aus seiner Gleichgewichtslage (Fig. 206),

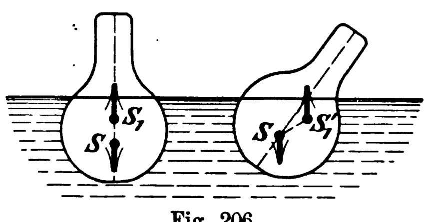


Fig. 206.

so bilden sein Gewicht und sein Auftrieb ein Kräftepaar, das den Körper wieder in die frühere Gleichgewichtslage zurückzubringen strebt. Der Schwerpunkt S_1 kann gewissermaßen als ein Stützpunkt des Körpers angesehen werden.

Liegt aber umgekehrt der Schwerpunkt S über dem Schwerpunkte S_1, so folgt nicht ohne weiteres, daß das Gleichgewicht labil sein müsse. Um die Frage nach der Art des Gleichgewichts in diesem Falle zu untersuchen, setzen wir voraus, daß der schwimmende Körper eine einfache Gestalt, nämlich die eines geraden Prismas habe, dessen Längsachse horizontal gerichtet sei, und daß ein durch die Schwimm-

achse des Körpers senkrecht zur Längsachse gelegter Querschnitt zur Schwimmachse symmetrisch sei, also durch die Schwimmachse in zwei kongruente Teile zerlegt werde.

Denken wir nunmehr den Körper in dieser Querschnittsebene um einen kleinen Winkel α um die Schwimmachse gedreht (Fig. 207), und ist S_1' in der neuen Lage der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeitsmenge, also der neue Angriffspunkt des Auftriebes P_1 des Körpers, so bleibt zwar

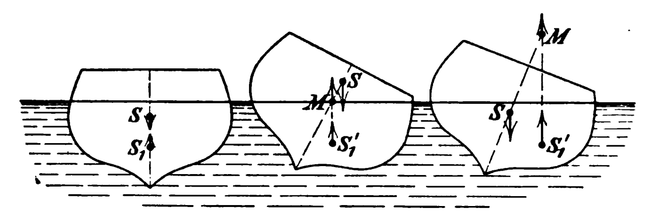


Fig 207.

die Größe dieses Auftriebes ungeändert, da auch das Gewicht P des Körpers sich nicht ändert, aber P und P_1 bilden ein Kräftepaar, das den Körper in die frühere Gleichgewichtslage zurückzuführen oder noch weiter aus ihr zu entfernen strebt, je nachdem der Punkt M, in dem die durch S_1' gezogene Vertikale die Schwimmachse $S\,S_1$ des Körpers schneidet, oberhalb oder unterhalb des Schwerpunktes liegt. Fällt M mit S zusammen, so heben sich P und P_1 auf, und der Körper ist auch in der neuen Lage im Gleichgewichte.

Da die Lage des Schnittpunktes M der durch S_1' gehenden Vertikalen mit der Schwimmachse des Körpers für die Art des Gleichgewichts von besonderer Bedeutung ist, hat man dem Punkte M einen besonderen Namen gegeben und nennt ihn nach Bouguer (traité du navire, 1746) das Metazentrum des Körpers.

Das Gleichgewicht eines schwimmenden Körpers ist also stabil, labil oder indifferent, je nachdem das Metazentrum über, unter oder auf dem Schwerpunkte des Körpers liegt.

Aus der Figur ist leicht einzusehen, daß die Stabilität um so größer ist, je höher das Metazentrum über dem Schwerpunkte liegt, denn um so größer ist der Hebelarm, also auch

das Moment des in die alte Lage zurückdrehenden Kräftepaares.

Anm. 1. Es mag besonders hervorgehoben werden, daß das Metazentrum M **kein** bestimmter Punkt der Schwimmachse ist: seine Lage hängt von der Veränderung der Lage von S_1 wesentlich ab, wenngleich gezeigt werden kann, daß in gewissen Fällen bei kleinem Drehwinkel α die Lage von M unabhängig von dem Drehwinkel α sein kann. Vergl. § 479.

Anm. 2. Die Untersuchungen über die Stabilität des Gleichgewichts schwimmender Körper sind für den Schiffsbau von praktischer Bedeutung und großer Wichtigkeit. Ein Schiff muß so gebaut werden, daß auch bei größeren Schwankungen das Metazentrum möglichst hoch über dem Schwerpunkte des Schiffes liegt, weshalb dieser durch Aufnahme von Ballast in die unteren Schiffsräume und durch passende Anordnung der Maschinen möglichst tief gelegt wird, wodurch die Möglichkeit des Kenterns, d. h. des Umschlagens verringert wird. — Ein Boot kippt leichter um, wenn Menschen darin stehen, als wenn sie sitzen.

479.

Aufgabe. Ein homogener Körper, der die Gestalt eines rechtwinkligen Parallelepipeds und das spezifische Gewicht s hat, schwimmt auf Wasser, so daß seine längsten Kanten horizontal sind; es soll die Lage des Metazentrums gefunden werden, wenn der Körper um den Winkel α um seine Schwimmachse gedreht wird?

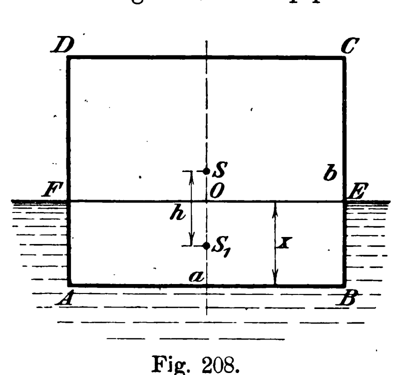


Fig. 208.

Auflösung. Der Körper ist im Gleichgewichte, wenn die Seite $AB = a$ des senkrechten Querschnittes $ABCD$ horizontal und die Seite $BC = b$ vertikal ist (Fig. 208). Denn dann ist der Querschnitt der verdrängten Flüssigkeits-

menge das Rechteck $ABEF$ und der Schwerpunkt S_1 dieses Rechtecks liegt vertikal unter dem Schwerpunkte S des Körpers. Die Höhe x des Rechtecks $ABEF$ folgt leicht aus der Gleichung $P = P_1$, denn diese lautet, wenn c die Längsachse des Körpers ist, in unserem Falle

$$a\,b\,c \cdot s = a\,c \cdot x,$$

woraus

$$x = b \cdot s \tag{1}$$

folgt.

Denken wir jetzt den Körper um den Winkel α um die Schwimmachse in der Ebene des Querschnittes $ABCD$ gedreht (Fig. 209), indem wir den Schnittpunkt O der Schwimm-

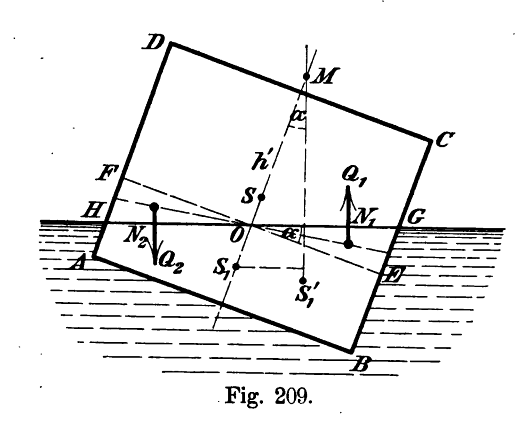


Fig. 209.

achse mit der Ebene des Wasserspiegels fest denken, so ist der neue Querschnitt der verdrängten Flüssigkeitsmenge das Trapez

$$ABGH = ABEF + OEG - OFH.$$

Der im Schwerpunkte S_1' dieses Trapezes angreifende neue Auftrieb P_1' kann daher aufgefaßt werden als die Resultante des in S_1 angreifenden früheren Auftriebes P_1, des Auftriebes Q_1, der dem neu eingetauchten Teile des Körpers mit dem Querschnitte OEG entspricht, und des negativen Auftriebes Q_2, der dem auf der andern Seite aus der Flüssigkeit emporgestiegenen Körperteile mit dem Querschnitte OFH entspricht. Da die Dreiecke OFG und OFH kongruent sind,

ist $Q_1 = Q_2$; da ferner $OE = \frac{a}{2}$, $\sphericalangle\, GOE = \alpha$ und $EG = \frac{a}{2} \cdot tg\,\alpha$, so ist

$$(2) \qquad Q_1 = Q_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot tg\,\alpha \cdot c = \frac{1}{8}\, a^2 \cdot c \cdot tg\,\alpha.$$

Da ferner das statische Moment in bezug auf einen beliebigen Punkt von P_1' als der Resultanten der drei parallelen Kräfte P_1, Q_1 und Q_2 gleich der algebraischen Summe der statischen Momente dieser drei Kräfte in bezug auf denselben Momentenpunkt sein muß, so gilt diese Momentengleichung auch in bezug auf S_1 als Momentenpunkt. Nennen wir nun die Entfernung $S_1 S = h$ und die Erhebung des Metazentrums M über S, also die Strecke $SM = h'$, so ist das von S_1 auf die Richtung von P_1' gefällte Lot gleich $(h + h') \cdot sin\,\alpha$ und das Moment von P_1' in bezug auf S_1 gleich $abc \cdot s \cdot (h + h') \cdot sin\,\alpha$.

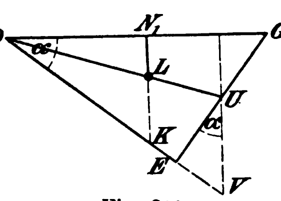


Fig. 210.

Das Moment von P_1 in bezug auf S_1 ist Null und die Summe der Momente der beiden ein Kräftepaar bildenden Kräfte Q_1 und Q_2 in bezug auf S_1 gleich ihrem Momente (§ 232).

Um das letztere zu berechnen, bemerken wir, daß Q_1 und Q_2 in den Schwerpunkten der Dreiecke OEG und OFH angreifen und senkrecht zu HOG gerichtet sind; ihr Hebelarm ist daher die Strecke $N_1 N_2 = 2\, ON_1$. Aus der Fig. 210 folgt nunmehr leicht

$$ON_1 = OK \cdot cos\,\alpha;$$

da der Angriffspunkt L von Q_1 die Mitteltransversale OU im Verhältnis 2 : 1 teilt, so folgt, wenn wir durch U die Linie $UV \parallel KN_1$ ziehen,

$$OK : OV = OL : OU = 2 : 3$$

oder

$$OK = \frac{2}{3} \cdot OV;$$

weil aber

$$OV = OE + EV = \frac{a}{2} + EV$$

ist und aus dem Dreieck leicht die Beziehungen

$$E\,U = \frac{1}{2}\,E\,G = \frac{a}{4} \cdot tg\,\alpha; \quad E\,V = E\,U \cdot tg\,\alpha = \frac{a}{4} \cdot tg^2\,\alpha$$

folgen, so erhält man

$$O\,K = \frac{2}{3}\left(\frac{a}{2} + \frac{a}{4} \cdot tg^2\,\alpha\right)$$
$$= \frac{a}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\,tg^2\,\alpha\right).$$

Hieraus ergibt sich

$$O\,N_1 = \frac{a}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\,tg^2\,\alpha\right) \cdot cos\,\alpha$$

und nunmehr für das Moment des Kräftepaares (Q_1, Q_2) der Wert

$$\frac{1}{8}\,a^2 \cdot c \cdot tg\,\alpha \cdot \frac{2\,a}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\,tg^2\,\alpha\right) \cdot cos\,\alpha$$
$$= \frac{1}{12}\,a^3 \cdot c \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\,tg^2\,\alpha\right) \cdot sin\,\alpha.$$

Die Momentengleichung lautet also

$$a\,b\,c \cdot s \cdot (h + h') \cdot sin\,\alpha = \frac{1}{12}\,a^3 \cdot c \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\,tg^2\,\alpha\right) \cdot sin\,\alpha,$$

und aus ihr folgt

$$h + h' = \frac{a^2}{12\,b\,s}\left(1 + \frac{1}{2}\,tg^2\,\alpha\right);$$

nun ist aber

$$h = \frac{b}{2} - \frac{x}{2} = \frac{b}{2}\,(1 - s),$$

so daß für h' der Wert

$$h' = \frac{a^2}{12\,b\,s}\left(1 + \frac{1}{2}\,tg^2\,\alpha\right) - \frac{b}{2}\,(1 - s) \tag{3}$$

folgt. Hierdurch ist die Lage des Metazentrums bestimmt.

Setzen wir für die weiteren Betrachtungen nun noch voraus, daß der Winkel α, um den die Schwimmachse gedreht wird, sehr klein sei, dann kann man $tg\,\alpha$ und erst recht $tg^2\,\alpha$ vernachlässigen, d. h. gleich Null setzen, wodurch die Formel (3) übergeht in

$$h' = \frac{a^2}{12\,b\,s} - \frac{b}{2}\,(1 - s), \tag{4}$$

die zeigt, daß innerhalb solcher kleinen Schwankungen das Metazentrum nicht mehr veränderlich, sondern derselbe bestimmte Punkt ist.

Das Gleichgewicht des Körpers ist nun stabil, labil oder indifferent, je nachdem $h' > 0$; $h' < 0$ oder $h' = 0$ ist.

Mit Benutzung von (4) können diese Ungleichungen leicht umgeformt und geschrieben werden: ist

$\frac{a}{b} > \sqrt{6\,s\,(1-s)}$, so ist das Gleichgewicht stabil,

$\frac{a}{b} < \sqrt{6\,s\,(1-s)}$, so ist das Gleichgewicht labil,

$\frac{a}{b} = \sqrt{6\,s\,(1-s)}$, so ist das Gleichgewicht indifferent.

Setzt man der Reihe nach $s = 0{,}1;\ 0{,}2;\ \ldots\ 0{,}9$, so kann man hieraus die Grenzen für das Verhältnis $\frac{a}{b}$, der Breite und Höhe des Körpers, berechnen. Für Buchenholz ist z. B. $s = 0{,}8$, $\sqrt{6\,s\,(1-s)} = 0{,}98$; soll also ein rechteckiger Balken aus Buchenholz stabil auf Wasser schwimmen, so muß die Breite größer als das 0,98 fache der Höhe sein.

Da $\sqrt{6\,s\,(1-s)} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{s\,(1-s)}$ ist und das geometrische Mittel zweier Größen, deren Summe einen konstanten Wert hat, den größten Wert erreicht, wenn die beiden Größen einander gleich sind, so hat $\sqrt{6\,s\,(1-s)}$ den größten Wert für $s = 0{,}5$, nämlich den Wert 1,225; es muß also, soll das schwimmende Parallelepiped im stabilen Gleichgewichte sein, das Verhältnis der Breite zur Höhe um so größer sein, je mehr sich das spezifische Gewicht s dem Werte 0,5 nähert.

Aufgaben.

288. Ein Gefäß von der Form eines abgestumpften Kegels, dessen untere Grundfläche den Durchmesser $d = 100$ mm hat, und dessen Höhe $h = 12$ cm ist, ist bis zum oberen Rande mit Wasser gefüllt; wie groß ist der Druck a) auf die gesamte Fläche; b) auf 1 qcm des Bodens?

Antw.: a) $P = \frac{1}{4}\,\pi\,d^2\,.\,h = 942{,}5$ g; b) $12\,\frac{\text{g}}{\text{qcm}}$.

289. Wie groß ist das Gewicht der in diesem Gefäße enthaltenen Wassermenge, wenn der obere Durchmesser a) doppelt; b) halb so groß als der untere ist?

Antw.: a) 2199 g; b) 550 g.

290. Wie hoch muß ein zylindrisches Gefäß, dessen Radius $r = 10$ cm ist, mit Alkohol vom spezifischen Gewichte $s = 0{,}8$ gefüllt werden, damit der Bodendruck $P = 1$ kg ist?

Antw.: $h = \frac{P}{\pi r^2 \,.\, s} \sim 4$ cm.

291. In einer Röhrenleitung steht Wasser 65 m hoch; welchen Druck hat 1 qcm am untern Ende der Röhre auszuhalten?

Antw.: 6,5 kg (6,5 Atmosphären).

292. Wie groß ist der Seitendruck bei einem mit Wasser gefüllten Zylinder, dessen Radius $r = 6$ cm und dessen Höhe $h = 30$ cm ist?

Antw.: $P = 2 \pi r h \,.\, \frac{h}{2} = 16{,}964$ kg.

293. Wie groß ist der Druck auf ein ringförmiges Stück der Gefäßwand dieses Zylinders, das $a = 2$ cm breit ist, und dessen oberer Rand sich $b = 9$ cm unter dem Flüssigkeitsspiegel befindet?

Antw.: $P = 2 \pi r a \left(b + \frac{a}{2}\right) = 754$ g.

294. Ein Hohlwürfel, dessen Seite $a = 10$ cm ist, ist mit Quecksilber ($s = 13{,}6$) gefüllt; wie groß ist a) der Bodendruck; b) der gesamte Seitendruck?

Antw.: a) $P = a^2 \,.\, a \,.\, s = 13{,}6$ kg;

b) $P = 4\, a^2 \,.\, \frac{a}{2} \,.\, s = 27{,}2$ kg.

295. Eine Mauer von der Form eines gleichschenkligen Trapezes, deren obere Breite $a = 5{,}8$ m, deren untere Breite $b = 3{,}6$ m und deren Höhe $h = 6$ m ist, schließt einen Teich ab; welchen Druck hat die Mauer auszuhalten, wenn der Teich bis an ihren oberen Rand gefüllt ist?

Antw.: $P = \frac{a + b}{2} \,.\, h \,.\, \frac{a + 2b}{a + b} \,.\, \frac{h}{3} = 78000$ kg.

296. Wie groß ist der Überdruck, den ein 4,8 m breites Schleußentor auszuhalten hat, wenn das Wasser auf der einen Seite 3,2 m, auf der andern 1,4 m hoch steht?

Antw.: 19872 kg.

297. In dem einen von zwei kommunizierenden Gefäße steht Öl $h_1 = 25$ cm, im andern Wasser $h_2 = 21$ cm über dem Niveau der Berührungsstelle; wie groß ist das spezifische Gewicht des Öles?

Antw.: $s = \frac{h_2}{h_1} = 0{,}84.$

298. Wie groß ist im Wasser die Steigkraft P eines leeren, wasserdicht gemachten Kastens, der 3 cbm Inhalt hat und 250 kg wiegt?

Antw.: $P = (3 \,.\, 1000 - 250)$ kg $= 2750$ kg.

299. Wie viele solcher Kasten wären nötig, um ein gesunkenes 60 t schweres Schiff zu heben, wenn das spezifische Gewicht des Meerwassers 1,03 ist?

Antw.: $n = \frac{60000}{3 \,.\, 1{,}03 \,.\, 1000 - 250} \sim 22.$

300. Ein Würfel von Glas ($s = 2{,}5$) hat die Kantenlänge $a = 4$ cm; wieviel wiegt er im Wasser?

Antw.: 96 g.

301. Ein Zylinder, dessen Höhe gleich dem Durchmesser des Grundkreises ist, verliert im Wasser 220 g; wie groß ist sein Volumen und wie groß sein Durchmesser?

Antw.: $V = 220$ ccm; $d = 65$ mm.

302. Wie hoch ragt ein quadratischer Klotz aus Buchenholz ($s = 0{,}8$) aus dem Wasser hervor, wenn seine Höhe 40 cm ist?

Antw.: 8 cm.

303. Wie schwer muß ein Korkgürtel ($s_1 = 0{,}24$) für einen 70 kg schweren Menschen vom spezifischen Gewichte $s_2 = 1{,}2$ sein, damit der Mensch gerade im Wasser schwebt; wie schwer aber, wenn der 5 kg schwere Kopf gerade aus dem Wasser hervorragen soll?

Antw.: $3^{13}/_{19}$ kg $= 3{,}7$ kg; 5 kg.

304. Wie groß ist die Metallstärke einer kupfernen Hohlkugel, deren äußerer Durchmesser $d = 200$ mm ist, wenn sie in Wasser getaucht gerade zur Hälfte einsinkt, und das spezifische Gewicht des Kupfers $s = 8{,}9$ ist?

Antw.: Aus $\frac{4}{3}\pi\left[\left(\frac{d}{2}\right)^3 - \left(\frac{d}{2} - x\right)^3\right] \,.\, s = \frac{2}{3}\pi \,.\, \left(\frac{d}{2}\right)^3$

folgt

$$x = \frac{d}{2}\left(1 - \sqrt[3]{1 - \frac{1}{2\,s}}\right) = 1{,}9 \text{ mm.}$$

305. Eine Legierung aus Gold ($s_1 = 19{,}3$) und Silber ($s_2 = 10{,}5$) wiegt $P = 500$ g und verliert im Wasser $P' = 40$ g an Gewicht; wieviel Gold und Silber ist in der Legierung enthalten?

Antw.: Aus $\left| \begin{array}{c} x + y = P \\ \frac{x}{s_1} + \frac{y}{s_2} = P' \end{array} \right|$ folgt

$$x = s_1 \cdot \frac{P - P' \cdot s_2}{s_1 - s_2} = 175{,}4 \text{ g Gold}; \; y = s_2 \cdot \frac{P' \cdot s_1 - P}{s_1 - s_2} = 324{,}6 \text{ g Silber.}$$

306. Wie groß ist das spezifische Gewicht eines Eisenwürfels, der in Quecksilber getaucht gerade zur Hälfte einsinkt?

Antw.: 6,8.

307. Wieviel verliert 1 kg Messing, das aus 80 Teilen Kupfer ($s_1 = 8{,}9$) und 20 Teilen Zink ($s_2 = 7{,}2$) besteht, im Wasser?

Antw.: 118 g.

308. Eine Glaskugel verliert in Wasser $p_1 = 40$ g, in Schwefelsäure $p_2 = 76$ g; wie groß ist das spezifische Gewicht der Schwefelsäure?

Antw.: $s = \frac{p_2}{p_1} = 1{,}9$.

Dreissigstes Buch.

Vom Ausflusse der Flüssigkeiten aus Gefäßen bei konstanter Druckhöhe.

480.

Theorem von Toricelli. Es sei in dem horizontalen Boden eines mit einer Flüssigkeit gefüllten, oben offenen Gefäßes von beliebiger Form eine im Vergleich zur Weite des Gefäßes sehr kleine Ausflussöffnung gemacht. Wir denken uns ferner das Gefäß, ohne daß eine Erschütterung hervorgebracht wird, beständig voll erhalten (oder die Weite desselben so bedeutend, daß trotz des stattfindenden Ausflusses die Senkung des Flüssigkeitsspiegels erst nach einiger Zeit bemerkbar wird).

Ist q der Querschnitt der Ausflußöffnung $E\,F$ (Fig. 211), h' die sehr kleine Höhe der ausfließenden Flüssigkeitsschicht $E\,F\,I\,K$, so wird diese Schicht durch ihr eigenes Gewicht und durch das Gewicht der über ihr stehenden Flüssigkeitssäule $K\,I\,G\,H$ in Bewegung gesetzt. Die bewegende Kraft k ist also, wenn s das spezifische Gewicht der Flüssigkeit und h die Niveauhöhe der Ausflußöffnung ist,

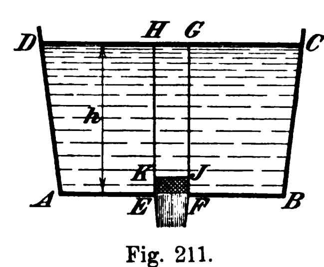


Fig. 211.

$$k = q \cdot h' \cdot s + q\,(h - h') \cdot s = q \cdot h \cdot s;$$

die durch diese Kraft in Bewegung gesetzte Masse m hat die Größe

$$m = \frac{q \cdot h' \cdot s}{g},$$

worin g die Beschleunigung der Schwere bezeichnet. Aus der dynamischen Grundgleichung (§ 56) folgt dann für die Beschleunigung g', die die ausfließende Flüssigkeit hat, der Wert

$$g' = \frac{k}{m} = \frac{h}{h'} \cdot g,$$

woraus für die Geschwindigkeit, mit der die Flüssigkeitsschicht $E\,F\,I\,K$ die Ausflußöffnung verläßt, nachdem sie die Höhe h' durchlaufen hat, nach § 22 sich ergibt

$$v = \sqrt{2\,g'\,h'} = \sqrt{2\,g\,h}, \tag{1}$$

d. h.: Die Geschwindigkeit, mit der eine Flüssigkeit aus einer Öffnung in dem horizontalen Boden eines Gefäßes fließt, ist gleich derjenigen, die ein Körper besitzt, der frei vom Niveau der Flüssigkeit bis zur Öffnung gefallen ist.

Dieses Theorem ist zuerst von Toricelli im Jahre 1644 ohne theoretischen Beweis ausgesprochen worden.

481.

Zweiter Beweis des Theorems von Toricelli. Wegen der Wichtigkeit dieses Theorems sei noch ein zweiter Be-

weis gegeben, der auf dem Satze von der Erhaltung der Energie beruht.

Das Gewicht der über $E F$ ruhenden Flüssigkeitsmenge ist $q \cdot h \cdot s$; senkt sich diese Flüssigkeitsmenge um die Strecke h', so hat sie die Arbeit $q \cdot h \cdot s \cdot h'$ geleistet; diese Arbeit wurde verbraucht, um der ausfließenden Flüssigkeitsmenge die Geschwindigkeit v zu erteilen, so daß jene Arbeit gleich der Bewegungsenergie dieser Flüssigkeitsmenge ist. Da die Masse derselben $\frac{q \cdot h' \cdot s}{g}$ ist, gilt die Gleichung

$$q \cdot h \cdot s \cdot h' = \frac{1}{2} \cdot \frac{q \cdot h' \cdot s}{g} \cdot v^2,$$

woraus

$$v^2 = 2 g h$$

in Übereinstimmung mit der Gleichung (1) des vorigen Paragraphen folgt.

482.

Folgerungen aus dem Toricellischen Theorem.

1. Da das spezifische Gewicht s der Flüssigkeit in der Formel für v nicht mehr vorkommt, so ist die **Ausflußgeschwindigkeit einer Flüssigkeit durchaus unabhängig von der Natur der Flüssigkeit.** Diese Folgerung ist das Analogon zu dem Satze, daß alle festen Körper im luftleeren Raume gleich schnell fallen (§ 96).

Bei gleichen Druckhöhen fließen also Wasser und Quecksilber gleich schnell aus; beim Quecksilber ist zwar die drückende Kraft 13,6 mal so groß als beim Wasser, aber die zu bewegende Masse ist auch 13,6 mal so groß.

2. Die Ausflußgeschwindigkeit ist unabhängig von der Größe und Gestalt der Öffnung.

3. Hat man zwei verschiedene Gefäße mit verschiedenen Flüssigkeitshöhen h_1 und h_2, so folgt aus

$$v_1 = \sqrt{2 g h_1} \text{ und } v_2 = \sqrt{2 g h_2},$$

daß sich bei verschiedenen Druckhöhen die Ausflußgeschwindigkeiten wie die Quadratwurzeln aus den Druckhöhen verhalten.

Anm. Es muß noch erwähnt werden, daß in der Praxis die Ausflußgeschwindigkeit etwas geringer ist als ihr theoretisch abgeleiteter Wert, was in der Reibung der Flüssigkeit an den Rändern der Ausflußöffnung seine Ursache hat. Die praktische Ausflußgeschwindigkeit ist $v' = \lambda \cdot v$, worin der Reduktionsfaktor $\lambda < 1$ ist; für Wasser beträgt er bei dünnwandigen Öffnungen etwa 0,98.

483.

Ausflußmenge. Mit der Ausflußgeschwindigkeit ist auch die in der Sekunde ausfließende Menge der Flüssigkeit bestimmt; denn die in einer Sekunde ausfließende Flüssigkeitsmenge ist offenbar gleich einem Flüssigkeitszylinder, dessen Grundfläche der Querschnitt q der Ausflußöffnung, und dessen Höhe der Weg ist, den die zuerst ausfließende Flüssigkeitsschicht in dieser Sekunde zurücklegt, dessen Höhe also v ist. Daher ist die in der Sekunde austretende Flüssigkeitsmenge $q \cdot \sqrt{2\,g\,h}$, und die Menge M, die in t sec ausfließt,

$$M = q \cdot t \cdot \sqrt{2\,g\,h}. \tag{2}$$

Vergleicht man diese theoretische Ausflußmenge mit einer praktisch beobachteten, indem man die wirklich ausgeflossene Menge auffängt und wiegt, so findet man die letztere stets kleiner; es rührt dies zum Teil von der Reibung der Flüssigkeitsteilchen an den Rändern der Ausflußöffnung her, zum größten Teile aber davon, daß die Flüssigkeitsteilchen von allen Seiten im Gefäße nach der Ausflußöffnung in krummen Linien herzuströmen, wie leicht wahrnehmbar ist, wenn man in das Gefäß kleine Körperchen (Siegellackkörnchen) wirft, die mit dem Wasser gleiches spezifisches Gewicht haben. Diese Wasserfäden konvergieren, wodurch eine Zusammenziehung des Flüssigkeitsstrahles (contractio venae, Newton 1687) unterhalb der Ausflußöffnung eintritt.

Bezeichnet man den sogenannten, durch die Erfahrung zu bestimmenden Ausflußkoeffizienten, mit dem man die theoretisch abgeleitete Ausflußmenge multiplizieren muß, um die in der Wirklichkeit beobachtete M_1 zu erhalten, mit $\varkappa$, so hat man

$$M_1 = \varkappa \cdot q \cdot t \cdot \sqrt{2\,g\,h}. \tag{3}$$

Anm. Läßt man die Flüssigkeit nicht direkt durch eine Öffnung aus dem Gefäße ausfließen, sondern durch kurze (zylindrische oder konische) Ansatzrohre aus einer Substanz, die von der Flüssigkeit benetzt wird, so kann die Kontraktion des Flüssigkeitsstrahles teilweise vermieden und die Ausflußmenge vergrößert werden, wobei freilich in der Regel ein Verlust an Geschwindigkeit eintritt.

484.

Was die Größe des Ausflußkoeffizienten $\varkappa$ betrifft, so hat man gefunden, daß

1. für eine Ausflußöffnung in einer dünnen Wand $\varkappa = 0{,}62$;

2. für eine Öffnung in einer dicken Wand oder für ein kurzes Ansatzrohr, das etwa $2\frac{1}{2}$ mal so lang als der Durchmesser der Öffnung oder, wenn diese ein Rechteck ist, $2\frac{1}{2}$ mal so lang als die kleinere Seite desselben ist, $\varkappa = 0{,}82$ zu setzen ist.

Anm. Diese für $\varkappa$ gefundenen Werte sind nur Mittelwerte; sie hängen von der Gestalt der Öffnung ab und sind bei kleineren Druckhöhen und kleineren Ausflußöffnungen ein wenig größer.

485.

Sind bei konstanter Druckhöhe von den vier Größen h, q, t, M_1 drei gegeben, so kann man die vierte berechnen, indem man die Gleichung (3) nach der gesuchten Größe auflöst. Man erhält

$$M_1 = \varkappa \cdot q \cdot t \cdot \sqrt{2gh};$$

$$q = \frac{M_1}{\varkappa \cdot t \cdot \sqrt{2gh}};$$

$$t = \frac{M_1}{\varkappa \cdot q \cdot \sqrt{2gh}};$$

$$h = \frac{1}{2g} \cdot \left(\frac{M_1}{\varkappa \cdot q \cdot t}\right)^2.$$

Beispiel 1. Der Radius einer kreisförmigen Öffnung in einer dünnen Wand ist $r = 5$ cm; die beständige Druckhöhe

ist $h = 1{,}60$ m; wieviel Wasser fließt in einer Minute durch die Öffnung?

Antwort. Da $q = \pi r^2$ und $\varkappa = 0{,}62$, so erhält man

$$M_1 = \varkappa \cdot \pi r^2 \cdot t \cdot \sqrt{2 g h} = 1{,}637 \text{ cbm}.$$

Anm. Würde auf den Wasserspiegel mittels eines Kolbens, von der Grundfläche A noch ein besonderer Druck P ausgeübt, so braucht man nur die Höhe h_1 der Wassersäule von der Grundfläche A zu berechnen, die durch ihr Gewicht auf den Kolben denselben Druck P ausübt, und diese Höhe zur Druckhöhe h zu addieren.

Beispiel 2. In dem dickwandigen Boden eines Wasserbehälters, der in jeder Sekunde $^1/_{20}$ cbm Zufluß erhält, befindet sich eine rechteckige Ausflußöffnung von 8 cm Breite und $5^1/_2$ cm Höhe; wie hoch wird im Beharrungszustande das Wasser über dem Boden stehen?

Antwort. Der Beharrungszustand tritt ein, d. h. die Höhe des Wasserspiegels bleibt konstant, wenn der Abfluß dem Zufluß gleich ist. Hier ist gegeben $q = 0{,}08 \cdot 0{,}055 = 0{,}0044$ qm, $t = 1$ sec; $M_1 = 0{,}05$ cbm, $\varkappa = 0{,}82$, so daß man erhält

$$h = \frac{1}{2 g} \cdot \left(\frac{0{,}05}{0{,}82 \cdot 0{,}0044}\right)^2 \text{m} = 9{,}789 \text{ m}.$$

486.

Ausfluß aus Öffnungen in einer Seitenwand. Befindet sich die Ausflußöffnung nicht in dem Boden des Gefäßes, sondern in der Seitenwandung, so gelten im allgemeinen dieselben Gesetze, nur ist zu beachten, daß der Seitendruck am obern Rande der Öffnung kleiner, am untern Rande dagegen größer ist als für eine Stelle der Öffnung selbst; ist der vertikale Durchmesser der Öffnung im Verhältnis zu ihrer Niveauhöhe klein, so kann als mittlere Druckhöhe die Niveauhöhe des Schwerpunktes der Öffnung angenommen werden.

Der aus einer seitlichen Öffnung austretende Flüssigkeitsstrahl ist zwei Kräften ausgesetzt: durch den hydrostatischen Druck erhält er eine konstante horizontale Ge-

schwindigkeit, während ihm gleichzeitig die Schwerkraft eine Beschleunigung vertikal nach unten erteilt. Seine Bahn ist also dieselbe, wie die eines horizontal geworfenen Körpers, nämlich eine Parabel, die freilich durch die auftretenden Bewegungshindernisse noch mehr als beim horizontalen Wurfe modifiziert wird.

Aus den früheren Betrachtungen (§ 122) folgt übrigens unschwer, daß der austretende Flüssigkeitsstrahl die größte Wurfweite hat, wenn die Niveauhöhe des Schwerpunktes der Öffnung gleich der halben Höhe der Flüssigkeit über dem Boden ist, daß die Wurfweiten für zwei Öffnungen, deren Schwerpunkte gleich weit von der Mitte abstehen, gleich groß sind, und daß die Leitlinien aller Parabeln im Flüssigkeitsspiegel liegen.

487.

Vertikal aufsteigender Strahl. Setzt man in eine Öffnung der Seitenwandung eines Gefäßes ein Rohr, das oben eine kleine Öffnung hat, so erhält man einen vertikal nach oben aufsteigenden Strahl (Springbrunnen), der den Gesetzen des vertikalen Wurfes unterworfen sein müßte. Er müßte also, da seine Geschwindigkeit $v = \sqrt{2\,g\,h}$ ist, wieder bis zur Höhe h emporsteigen (§ 115). Alle Beobachtungen haben aber ergeben, daß ein vertikal aufsteigender Strahl infolge der Reibung der Flüssigkeit an den Wänden der Röhren, infolge des Luftwiderstandes und infolge des Schwerdruckes der niederfallenden Teilchen auf die aufsteigenden in der Regel nur $^2/_3$ der theoretischen Steighöhe erreicht.

488.

Fließt das Wasser durch eine kleine Öffnung nicht in freier Luft, sondern unter Wasser aus (Fig. 212), so gelten, wenn beide Wasserspiegel AB und CD immer dieselbe Entfernung vom Schwerpunkte S der Öffnung behalten, erfahrungsmäßig auch für diesen Fall die in § 485 zusammengestellten Formeln, nur ist als beständige Druckhöhe der lotrechte Abstand der beiden Wasserspiegel, also $h = AS - CS = AC$

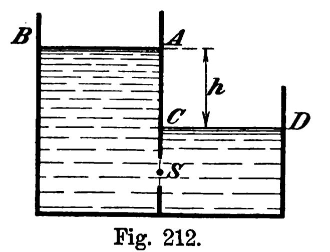


Fig. 212.

zu nehmen; außerdem ist der Ausflußkoeffizient etwas kleiner, für eine dicke Wand etwa $\varkappa = 0{,}81$.

489.

Ist die Ausflußöffnung q so groß, daß die in § 480 gemachte Voraussetzung der unmerklichen Senkung des Wasserspiegels nicht mehr erlaubt ist, muß also, um das Gefäß stets voll zu erhalten, damit immer die gleiche Druckhöhe h vorhanden ist, ebensoviel Wasser zufließen als abfließt, so kann man sich die dadurch größer werdende Ausflußgeschwindigkeit v durch eine vergrößerte Druckhöhe erzeugt denken. Um diese zu finden, sei F die Fläche des Wasserspiegels, die, wie auch das Gefäß geformt sein möge, für eine sehr kleine Senkung als unveränderlich angesehen werden kann, und c die Geschwindigkeit, mit der sie sinkt, mit der also das Wasser zufließen muß, dann muß wegen der Gleichheit von Zufluß und Abfluß

$$F \cdot c = q \cdot v$$

sein. In der über der Ausflußöffnung q stehenden Wassersäule kommen also die horizontalen Schichten bereits mit der Geschwindigkeit

$$c = \frac{q}{F} \cdot v$$

an die Öffnung.

Aus der für eine kleine Ausflußöffnung geltenden Formel $v = \sqrt{2\,g\,h}$, folgt $h = \frac{1}{2\,g}\,v^2$, und ebenso kann man sich die Geschwindigkeit $\frac{q}{F} \cdot v$ durch den Druck einer zweiten über der Ausflußöffnung stehenden Flüssigkeitssäule von der Höhe $h_1 = \frac{1}{2\,g} \cdot \left(\frac{q}{F} \cdot v\right)^2$ erzeugt denken. Diese Druckhöhe muß zu der eigentlichen Druckhöhe hinzukommen, also für h der Wert $h + \frac{1}{2\,g} \cdot \left(\frac{q}{F} \cdot v\right)^2$ gesetzt werden, wodurch die Formel für v lautet

$$v^2 = 2\,g\left(h + \frac{1}{2\,g} \cdot \frac{q^2}{F^2} \cdot v^2\right),$$

aus der

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{q^2}{F^2}}}$$

folgt. Für die in t sec ausfließende Wassermenge M_1 hat man also mit Hinzufügung des Ausflußkoeffizienten $\varkappa$ die genauere Formel

$$M_1 = \varkappa \cdot q \cdot t \cdot \sqrt{\frac{2gh}{1 - \frac{q^2}{F^2}}}. \tag{4}$$

In der Regel ist aber q gegen F so klein, daß man den Bruch $\frac{q^2}{F^2}$ vernachlässigen und für M_1 die Formel (3) anwenden kann.

490.

Wir haben im § 486 angenommen, daß die vertikale Höhe der Ausflußöffnung in einer Seitenwand gegen die Entfernung ihres Schwerpunktes vom Wasserspiegel sehr klein war und konnten dann zur Vereinfachung der Formeln als mittlere Geschwindigkeit diejenige nehmen, die die durch den Schwerpunkt der Öffnung gehende horizontale Schicht des ausfließenden Strahles hat. Diese Annahme ist aber nicht mehr gestattet, wenn die Höhe der Öffnung bedeutend ist, und deshalb die Geschwindigkeit der ausfließenden Schichten sehr verschieden ist.

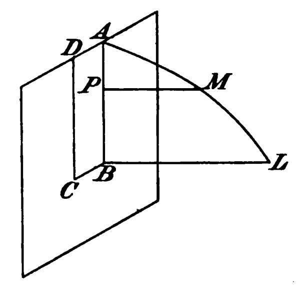


Fig. 213.

Nehmen wir zunächst an, die rechteckige Schützenöffnung $ABCD$ (Fig. 213) reiche bis zum Wasserspiegel eines großen Behälters (Sammelteiches, Kanals), dessen Niveau eine lange Zeit konstant bleibt. Es sei die Höhe der Öffnung $AB = h$, die Breite $AD = b$.

Denken wir uns einen vertikalen Wasserfaden AB, so haben die verschiedenen Punkte desselben desto größere Geschwindigkeit, je tiefer sie unter dem Niveau liegen. Ist $AP = x$ die Druckhöhe des Punktes P, so ist seine Ge-

schwindigkeit $\sqrt{2\,g\,x}$. Denken wir für x alle möglichen Werte (Abszissen) von $x = 0$ bis $x = h$ gesetzt und die entsprechenden Geschwindigkeiten als Ordinaten angetragen, so daß $PM = \sqrt{2\,g\,x}$, $BL = \sqrt{2\,g\,h}$ ist, so liegen die Endpunkte aller dieser Ordinaten in einer Parabel, deren Parameter $= 2\,g$ ist (höhere Geometrie § 24). Die übereinander liegenden Punkte A, P, B des vertikalen Wasserfadens befinden sich nach einer Sekunde in den ihnen entsprechenden Punkten A, M, L des Parabelbogens. Es ist also klar, daß in einer Sekunde ein prismenartiger Wasserkörper ausfließt, dessen Grundfläche die Parabelfläche $AMLB$ und dessen Höhe gleich der Breite b der Ausflußöffnung ist. Da nun die Parabelfläche $= \frac{2}{3} AB \cdot BL = \frac{2}{3} h \cdot \sqrt{2\,g\,h}$ ist (höhere Geometrie § 48a), so ist mit Hinzufügung des Ausflußkoeffizienten $\varkappa$ die in einer Sekunde ausfließende Wassermenge $\frac{2}{3} \varkappa \cdot b \cdot h \cdot \sqrt{2\,g\,h}$. Man hat also für t sec die Formel

$$M_1 = \frac{2}{3} \varkappa \cdot b \cdot h \cdot t \cdot \sqrt{2\,g\,h}, \tag{5}$$

aus der folgen

$$b = \frac{3\,M_1}{2\varkappa \cdot t \cdot h \cdot \sqrt{2 g h}}$$

$$h = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{g} \cdot \left(\frac{3\,M_1}{\varkappa . t . b}\right)^2}.$$

Anm. Ist die Höhe der Öffnung beträchtlich, so senkt sich der Wasserspiegel, ehe noch die Mündung erreicht ist, und die Druckhöhe h muß deshalb nach Eytelwein da gemessen werden, wo die Senkung noch nicht stattfindet.

Beispiel. Es sei $h = 1$ m, $b = 1{,}5$ m, $t = 1$ sec; $\varkappa = 0{,}62$; es ergibt sich $M_1 = 2{,}746$ cbm.

491.

Liegt die obere Seite EP der rechteckigen Ausflußöffnung nicht, wie eben angenommen, im Wasserspiegel selbst, sondern um die Höhe $AP = h_1$ tiefer, so braucht man nur, um die Ausflußmenge zu finden, von der ganzen Parabel-

fläche $ABL = \frac{2}{3} h \cdot \sqrt{2 g h}$ das Stück $APM = \frac{2}{3} h_1 \cdot \sqrt{2 g h_1}$ zu subtrahieren und erhält

$$M_1 = \frac{2}{3} \varkappa \cdot t \cdot b \, (h . \sqrt{h} - h_1 . \sqrt{h_1}) \cdot \sqrt{2 g}.$$

Beispiel. Für $h = 2$ m, $h_1 = 1{,}2$ m, $b = 1{,}3$ m, $t = 1$ sec; $\varkappa = 0{,}62$ ist $M_1 = 3{,}603$ cbm.

Aufgaben.

309. Wie groß ist die Ausflußgeschwindigkeit aus einer Bodenöffnung, wenn die Druckhöhe h a) 1 m; b) 0,5 m; c) 3,2 m ist?

Antw.: a) $v = 4{,}43 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; b) $v = 3{,}13 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; c) $v = 7{,}92 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

310. Im Boden eines zylindrischen Gefäßes befindet sich eine kreisrunde Öffnung, deren Durchmesser $d = 30$ mm ist; wieviel Wasser fließt aus dieser Öffnung in 1 Minute a) nach der theoretischen, b) nach der praktischen Formel ($\varkappa = 0{,}62$), wenn die Druckhöhe $h = 1{,}50$ m konstant erhalten wird?

Antw.: a) $M = 0{,}230$ cbm; b) $M_1 = 0{,}142$ cbm.

311. Aus einer kreisrunden Öffnung vom Durchmesser $d = 10$ mm wurde als Ausflußmenge in einer Minute 9422 ccm beobachtet; wie groß ergibt sich aus dieser Beobachtung der Ausflußkoeffizient, wenn die konstante Druckhöhe 50 cm ist?

Antw.: $\varkappa = 0{,}64$.

312. Welche Druckhöhe muß vorhanden sein, damit aus einer Öffnung von 10 qcm Querschnitt in 1 Std. 50 hl Wasser ausfließen?

Antw.: 0,256 m.

313. Wie groß muß die Druckhöhe sein, um eine Ausflußgeschwindigkeit am Boden des Gefäßes a) $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; b) $v = 5{,}5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; c) $v = g = 9{,}81 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ zu erzeugen?

Antw.: a) $h = 0{,}204$ m; b) $h = 1{,}54$ m; c) $h = \frac{g}{2} = 4{,}905$ m.

314. Wie groß ist der Durchmesser einer kreisrunden Öffnung, aus der bei $h = 1$ m Druckhöhe in 30 sec $M_1 = 150$ l Wasser ausfließen?

Antw.: 48 mm.

315. In welcher Zeit fließt aus einer Öffnung vom Querschnitte $q = 25$ qcm bei $h = 1{,}60$ m Druckhöhe die Wassermenge $M_1 = 5$ hl ab?

Antw.: In 58 sec.

316. Wieviel Wasser fließt aus einer kleinen kreisrunden Öffnung in der Seitenwand eines Gefäßes, deren oberer Rand $h' = 60$ cm Niveauhöhe hat, und deren Radius $r = 2$ cm ist, a) in 1 sec; b) in 25 sec aus, wenn das Wasser immer auf demselben Niveau erhalten wird?

Antw.: a) 27,2 l; b) 6,79 hl.

317. Welchen Druck muß man auf eine $h = 1{,}50$ m hohe Wassersäule ausüben, damit an ihrem Boden die Ausflußgeschwindigkeit $v = 8 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ entsteht?

Antw.: $176 \frac{\text{g}}{\text{qcm}}$.

318. Ein oben geschlossener Zylinder von $h = 0{,}30$ cm Höhe ist mit Wasser gefüllt und unten durch einen Kolben verschlossen; wie groß muß der Druck auf diesen Kolben von unten nach oben sein, damit das Wasser aus einer oben angebrachten Öffnung mit der Geschwindigkeit $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ausspritzt?

Antw.: $540 \frac{\text{g}}{\text{qcm}}$.

Einunddreissigstes Buch.

Ausfluß einer Flüssigkeit aus prismatischen Gefäßen bei sinkendem Niveau.

492.

Fließt die Flüssigkeit aus einer kleinen Öffnung im Boden oder in der Seitenwand eines prismatischen Gefäßes, das keinen Zufluß erhält, so wird der Spiegel der Flüssigkeit immerfort sinken, wodurch die Druckhöhe und folglich auch die Ausflußgeschwindigkeit immer kleiner uud kleiner werden muß. Steht aber die Flüssigkeit nur noch etwa 9,7 cm über der Ausflußöffnung, so beobachtet man, daß der bis dahin immer horizontale Flüssigkeitsspiegel auf einmal unruhig wird: es bildet sich eine Art Trichter (Strudel), in den Luft ein-

dringt und von da an den Ausfluß etwas verzögert. Von diesem Trichter abgesehen, soll nun die Zeit T gefunden werden, in der ein prismatisches Gefäß, dessen überall gleicher Querschnitt F ist, durch eine Ausflußöffnung vom Querschnitte q sich völlig leert, wenn die anfängliche Druckhöhe h ist.

Die Ausflußgeschwindigkeit ist anfänglich $v = \sqrt{2gh}$, wird, da h abnimmt, immer kleiner und wird zuletzt in dem Augenblicke, wo das Gefäß leer wird, gleich Null. Die Ausflußgeschwindigkeit nimmt also gleichförmig ab, gerade so wie die Geschwindigkeit eines Körpers, der vertikal aufwärts geworfen wird. Was nun die Dauer T des Ausflusses anlangt, so kann man annehmen, die Geschwindigkeit sei gleichförmig und zwar stets die mittlere $\frac{1}{2}\sqrt{2gh}$ gewesen. Denn wird ein Körper mit der Geschwindigkeit $\sqrt{2gh}$ vertikal aufwärts geworfen, so erreicht er die Höhe h in der Zeit $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ [§ 115 (4) und (5)]. In derselben Zeit würde er aber mit der gleichförmigen mittleren Geschwindigkeit $\frac{1}{2}\sqrt{2gh}$ die Höhe $\frac{1}{2}\sqrt{2gh}\cdot\sqrt{\frac{2h}{g}} = h$, also dieselbe Höhe erreichen.

Da nun bei dieser mittleren Geschwindigkeit $\frac{1}{2}\sqrt{2gh}$ die Ausflußmenge in jeder Sekunde $\varkappa \cdot q \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2gh}$ und der Kubikinhalt des Gefäßes in Kubikmeter gleich $F \cdot h$ ist, so hat man für die Zeit T, in der sich das Gefäß ganz leert, die Gleichung

$$\varkappa \cdot q \cdot T \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2gh} = F \cdot h,$$

aus der sich ergibt

$$T = \frac{2F}{\varkappa \cdot q} \cdot \sqrt{\frac{h}{2g}}.$$

493.

Aufgabe. In welcher Zeit t senkt sich der Wasserspiegel in dem im vorigen Paragraphen erwähnten prismatischen Gefäße von der Höhe h auf die Höhe h'?

Auflösung. Die gesuchte Zeit t ist offenbar die Differenz der Zeiten T und T', in denen sich einmal das bis zur Höhe h, das andere Mal das bis zur Höhe h' gefüllte Gefäß entleeren würde; so daß man leicht aus der Schlußformel des vorigen Paragraphen findet

$$t = \frac{2F}{\varkappa . q . \sqrt{2g}} (\sqrt{h} - \sqrt{h'}).$$

Beispiel. Für $F = 1{,}5$ qm; $q = 0{,}0011$ qm; $h = 5$ m; $h' = 3{,}5$ m und $\varkappa = 0{,}81$ findet man $t = 277{,}6$ sec.

494.

Aufgabe. An einem prismatischen Wasserbehälter, dessen Querschnitt $F = 130$ qm, wird durch Aufziehen einer Schütze eine rechteckige Ausflußöffnung von 70 cm Breite und 10 cm vertikaler Höhe, also von einem Querschnitte $q = 0{,}07$ qm gemacht. Die anfängliche Höhe des Wasserspiegels über dem Schwerpunkte der kleinen Ausflußöffnung ist $h = 3$ m. Wie hoch (h') über diesem Schwerpunkte steht der Wasserspiegel noch nach $t = 20$ min $= 1200$ sec, wenn $\varkappa = 0{,}7$?

Auflösung. Löst man die Formel des vorigen Paragraphen nach h' auf, so hat man

$$h' = \left(\sqrt{h} - \frac{\varkappa . q . t . \sqrt{2g}}{2F}\right)^2,$$

woraus der Zahlenwert

$$h' = 53{,}3 \text{ cm}$$

folgt.

495.

Aufgabe. Aus einem großen Wasserbehälter (einem Teiche, Kanale) fließt das Wasser durch eine kleine Schützenöffnung am Boden in einen andern leeren prismatischen Behälter (Schleusenkammer). In welcher Zeit wird der Wasserspiegel im letzteren mit dem im ersteren in einerlei Niveau stehen, wenn der Wasserspiegel in dem großen Behälter konstant bleibt (die Senkung des Spiegels nicht merklich ist). Der Querschnitt der Durchflußöffnung sei q, die

Niveauhöhe ihres Schwerpunktes im großen Behälter sei h, der Querschnitt des zu füllenden Gefäßes sei F und $\varkappa = 0{,}81$.

Auflösung. Da die anfängliche Ausflußgeschwindigkeit $v = \sqrt{2\,g\,h}$, wegen des wachsenden Gegendruckes gleichmäßig bis zu Null abnimmt, so ist die mittlere Geschwindigkeit $\frac{1}{2}\sqrt{2\,g\,h}$, und man hat genau wie im § 492

$$T = \frac{2\,F}{\varkappa \cdot q} \cdot \sqrt{\frac{h}{2\,g}}.$$

Anm. Soll der Spiegel im zweiten anfangs leeren Gefäße h' unter dem Spiegel des ersteren liegen, so ist wie im § 493

$$T = \frac{2\,F}{\varkappa \cdot q \cdot \sqrt{2\,g}} (\sqrt{h} - \sqrt{h'}).$$

496.

Aufgabe. Nach welcher Zeit T werden die Wasserspiegel zweier kommunizierender prismatischer Gefäße (Schleusenkammern) in einerlei Niveau stehen, wenn ihre Querschnitte $F_1 = 300$ qm; $F_2 = 200$ qm, die kleine Durchflußöffnung $q = 1{,}2$ qm, die Entfernungen der Wasserspiegel vom Schwerpunkte dieser Öffnungen $h_1 = 4$ m; $h_2 = 0{,}35$ m sind und $\varkappa = 0{,}6$ gerechnet wird?

Auflösung. Die Höhe x, um die das Niveau im zweiten Gefäße steigt, ist nach § 466

$$x = \frac{(h_1 - h_2) \cdot F_1}{F_1 + F_2},$$

mithin der in F_2 auszufüllende Raum

$$\frac{(h_1 - h_2) \cdot F_1 \cdot F_2}{F_1 + F_2}.$$

Da nun die anfängliche Geschwindigkeit $\sqrt{2\,g\,(h_1 - h_2)}$ stetig bis Null abnimmt, folglich die mittlere Geschwindigkeit $\frac{1}{2}\sqrt{2\,g\,(h_1 - h_2)}$ und der Durchfluß in jeder Sekunde

$\varkappa \cdot q \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2\, g\, (h_1 - h_2)}$ ist, so hat man die Gleichung

$$\varkappa \cdot q \cdot T \cdot \frac{1}{2} \sqrt{2\, g\, (h_1 - h_2)} = \frac{(h_1 - h_2) \cdot F_1 \cdot F_2}{F_1 + F_2},$$

aus der

$$T = \frac{F_1 \cdot F_2}{\varkappa \cdot q \cdot (F_1 + F_2)} \cdot \sqrt{\frac{2\,(h_1 - h_2)}{g}} = 143{,}8 \text{ sec}$$

folgt.

Zweiunddreissigstes Buch.

Vom Fließen des Wassers.

497.

Soll Wasser in einem Systeme von Röhren fortfließen, so kann dies nur geschehen, wenn nach der einen Richtung hin ein überwiegender Druck ausgeübt wird. Sind die Röhren horizontal oder aufwärts geneigt, so muß auf das Wasser ein äußerer Druck ausgeübt werden, entweder vermittels eines Kolbens, auf den durch irgendeine Kraft der erforderliche Druck ausgeübt wird, oder durch eine Wassersäule, die mit dem Röhrensysteme in Verbindung steht. Sind die Röhren abwärts geneigt, so findet das Fortfließen des Wassers ohne äußere Kräfte allein schon unter der Wirkung des durch das eigene Gewicht des Wassers erzeugten Druckes statt. In jedem Falle kann man aber den das Fortfließen erzeugenden Druck auf die Druckhöhe einer Wassersäule reduzieren, die durch ihr Gewicht den betreffenden Druck hervorbringen würde.

Beim Beginne einer solchen fließenden Bewegung des Wassers treten zwar mancherlei Stauungen ein, aber bald werden sich infolge der Inkompressibilität der Flüssigkeiten, wenn der Druck unverändert bleibt, die Geschwindigkeiten in den verschiedenen Teilen des Röhrensystems so ausgeglichen haben, daß durch jeden Querschnitt der Röhren in der gleichen Zeit die gleiche Menge Wasser hindurchfließt;

man sagt alsdann, es sei in der Bewegung des Wassers ein stationärer Zustand eingetreten.

Sind dann q_1 und q_2 zwei Querschnitte der Röhrenleitung, die vom Wasser mit den Geschwindigkeiten v_1 und v_2 durchflossen werden, so sind die durch beide Querschnitte in einer Sekunde fließenden Wassermengen $q_1 \cdot v_1$ und $q_2 \cdot v_2$ einander gleich, oder es gilt die Proportion

$$v_1 : v_2 = q_2 : q_1 ,$$

d. h. die Geschwindigkeiten des in einer Röhrenleitung unter konstantem Drucke fließenden Wassers an verschiedenen Stellen der Leitung verhalten sich umgekehrt wie die Querschnitte der Röhren an diesen Stellen.

498.

Hydraulischer Druck. Wenn ein Gefäß vom Wasser durchflossen wird, so übt das in Bewegung befindliche Wasser im allgemeinen einen anderen Druck sowohl auf die Wände des Gefäßes wie auch auf seine eigenen Schichten aus, als wenn das Gefäß verschlossen und mit einer ruhenden Wassermenge gefüllt wäre.

Im Gegensatze zu dem Drucke des ruhenden Wassers, den wir den hydrostatischen genannt und im 29. Buche ausführlich behandelt haben, nennt man den im bewegten (fließenden) Wasser herrschenden Druck den hydraulischen oder hydrodynamischen Druck.

Da sich beim Fließen des Wassers ein Teil der Druckspannung des ruhenden Wassers in Bewegung umwandelt, so ist für gewöhnlich der hydraulische Druck kleiner als der hydrostatische. Nur wenn die Ausflußöffnung im Vergleiche zum Querschnitte des Gefäßes so klein ist, daß das Sinken des Wasserspiegels und damit zugleich das Sinken oder die Bewegung der einzelnen Wasserschichten unmerklich ist, kann der hydraulische Druck dem hydrostatischen gleichgesetzt werden; aus diesem Grunde haben wir bei der Ableitung des Toricellischen Theorems eine kleine Ausflußöffnung vorausgesetzt.

499.

Bewegt sich eine Flüssigkeitsschicht mit der Geschwindigkeit v, so können wir diese durch eine Flüssigkeitssäule

von der Höhe $h = \frac{v^2}{2g}$ (§ 480) erzeugt denken, so daß dadurch, daß die Wasserteilchen die Geschwindigkeit v erhalten, die Wirkung dieser Druckhöhe $\frac{v^2}{2g}$, die deshalb auch Geschwindigkeitshöhe heißt, vollständig konsumiert worden ist.

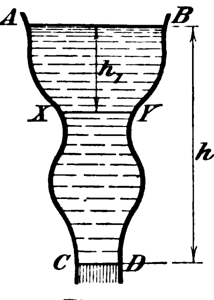


Fig. 214.

Fließt nun Wasser durch ein beliebig geformtes Gefäß (Fig. 214), ist v_0 die Geschwindigkeit des Wassers an der Oberfläche AB und v_1 die Geschwindigkeit des Wassers in der Querschicht XY, die h_1 unter dem Oberflächenspiegel liegt, so ist von der in diesem Querschnitte wirkenden Druckhöhe h_1 der Teil abzuziehen, der verbraucht worden ist, um die Geschwindigkeit v_0 in die Geschwindigkeit v_1 überzuführen, also die Druckhöhe $\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g}$, so daß, wenn die hydraulische Druckhöhe in der Querschicht XY mit h_1' bezeichnet wird, die Gleichung besteht

$$(1) \qquad h_1' = h_1 - \left(\frac{v_1^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g}\right),$$

d. h. die hydraulische Druckhöhe an irgendeiner Stelle ist gleich der hydrostatischen Druckhöhe vermindert um die Differenz der Geschwindigkeitshöhen an der betreffenden Stelle und am Spiegel der freien Oberfläche.

Da wir als Flüssigkeit Wasser gewählt haben, dessen spezifisches Gewicht 1 ist, so gibt die Maßzahl der hydraulischen Druckhöhe den hydraulischen Druck auf 1 qcm des Querschnitts in Grammen an.

500.

Der für die hydraulische Druckhöhe abgeleitete Wert (1) zeigt, daß der hydraulische Druck größer oder kleiner als der hydrostatische oder ihm gleich sein kann, je nachdem die in Klammern stehende Differenz negativ, positiv oder Null ist.

Schreiben wir die Gleichung (1) in der Form

$$h_1' = h_1 - \frac{v_1^2}{2g}\left(1 - \frac{v_0^2}{v_1^2}\right) \tag{2}$$

und beachten, daß wir nach § 497 für $\frac{v_0}{v_1}$ den Wert $\frac{q_1}{q_0}$ setzen können, wobei q_0 und q_1 die Querschnitte AB und XY des Gefäßes bedeuten, so daß also auch

$$h_1' = h_1 - \frac{v_1^2}{2g}\left(1 - \frac{q_1^2}{q_0^2}\right) \tag{3}$$

geschrieben werden kann, so ergibt sich das Folgende:

Ist $q_1 = q_0$, also auch $v_1 = v_0$, so ist der hydraulische Druck dem hydrostatischen gleich; ist $q_1 < q_0$, also $v_1 > v_0$, so ist der hydraulische Druck kleiner als der hydrostatische; ist endlich $q_1 > q_0$, also $v_1 < v_0$, so ist der hydraulische Druck größer als der hydrostatische.

Würde also die Seitenwand bei X durchbohrt und ein Ansatzröhrchen eingesetzt, so würde in diesem das Wasser im ersten Falle bis zur Höhe h_1 steigen, im zweiten Falle die Höhe h_1 nicht erreichen, im dritten Falle über den Wasserspiegel AB hinausgehen.

Anm. Ist die Geschwindigkeit v_0 des Oberwasserspiegels Null, so geht die Gleichung (1) über in

$$h_1' = h_1 - \frac{v_1^2}{2g}, \tag{4}$$

die zeigt, daß in diesem Falle der hydraulische Druck stets geringer als der hydrostatische sein muß.

501.

Durch eine hinreichend enge Einschnürung des Gefäßes läßt es sich sogar erreichen, daß die Geschwindigkeit v_1 so groß wird, daß der hydraulische Druck negativ wird, und daß durch eine an der Einschnürungsstelle angebrachte Öffnung nicht nur kein Wasser ausspritzt, sondern Luft eingesaugt wird.

Von dem negativen hydraulischen Drucke und den dadurch entstehenden Saugwirkungen macht man praktische

Anwendung bei der Wasserluftpumpe und dem Wassertrommelgebläse, die in den Fig. 215 und 216 schematisch dargestellt sind.

Bei der Wasserluftpumpe steht die Röhre *R* mit dem zu evakuierenden Raume in Verbindung; bei *A* tritt fort-

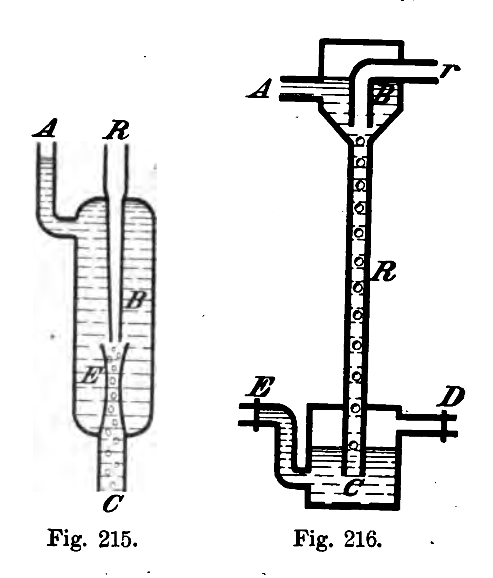


Fig. 215. Fig. 216.

während Wasser unter großem Drucke in das Gefäß *B* ein und fließt aus diesem durch eine dünne Öffnung *E* nach dem Abflußrohre *C*. Beim Übergange von *B* durch *E* nach *C* steigert sich die Geschwindigkeit so, daß durch die Röhre *R* Luft eingesaugt und vom Wasser mit fortgerissen wird.

Bei dem Wassertrommelgebläse tritt das Wasser unter großem Drucke bei *A* in den Behälter *B* ein; beim Übergange aus dem Behälter *B* in die enge Röhre *R* steigert sich die Geschwindigkeit so, daß durch die mit der äußeren Luft in Verbindung stehende Röhre *r* Luft eingesaugt, durch das fallende Wasser mit in den Behälter *C* fortgerissen, dort angesammelt und nun durch das zur Regulierung mit einem Hahne versehene Rohr *D* ausgeblasen wird, während das Wasser durch das Rohr *E* abfließt, das zur Regulierung des Druckes des austretenden Luftstrahles vielfach ebenfalls mit einem Hahne versehen ist.

Anm. Auf dem negativen hydraulischen Drucke beruht es auch, daß konische Ansatzrohre die Ausflußmenge einer Flüssigkeit vermehren (vgl. § 483, Anm.); es bildet sich nämlich durch die Kontraktion des Strahles in dem Rohre ein leerer Raum um den Strahl und dadurch entstehen Saugwirkungen, die die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen vermehren.

502.

Fließen in Röhren. In den bisherigen Betrachtungen ist stillschweigend vorausgesetzt worden, daß die durch den Druck geleistete Arbeit beim Fließen des Wassers vollständig in kinetische Energie umgesetzt werde; beim Fließen des Wassers durch weite Gefäße ist diese Annahme auch statthaft, bei engeren Leitungsrohren aber trifft sie nicht mehr zu. In diesen wird nämlich ein großer Teil der potentiellen Energie des Druckes zur Überwindung von Widerständen, namentlich der Reibung des Wassers an den Wänden der Rohrleitung, verbraucht oder, besser ausgedrückt, in eine andere Art von Energie (Wärme) umgesetzt.

Experimentell kann das durch folgenden leicht anzustellenden Versuch nachgewiesen werden. An dem Boden

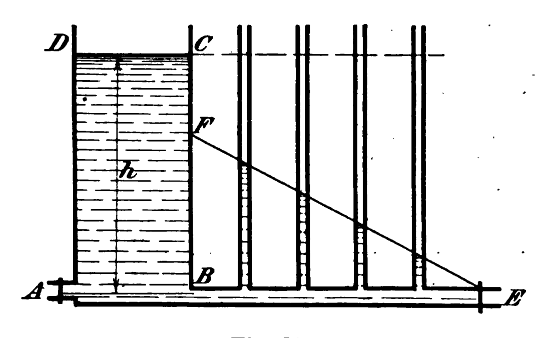


Fig. 217.

eines größeren weiten Gefäßes $ABCD$ (Fig. 217), in dem das Wasser auf der konstanten Höhe $AD = h$ erhalten wird, kann das Wasser sowohl durch die kleine Öffnung A direkt ausfließen als auch durch eine längere horizontale Röhre BE. Ist BE bei E verschlossen, so fließt das Wasser aus der Öffnung A mit einer Geschwindigkeit $v = \sqrt{2gh}$ aus, die der

Druckhöhe h entspricht; wird dagegen A geschlossen und bei E geöffnet, so ist dort die Ausflußgeschwindigkeit viel geringer, was man schon aus der Form der Parabel erkennen kann, die die ausfließenden Wasserteilchen beschreiben. Die Ausflußgeschwindigkeit bei E entspricht also nicht der Druckhöhe h, sondern einer viel geringeren. Deutlich erkennt man das, wenn an die horizontale Röhre $B\,E$ eine Anzahl vertikaler Ansatzröhren angebracht werden. Sind die Ausflußöffnungen bei A und E geschlossen, so hat das Wasser nach dem Gesetze der kommunizierenden Gefäße auch in den vertikalen Ansatzröhren überall die Höhe h. Wird jetzt bei E geöffnet, so sinkt in allen Ansatzröhren der Wasserspiegel und zwar in den einzelnen Röhren um so mehr, je näher sie der Ausflußöffnung E sind, so daß ihre Spiegel in einer von E ausgehenden geraden Linie $E\,F$ liegen, wenn die Röhre $B\,E$ innen überall gleichweit ist. Es sinken also die Höhen in den Ansatzröhren proportional ihrem Abstande von der Stelle B und geben die Drucke an, die durch den zu überwindenden Widerstand in der Röhre $B\,E$ bis zu der betreffenden Stelle verbraucht wurden. Es ergibt sich also, daß der Druck im Ausflußrohre $B\,E$ von B aus nach dem Ende hin gleichmäßig abnimmt. Von der Druckhöhe h geht daher ein Teil $B\,F = h_1$ durch die Reibung verloren, und nur der Rest $F\,C = h - h_1$ erzeugt die Ausflußgeschwindigkeit v — vorausgesetzt, daß außer der Reibung nicht noch weitere schädliche Widerstände zu überwinden sind.

Die in einem Wasserbehälter zur Verfügung stehende Druckkraft wird nämlich auch noch durch den sogenannten Eintrittswiderstand verringert, der dadurch entsteht, daß das Wasser aus dem weiten Gefäß in eine enge Röhre eintritt, wobei zugleich die Richtung des bewegten Wassers geändert wird und die Kohäsion der Wasserteilchen überwunden werden muß.

503.

Die durch die Reibung an den Rohrwänden verbrauchte Druckhöhe h_1, die sogenannte Widerstandshöhe, ist erfahrungsgemäß proportional der Länge l der Rohrleitung, umgekehrt proportional dem Durchmesser d der Röhren und

proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit; man schreibt deshalb

$$h_1 = \zeta_1 \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

wo ζ_1 sich zwar etwas mit v ändert, durchschnittlich aber den Wert 0,025 hat.

Die durch den Eintrittswiderstand verbrauchte Druckhöhe h_2 hat den Wert

$$h_2 = \zeta_2 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

worin $\zeta_2 = 0{,}505$ den Widerstandskoeffizienten für den Eintritt bezeichnet.

Der von der gesamten Druckhöhe verbleibende Rest $h - (h_1 + h_2)$ erzeugt nun die Ausflußgeschwindigkeit v, so daß man hat

$$h - (h_1 + h_2) = \frac{v^2}{2g},$$

woraus die Gleichung folgt

$$h = \frac{v^2}{2g}\left(1 + \zeta_2 + \zeta_1 \cdot \frac{l}{d}\right), \tag{5}$$

aus der v berechnet werden kann.

Die für v verlorene Druckhöhe $h_1 + h_2$ nennt man wohl auch den Gefällsverlust.

504.

Besitzt das Ausflußrohr BE Knickungen oder Krümmungen oder Verengungen, so erkennt man an den vertikalen Ansatzröhren, daß die Druckabnahme hinter denselben größer ist als bei einer geraden zylindrischen Röhre. Richtungsänderungen und Verengungen geben also noch weitere Verluste an der Druckhöhe in Rohrleitungen.

So hat man z. B. beobachtet, daß bei Knierohren, bei denen das Rohr um den Winkel α aus der ursprünglichen Richtung geknickt ist, die verbrauchte Druckhöhe zu

$$h_3 = \zeta_3 \cdot \frac{v^2}{2g},$$

$$\zeta_3 = 0{,}9457 \,.\, \sin^2\frac{\alpha}{2} + 2{,}047 \,.\, \sin^4\frac{\alpha}{2},$$

in Rechnung zu bringen ist; für $\alpha = 40^0$ ist z. B. $\zeta_3 = 0{,}139$.

Es ist nicht unsere Aufgabe, hier die verschiedenen Beobachtungsdaten aufzuzählen: sie sind in jedem für Ingenieure bestimmten Taschenbuche oder Kalender angegeben; daselbst findet man auch die Angaben über die Verluste an Druckhöhe durch an der Rohrleitung anzubringende Hähne und Ventile, Schieber und Drosselklappen.

505.

Fließen des Wassers in Kanälen und Flüssen. In offenen Kanälen und Flüssen fließt das Wasser infolge seiner Schwere nach den Gesetzen des Falles auf einer schiefen Ebene. Man nennt den Sinus des Neigungswinkels dieser schiefen Ebene das Gefälle des Kanales oder Flusses.

Durch die Reibung an dem Boden und an den Ufern des Kanales wird aber ein so großer Widerstand erzeugt, daß die Bewegung nicht wie auf der schiefen Ebene eine gleichförmig beschleunigte, sondern eine beinahe gleichförmige ist, so daß also die ganze Wirkung des Gefälles durch die Reibungswiderstände konsumiert wird.

Durch Geschwindigkeitsmessungen, die am sichersten mit dem Woltmannschen Flügel ausgeführt werden, hat man festgestellt, daß die Geschwindigkeit des fließenden Wassers am größten in der Mitte des Kanals und ein wenig unter der Oberfläche ist, — auch gegen die Luft findet an der freien Oberfläche Reibung statt — und daß sie nach dem Boden hin und nach den Seiten zu abnimmt.

Unter der mittleren Geschwindigkeit eines Kanales versteht man diejenige Geschwindigkeit, die sämtliches Wasser haben müßte, damit durch einen Querschnitt in derselben Zeit ebensoviel Wasser durchfließt, als bei der verschiedenen Geschwindigkeit wirklich durchfließt. Ist also Q der Querschnitt, M die in der Sekunde durch ihn fließende Wassermenge, so ist die mittlere Geschwindigkeit

$$v = \frac{M}{Q}.$$

Zur theoretischen Bestimmung der Geschwindigkeit des

Wassers in einem Kanale sind verschiedene Formeln aufgestellt worden; nach den Beobachtungen von **Bazin** und **Darcy** ist bei Kanälen

$$v = \sqrt{\frac{h}{\alpha\left(1 + \beta \cdot \frac{U}{F}\right) \cdot l \cdot \frac{U}{F}}},$$

worin l die Länge des Kanals, h die totale Gefällshöhe, $\frac{h}{l}$ also das Gefälle, F der Querschnitt des Wasserkörpers, U der benetzte Umfang des Kanalquerschnittes, α und β aber Erfahrungskonstanten bezeichnen, die von dem Materiale abhängen, aus denen der Kanal hergestellt ist. Sind z. B. die Wände des Kanals sehr glatt (gehobelte Bretter oder mit Zement geputzt), so ist $\alpha = 0{,}00015$; $\beta = 0{,}03$; für Kanäle in natürlichem Boden ist $\alpha = 0{,}00028$; $\beta = 1{,}25$.

Natürlich wird auch bei Kanälen und Flüssen die Geschwindigkeit durch Krümmungen im Laufe und Verengungen wesentlich modifiziert.

506.

Reaktion des fließenden Wassers. Bereits im § 462 ist die sogenannte Reaktion des fließenden Wassers ihrem Wesen nach behandelt worden; ihre Behandlung der Größe der Kraftwirkung nach möge jetzt nachgeholt werden.

Fließt das Wasser mit der Geschwindigkeit v aus, so ist der Reaktionsdruck P gleich der Kraft, die der Masse m des ausfließenden Wassers die Geschwindigkeit v erteilte, also

$$P = m \cdot v;$$

da die aus einer Öffnung vom Querschnitte q mit der Geschwindigkeit v ausfließende Wassermenge $q \cdot v$ ist, so ist $m = \frac{q \cdot v}{g}$, so daß man erhält

$$P = \frac{q \cdot v^2}{g};$$

ist nun h die Niveauhöhe des Schwerpunktes der Ausflußöffnung, so ist $v^2 = 2gh$ und

$$P = 2q \cdot h,$$

d. h. der **Reaktionsdruck ist das Doppelte des hydrostatischen Druckes, den das ruhende Wasser auf die Fläche der Ausflußöffnung ausüben würde.**

Dreiunddreissigstes Buch.

Vom Stoße des Wassers gegen feste Körper und umgekehrt.

507.

Wenn fließendes Wasser auf einen festen Körper trifft, so wird es mit einer gewissen Kraft auf den Körper wirken und ihn zu bewegen bestrebt sein.

Um diese Kraft zu bestimmen, müssen wir drei Fälle unterscheiden; nämlich 1. das fließende Wasser trifft in Form eines isolierten (d. h. nur von Luft umgebenen) Strahles auf eine Fläche; 2. das Wasser trifft, in einem Gerinne (Kanale) begrenzt, auf eine Fläche, die nur wenig kleiner als der Querschnitt des Gerinnes ist; 3. die Wassermenge ist gegenüber der von ihr getroffenen Fläche als eine unbegrenzte gedacht, wie z. B. die Wassermenge eines breiten Flusses, eines Sees oder eines Meeres.

508.

Nehmen wir zunächst den Fall, ein isolierter, mit der Geschwindigkeit v kontinuierlich fließender horizontaler Wasserstrahl treffe senkrecht auf eine vertikale Ebene (Tafel).

Man spricht in diesem Falle von dem Stoße des Wasserstrahles auf die Tafel, obgleich die Wirkung des auf die Tafel treffenden Strahles nicht mit der Wirkung des Stoßes verglichen werden kann, die ein fester Körper auf die Tafel ausüben würde, sondern sich in wesentlichen Punkten von dieser unterscheidet.

Man weiß nämlich aus Erfahrung, daß man die Tafel mittels einer passend angebrachten Leitrolle durch ein in entgegengesetzter Richtung des Strahles wirkendes Gewicht P an ihrer Stelle erhalten kann, während ein eigentlicher Stoß durch kein Gewicht sich aufheben lassen, sondern die Tafel in Bewegung setzen würde (vergl. § 367, II.). Die Wirkung

des Wasserstrahles ist vielmehr als ein eigentlicher Druck auf die Tafel zu betrachten, den wir als **hydraulischen Stoßdruck** bezeichnen wollen.

Um seine Größe P näher zu bestimmen, nehmen wir an, daß der Querschnitt des isolierten Wasserstrahles q und seine Geschwindigkeit v sei; dann ist $q \cdot v$ das Gewicht und $\frac{q \cdot v}{g}$ die Masse der in einer Sekunde auf die Tafel auftreffenden Wassermenge. Da nun wegen der leichten Verschiebbarkeit der Teilchen der tropfbar flüssigen Körper und der Fortpflanzung des Druckes stets die vorderste Schicht des Strahles durch den Druck der nachfolgenden sich auf der Tafel ausbreitet und abfließt, also seine ganze Geschwindigkeit verliert, so wird durch den Widerstand der festen Tafel der Masse $\frac{q \cdot v}{g}$ in jeder Sekunde die Geschwindigkeit v entzogen; die hierzu erforderliche Kraft ist

$$P = \frac{q \cdot v^2}{g}. \tag{1}$$

Genau so groß ist infolge der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung der hydraulische Stoßdruck auf die Wand.

Anm. In dieser Formel ist q in qcm, und v in $\frac{\text{cm}}{\text{sec}}$ gegeben, also Gramm die Benennung von P; ist v in $\frac{\text{m}}{\text{sec}}$ gegeben, so drücke man auch q in qm aus und hat dann

$$P = 1000 \cdot q \cdot \frac{v^2}{g} \text{ kg}.$$

509.

Führt man für $\frac{v^2}{2g}$ die Geschwindigkeitshöhe h ein, so erhält man

$$P = 2\, q \cdot h \tag{2}$$

d. h. **der hydraulische Stoßdruck des aus einer Öffnung in der Seitenwand eines Gefäßes austretenden horizontalen Wasserstrahles auf eine vertikale feste ebene Wand ist doppelt so groß als der hydro-**

statische Druck auf die Öffnung, wenn diese geschlossen wird.

Ist die Öffnung im Boden, der Strahl also vertikal, so gilt die vorstehende Formel ebenfalls, vorausgesetzt, daß das Wasser von der getroffenen horizontalen Tafel gleich abfließt, also nicht noch mit seinem Gewichte darauf drückt; außerdem muß erfahrungsgemäß die Fläche 10 bis 12 mal so groß als die Ausflußöffnung und von dieser um etwa ihren dreifachen Durchmesser entfernt sein. Ist die Fläche genau so groß als der Querschnitt des Strahles, so zeigt die Erfahrung, daß der Stoßdruck nur halb so groß ist, als die obige Formel angibt. Die Wasserfäden werden dann am Rande von ihrer Richtung etwas abgelenkt, kommen daher nicht sämtlich zur Wirkung, auch können sie sich dann nicht auf der Tafel ausbreiten.

510.

Trifft der isolierte Wasserstrahl mit der Geschwindigkeit v nicht senkrecht, sondern unter dem Winkel α gegen die feste Tafel, so müssen wir, da eine Fläche nur nach einer auf ihr senkrechten Richtung einer Druckkraft das Gleichgewicht halten kann, die Kraft $P = \frac{q \cdot v^2}{g}$ in zwei Komponenten, zerlegen, eine parallel der Tafel, die andere senkrecht dazu; nur die letztere übt einen Druck auf die Tafel aus, und dieser ist

$$P = \frac{q \cdot v^2 \cdot \sin \alpha}{g}.$$

511.

Bewegt sich die Wand in der Richtung des Strahles mit der Geschwindigkeit v_1 (wobei $v_1 < v$ sein soll), so wird nicht die Geschwindigkeit v des Strahles aufgehoben, sondern nur der Teil $v - v_1$ derselben. Man erhält dann für die hydraulische Stoßkraft den Wert

$$P = \frac{q\,(v - v_1)^2}{g}. \tag{3}$$

Bewegt sich umgekehrt die Tafel mit der Geschwindigkeit v_1 dem Wasserstrahle entgegen, so ist der Stoßdruck

$$P = \frac{q\,(v + v_1)^2}{g}. \tag{3'}$$

512.

Aufgabe. Ein Wasserstrahl CD vom Querschnitte q und der Geschwindigkeit v treffe unter dem Winkel α eine ruhende Tafel AB, die nur nach der Richtung DH ausweichen kann, die durch den Winkel $BDH = \beta$ bestimmt ist; mit welcher Kraft P wird die Tafel nach dieser Richtung gedrückt? (Fig. 218.)

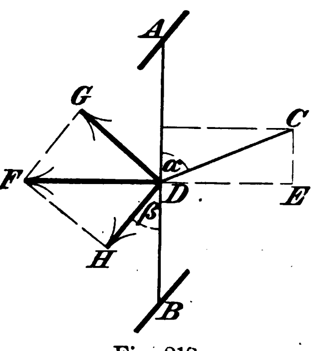


Fig. 218.

Auflösung. Weil die Tafel nur nach der Richtung DH ausweichen kann, so kann man annehmen, sie bewege sich zwischen zwei mit DH parallelen Schienen. Dann müssen wir die auf AB senkrechte Druckkomponente

$$DE = DF = \frac{q \cdot v^2 \cdot \sin \alpha}{g}$$

in zwei Komponenten, eine in der Richtung DH, die andere senkrecht dazu zerlegen. Letztere wird durch die Schienen bei A und B aufgehoben; die erstere ist der gesuchte wirksame Druck und hat die Größe

$$P = \frac{q \cdot v^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{g},$$

der für $\beta = \alpha$ den Wert

$$P = \frac{q \cdot v^2 \cdot \sin^2 \alpha}{g}$$

ergibt.

513.

Fließt Wasser in einem Gerinne und stößt es derart auf eine feste Fläche, daß alles Wasser des Gerinnes zum Stoße kommt, daß also die Fläche nicht kleiner als der Querschnitt des Gerinnes ist, und bewegt sich diese Fläche parallel fort, so kann die Geschwindigkeit dieser Fläche wegen ihrer Trägheit und der Reibung nicht gleich der des Wassers sein, sondern die Fläche muß sich mit einer kleineren Geschwindigkeit bewegen. Da aber dadurch eine Stauung eintritt, so erleidet die fließende Wassermenge eine Ver-

zögerung $v - v_1$, und ist eben durch diesen Geschwindigkeitsverlust erst fähig, einen Stoßdruck auszuüben. Es ergibt sich daher der Stoßdruck als das Produkt der Masse der bewegten Wassermenge in der Sekunde $\frac{q(v - v_1)}{g}$ und der Verzögerung, also

$$P = \frac{q(v - v_1)^2}{g}.$$

514.

Ist die stoßende Wassermenge unbegrenzt, d. h. die gestoßene Fläche nicht, wie zunächt angenommen wurde, viel größer als der Querschnitt der auftreffenden Flüssigkeitsmenge, sondern klein gegen den Querschnitt des fließenden Wassers, so begegnet die Bestimmung des Stoßdruckes erheblichen Schwierigkeiten; man ist daher meistens auf Erfahrungstatsachen angewiesen, von denen einige angeführt werden mögen.

Befindet sich ein zylindrischer oder prismatischer Körper ganz in Wasser eingetaucht, so sollte man meinen, daß der Stoßdruck ganz derselbe sein müßte, ob das bewegte Wasser gegen die Grundfläche des ruhenden Körpers oder die Grundfläche des Körpers mit derselben Geschwindigkeit gegen das ruhend gedachte Wasser stößt. Das soll jedoch erfahrungsgemäß nur dann einerlei sein, wenn die Länge des Körpers wenigstens 8 mal so groß als der Durchmesser der Grundfläche ist. Ist die Länge kleiner, so soll der Druck des Wassers gegen den ruhenden Körper etwas größer sein als umgekehrt. Die Erfahrung lehrt ferner, daß ein solcher Druck im unbegrenzten Wasser kleiner ist als der durch die Formel $P = \frac{q \cdot v^2}{g}$ angegebene; so daß man im unbegrenzten Wasser

$$P = \cdot \varkappa \frac{q \cdot v^2}{g}$$

zu setzen hat, wo $\varkappa$ einen Erfahrungskoeffizienten bezeichnet.

Ist die Länge des Körpers 8 oder mehrmal so groß als der Durchmesser, so wird $\varkappa = 0{,}695$ angenommen; ist die Länge nur doppelt so groß, so setzt man, wenn das Wasser gegen den Körper stößt, $\varkappa = 0{,}67$, und wenn umgekehrt der

Körper auf das Wasser stößt, $\varkappa = 0{,}65$. Für eine dünne Tafel soll im ersteren Falle $\varkappa = 0{,}93$, im letzteren $\varkappa = 0{,}625$ sein.

515.

Aufgabe I. Ein Zylinder soll sich nach der Richtung seiner Achse mit der Geschwindigkeit $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ in ruhigem Wasser bewegen; welcher konstante Widerstand ist zu überwinden, wenn die Länge des Zylinders $= 1{,}30$ m und sein Radius $r = 0{,}30$ m ist?

Auflösung. Da hier $q = \pi r^2$, $v = 2 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ und $\varkappa = 0{,}65$ ist, so erhält man

$$P = 0{,}65 \cdot \frac{\pi \cdot 0{,}3^2 \cdot 2^2}{g} \cdot 1000 \text{ kg}$$
$$= 74{,}940 \text{ kg}.$$

Aufgabe II. Ein eiserner Zylinder sinkt mit vertikaler Achse im Wasser; welche Geschwindigkeit c wird er erlangen, wenn der Radius der Grundfläche $r = 15$ cm, seine Höhe $h = 75$ cm und das spezifische Gewicht des Eisens $s = 7{,}2$ ist?

Auflösung. Da der Rauminhalt des Zylinders $\pi r^2 \cdot h$ ist, so ist sein Gewicht $\pi r^2 \cdot h \cdot s$; durch den Auftrieb verliert er an Gewicht $\pi r^2 \cdot h$; die konstante, den Zylinder in Bewegung setzende Kraft ist also $P = \pi r^2 \cdot h \cdot (s - 1)$. Der Zylinder wird nun so lange beschleunigt sinken, bis der mit dem Quadrate der Geschwindigkeit wachsende Widerstand oder Gegendruck des Wassers gleich P wird; alsdann muß sich der Zylinder mit der erlangten Geschwindigkeit c gleichförmig bewegen. Da hier $q = \pi r^2$ und $\varkappa = 0{,}65$ ist, hat man aus

$$\pi r^2 \cdot h (s - 1) = \varkappa \cdot \frac{\pi r^2 \cdot c^2}{g}$$

den Wert

$$c = \sqrt{\frac{g h \cdot (s - 1)}{\varkappa}}.$$
$$= 8{,}377 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

Anm. Der Stoßdruck auf eine krumme Fläche läßt sich nur mit Hilfe der höheren Mathematik bestimmen. In der Praxis (z. B. beim Bau der Schiffe) werden die betreffenden Näherungsformeln in der Regel durch Versuche bestimmt.

516.

Wasser kann entweder durch seine Lage oder durch seine Bewegung die Fähigkeit besitzen, Arbeit zu verrichten; eine größere Wassermenge, die solche Arbeitsfähigkeit besitzt, nennt man eine Wasserkraft.

Ein hochgelegenes Wasserreservoir, aus dem Wasser in tiefer gelegene Stellen fließen kann, besitzt wie ein Gewicht, das aus einer höheren Lage in eine tiefere sinken kann, Energie der Lage; bewegtes Wasser besitzt wie jeder bewegte Körper Energie der Bewegung.

Diese von der Natur dem Menschen unmittelbar dargebotene Arbeitsfähigkeit des Wassers ist seit den ältesten Zeiten benutzt und ausgenutzt worden. Gewöhnlich geschieht diese Ausnutzung dadurch, daß man das Wasser in Gerinne oder Kanäle leitet und zwischen den Zufluß- und Abflußkanal einen (hydraulischen) Motor einschaltet, auf den das Wasser wirkt. Den vertikalen Abstand der Wasserspiegel im Zufluß- und Abflußkanale nennt man das Gefälle des Wassers.

Dabei pflegt man den Effekt der Wasserkraft, d. h. die in einer Sekunde geleistete Arbeit, durch das Produkt aus dem Gewichte der in einer Sekunde zufließenden Wassermenge und dem Gefälle zu messen, auch in dem Falle, wo das Wasser nur durch seine Geschwindigkeit Arbeit leistet. Ein Wasserreservoir, das also in jeder Sekunde P kg Wasser an eine h m tiefer gelegene Stelle liefern kann, besitzt den Effekt $\frac{1}{75} P \cdot h$ PS; ebenso groß ist der Effekt einer in einer Sekunde herzufließenden Wassermenge vom Gewichte P kg, wenn die Geschwindigkeit v der Geschwindigkeitshöhe h entspricht.

Dieser theoretische Effekt einer Wasserkraft ist aber wohl von dem praktischen Effekte, d. h. dem an dem Motore sich zeigenden Nutzeffekte, zu unterscheiden.

517.

Wenngleich es nicht zu unserer Aufgabe gehört, genauer auf die hydraulischen Motoren einzugehen, so mögen doch einige Grundzüge in ihrer Anordnung und Wirkungsweise angegeben werden.

Die Form der Motoren ist die eines Rades, das durch die Wasserkraft um eine Achse gedreht wird. Ist diese Achse horizontal, so heißen die Motoren Wasserräder, ist die Achse vertikal, Turbinen.

518.

Unter den Wasserrädern unterscheidet man unterschlächtige und oberschlächtige; eine Mittelstufe bilden die mittelschlächtigen und die rückschlächtigen.

Die unterschlächtigen Wasserräder werden vorzugsweise bei großer Wassermenge und nur bei Gefällen unter 1,2 m verwendet. Ihr Wirkungsgrad ist klein, etwa 35 %, da das Wasser in der Hauptsache durch Stoß wirkt. Das in einem schiefliegenden geraden (Schnurengerinne) oder ausgebuchteten (Kropfgerinne) Gerinne fließende Wasser stößt gegen am Umfange des Rades angebrachte Schaufeln, indem das Rad mit seinem untern Teile in das Wasser taucht. Die Schaufeln sind entweder eben und radial gestellt (oder so geneigt, daß sie gerade vertikal aus dem Unterwasser auftreten) oder, wie bei den Ponceletschen Rädern, in zweckmäßiger Weise gekrümmt. Durch die gekrümmten Schaufeln und das Kropfgerinne erzielt man, daß das Wasser nicht nur durch Stoß, sondern auch durch sein Gewicht wirkt, wodurch der Wirkungsgrad auf 40 bis 50 % gesteigert werden kann. Der den Wasserzufluß regulierende Schützen ist stets ein Durchlaß- oder Spannschützen, der in der Regel vertikal, bei Rädern von größerem Durchmesser auch schief gestellt wird.

Die oberschlächtigen Wasserräder sind für Gefälle von 3 bis 12 m und einer sekundlichen Wassermenge von 0,05 bis 0,8 cbm anwendbar. Das Wasser tritt am höchsten Punkte in das Rad ein; die Schaufeln sind Zellen, die an beiden

Seiten durch Wände geschlossen sind, so daß sie auf der abwärts gehenden Seite des Rades mit Wasser gefüllt bleiben und sich erst unten entleeren; sie müssen zweckmäßig so konstruiert werden, daß sie bei genügender Schluckweite das Wasser möglichst lange zurückbehalten. Das Wasser wirkt bei diesen Rädern weniger durch den Stoß als durch sein Gewicht. Der Wirkungsgrad ist um so größer, je größer das Gefälle ist und schwankt zwischen 60 und 80 %.

Die mittelschlächtigen und rückschlächtigen Wasserräder bilden den Übergang von den unterschlächtigen zu den oberschlächtigen Rädern. Erstere werden bei Gefällen von 1,5 bis 3 m und einer sekundlichen Wassermenge bis zu 2,5 cbm, letztere bei Gefällen von 2,5 bis 8 m und bei einer sekundlichen Wassermenge bis zu 1 cbm angewandt. Die wirksamen Teile des Rades sind in einem Kropfgerinne mit nahe an das Rad herantretenden Außenwänden eingeschlossen; das Wasser wirkt durch sein Gewicht und durch seine Geschwindigkeit. Der Wirkungsgrad ist im Mittel 65 %.

Wird umgekehrt ein unterschlächtiges oder oberschlächtiges Rad durch eine äußere Kraft in Rotation versetzt, so kann das unterschlächtige zur Fortbewegung eines Körpers im Wasser (Schaufelräder der Dampfschiffe), das oberschlächtige zum Wasserschöpfen benutzt werden (Baggermaschine).

519.

Die Motoren mit vertikaler Achse, die Turbinen, können bei jedem auch noch so großen Gefälle benutzt werden. Im Vergleich mit den Wasserrädern haben die Turbinen viel kleinere Durchmesser.

Bei ihnen wirkt das Wasser durch den Stoßdruck; das vertikal herabfallende Wasser gelangt zunächst auf einen feststehenden Kranz von schief gestellten Schaufeln, den sogenannten Leitschaufeln oder Leitkurven, durch die dem fallenden Wasser eine zweckentsprechende Richtung gegeben wird; unter diesen Leitschaufeln befindet sich ein zweites um eine Welle drehbares Schaufelrad, das eigentliche Turbinenrad, dessen Schaufeln denen des ersteren Rades entgegengesetzt gerichtet sind und durch den Stoßdruck des Wassers in Bewegung gesetzt werden.

Man unterscheidet zwei Hauptarten von Turbinen, die Radial- und die Axialturbinen; bei den ersteren fließt das Wasser in der Richtung von der Welle nach außen (Fourneyrons Turbine) oder umgekehrt, wonach man Radialturbinen mit innerer oder äußerer Beaufschlagung unterscheidet; bei den Axialturbinen fließt das Wasser in der Richtung der Achse durch das Rad (Jonval-Henschelsche Turbine). Der Nutzeffekt der Turbinen ist 70 bis 80 %.

Dreht man umgekehrt durch eine äußere Kraft einen an einer Achse befestigten Schaufelkranz um diese Achse, so kann diese Vorrichtung zur Fortbewegung eines Körpers im Wasser benutzt werden (Schiffsschraube).

Sechster Abschnitt.

Aeromechanik.

Vierunddreissigstes Buch.

Von den Grundeigenschaften der gasförmigen Körper und vom Drucke der Luft.

520.

Von den festen und den tropfbar flüssigen Körpern unterscheiden sich die gasförmigen dadurch, daß sie keine selbständige Form haben wie die festen Körper, und kein bestimmtes Volumen einnehmen, wie die festen und die tropfbar flüssigen Körper. Wegen des ersteren Mangels nehmen sie die Gestalt der Gefäße an, in denen sie aufbewahrt werden, wegen des zweiten Mangels müssen diese Gefäße allseitig verschlossen sein. Die gasförmigen Körper besitzen nämlich keine Kohäsion, sondern dehnen sich aus, so lange sie nicht daran gehindert werden, und füllen daher jeden ihnen zur Verfügung stehenden Raum ganz aus. Man nennt diese Eigenschaft der Gase Expansion oder Ausdehnsamkeit.

Wird ein Gas durch Einschließen in ein Gefäß an der Ausdehnung gehindert, so ist sein Bestreben sich auszudehnen nicht geschwunden, sondern äußert sich in einem Drucke auf die Wände des Gefäßes, den man Gasdruck oder Gasspannung nennt.

Überall sind wir von einem gasförmigen Körper, der atmosphärischen Luft, umgeben, die wir deshalb als Repräsentanten der gasförmigen Körper benutzen können, wie wir

im vorigen Abschnitte das Wasser als Repräsentanten der tropfbar flüssigen Körper benutzt haben.

521.

Mit den tropfbar flüssigen Körpern haben die gasförmigen Körper eine Anzahl wichtiger Eigenschaften gemeinsam:

Wie alle Körper sind auch die Gase der Schwere unterworfen und besitzen daher ein bestimmtes Gewicht. So wiegt z. B. ein Liter Luft unter normalen Verhältnissen (vergl. § 533) 1,293 g; im übrigen sei auf die Tabelle im § 54 verwiesen.

Wie bei den Flüssigkeiten kann Gleichgewicht im Innern einer Gasmasse nur bestehen, wenn der Druck auf die Teilchen im Innern von allen Seiten derselbe ist; es herrscht daher im Innern eines Gases stets ein gewisser Spannungszustand, da der im vorigen Paragraphen erwähnte, stets vorhandene Gasdruck nicht nur auf die Wände des das Gas einschließenden Gefäßes, sondern auch an jeder Stelle im Innern des Gefäßes mit gleicher Stärke wirkt.

Wird ein äußerer Druck auf eine Gasmasse ausgeübt, so pflanzt sich dieser genau wie bei den tropfbar flüssigen Körpern wegen der leichten Verschiebbarkeit der Teilchen nach allen Richtungen in gleicher Stärke fort, so daß gleiche Flächenstücke gleiche Drucke erhalten, oder daß der Druck der gedrückten Fläche proportional ist.

Weil die Gase schwer sind und sich der Druck gleichmäßig in ihnen fortpflanzt, so muß auch für sie das Archimedische Prinzip gelten, daß jeder Körper in einem Gase so viel an Gewicht verliert, als die von ihm verdrängte Gasmenge wiegt.

Wegen der vielen übereinstimmenden Eigenschaften der Flüssigkeiten und Gase nennt man die Gase auch flüssige Körper, aber wegen der sogleich zu besprechenden Unterschiede von den tropfbar flüssigen Körpern elastisch flüssige Körper.

522.

Eine in einem zylindrischen, mit einem luftdichten Stempel verschlossenen Gefäße befindliche Gasmenge kann durch

Jede Kraft, die größer ist als der Druck, den das Gas auf den Stempel als auf einen Teil der Gefäßwand ausübt, auf einen kleineren Raum zusammengedrückt werden; es besitzen daher die Gase eine außerordentliche Kompressibilität und unterscheiden sich dadurch wesentlich von den tropfbar flüssigen Körpern.

Eine solche Verminderung des Volumens steigert aber die Spannung des eingeschlossenen Gases; denn nach dem Gesetze der Gleichheit von Wirkung und Wechselwirkung muß die Gasspannung gleich dem äußeren Drucke sein, der auf das Gas wirklich ausgeübt wird oder ausgeübt werden mußte, um es auf das jedesmalige Volumen zusammenzudrücken.

Läßt man daher die auf den Stempel wirkende äußere Kraft zu wirken wieder aufhören, so treibt die vermehrte innere Gasspannung den Stempel genau auf seine frühere Stelle zurück, so daß die gasförmigen Körper (in Übereinstimmung mit den tropfbar flüssigen) vollkommene Volumenelastizität besitzen.

Wie schon im § 520 bemerkt, ist die Ausdehnsamkeit der Gase ein zweiter wichtiger Unterschied zwischen ihnen und den tropfbar flüssigen Körpern.

523.

Die Erde ist ringsum von einer Lufthülle umgeben, deren Höhe aus astronomischen Gründen (Strahlenbrechung) etwa 10 bis 12 Meilen angenommen wird, und die die Atmosphäre heißt.

Die atmosphärische Luft ist (wenigstens in ihren unteren Schichten) ein Gemisch von 78,35 Raumteilen Sauerstoff, 20,77 Teilen Stickstoff, 0,84 Raumteilen Wasserdampf, 0,04 Raumteilen Kohlensäure und einigen erst in der letzten Zeit neu entdeckten Gasen (Argon, Helium, usw.). Der Gehalt an Wasserdampf und Kohlensäure wechselt, es sind daher die für sie angegebenen Zahlen nur Mittelwerte. Ob die Zusammensetzung in den oberen Schichten der Atmosphäre eine andere ist, wie manche Forscher annehmen, kann für uns hier gleichgiltig sein.

Da sich die Luft wegen ihrer Expansion nach außen von

der Erdoberfläche weg in den unbegrenzten Weltraum ausdehnen könnte, dies aber nicht geschieht, so muß eine Kraft vorhanden sein, die sie daran hindert, und also mit der Expansivkraft im Gleichgewichte ist. Dies ist die Schwerkraft der Erde, durch die jedes einzelne Luftteilchen von der Erde angezogen wird.

Die Schwerkraft hat aber außer der Expansivkraft auch noch der Zentrifugalkraft der Luftteilchen das Gleichgewicht zu halten; denn die atmosphärische Luft ist (von Störungen abgesehen) in bezug auf die Punkte der Erdoberfläche unbeweglich und nimmt an der Rotation der Erde teil, wodurch die Luftteilchen eine zentrifugale Beschleunigung erhalten, die durch die Schwerkraft aufgehoben wird.

524.

Denkt man sich eine zylindrische oder prismatische Luftsäule, deren Grundfläche auf der Oberfläche der Erde liegt, von dem übrigen Teile der Atmosphäre abgesondert und diese Gasmenge in dünne und gleich hohe horizontale Schichten zerlegt, die vertikal übereinander liegen, so muß der Druck und daher auch die Dichtigkeit von Schicht zu Schicht von unten nach oben abnehmen, weil von je zwei unmittelbar benachbarten Schichten die obere den Druck der auf ihr lastenden Luftsäule bis zur Grenze der Atmosphäre, die untere dazu noch das Gewicht der oberen Schicht zu tragen hat. Die oberste, die Atmosphäre begrenzende Schicht ist dann von so geringer Dichtigkeit, daß sie deshalb und auch wegen der Zentrifugalkraft keinen Druck mehr auf die unter ihr liegenden Schichten ausübt.

Die Atmosphäre kann also mit einem die Erde umgebenden Flüssigkeitsmeere verglichen werden, auf dessen Boden wir leben, und das dieselben Wirkungen wie eine tropfbare Flüssigkeit ausübt: jede Fläche erfährt einen Druck, der dem Gewichte der über ihr lastenden Luftsäule gleich ist; dieser Druck ist in gleichen Niveauhöhen, d. h. in zur Erdoberfläche parallelen Schichten konstant und nimmt von unten nach oben hin ab. Dieser Druck ist aber an einem und demselben Orte auf gleiche Flächenstücke derselbe, wie auch diese Flächen gerichtet sein mögen, und bei Flächen von ver-

schiedenen Größen diesen Größen proportional. Der Druck der atmosphärischen Luft wirkt allseitig auf einen Körper ein; er ist ebenso groß im Freien wie in einem geschlossenen Zimmer.

Man könnte die Größe des Luftdrucks, wie den Druck einer Flüssigkeitsmenge, nach der Formel $F \cdot h \cdot s$ berechnen, wenn man das spezifische Gewicht der Luft und die Höhe der Atmosphäre kennte; weil das letztere nicht der Fall ist, weil vor allen Dingen die Dichtigkeit der Luft, also auch ihr spezifisches Gewicht mit der Höhe über der Erdoberfläche sehr veränderlich ist, so kann der Luftdruck nicht berechnet, sondern muß durch andere Mittel beobachtet werden.

525.

Bevor wir jedoch zur Messung des Luftdruckes übergehen, seien einige geschichtliche Bemerkungen eingeschaltet.

Schon früh war man mit der Tatsache bekannt, daß in in Wasser getauchten Röhren, aus denen die Luft ganz oder teilweise fortgenommen war, Wasser emporstieg. Der Mechaniker Ktesibius zu Alexandrien (150 v. Chr.) benutzte diese Beobachtung zur Konstruktion der sogenannten Saugpumpe (§ 545). Erklärt wurde diese Beobachtung aber nicht durch den Druck der atmosphärischen Luft, sondern durch einen Abscheu der Natur vor dem leeren Raume (horror vacui).

Diese von Aristoteles aufgestellte Lehre, die sich zweitausend Jahre lang als die einzig richtige erhalten hat, wurde mit um so größerem Beifall aufgenommen, als man sie durch Experimente, insbesondere durch die sonst unbegreifliche Erscheinung des Saugens bekräftigen zu können glaubte. Wird der Kolben eines Zylinders, dessen unteres offenes Ende in Wasser taucht, emporgezogen, „so treibt, damit kein leerer Raum entsteht, der Abscheu vor diesem die Flüssigkeit in den Zylinder“.

Als aber im Jahre 1643 ein Gärtner zu Florenz den Abscheu gegen den leeren Raum allzusehr in Anspruch nehmen und mit seiner Hilfe durch eine Saugpumpe Wasser auf 40 Fuß (13 m) Höhe heben wollte, bemerkte man die damals die wissenschaftliche Welt in Erstaunen setzende merkwür-

dige Erscheinung, daß das Wasser in der Pumpe nur 32 Fuß (10,4 m) hoch stieg, mithin unter dem Kolben ein leerer Raum von 8 Fuß (2,6 m) blieb, gegen den die Natur keinen Abscheu zeigte.

Auch Galilei, an den man sich wandte, vermochte die Schwierigkeit nicht zu erklären; er soll, ob im Scherz oder Ernst mag dahin gestellt sein, gesagt haben: die Beobachtung beweise eben, daß der Abscheu gegen den leeren Raum nur 32 Fuß lang sei. Erst seinen Schülern Viviani und Toricelli war es vorbehalten, die richtige Erklärung zu finden.

526.

Viviani erkannte die Ursache des Steigens des Wassers in dem Luftdrucke und schloß weiter, daß, wenn dieser Wasser nur bis zur Höhe von 32 Fuß emportreiben kann, er Quecksilber, das 13,6 mal so schwer als Wasser ist, nur $\frac{32}{13,6}$ Fuß $=$ 2,353 Fuß $\sim$ 28 Zoll hoch treiben kann.

Toricelli führte den folgenden Versuch aus und bestätigte damit Vivianis Schlüsse:

Füllt man eine etwa 90—100 cm lange, an dem einen Ende geschlossene Glasröhre ganz mit Quecksilber, schließt sie mit dem Finger, taucht dann das offene Ende in ein weiteres mit Quecksilber gefülltes Gefäß, zieht dann den schließenden Finger unter dem Quecksilber wieder weg, so fällt das Quecksilber in der Röhre ein wenig, aber nur so weit, daß es in der Röhre etwa 760 mm höher steht, als im größeren Gefäße. Über dem Quecksilber aber bleibt ein leerer Raum oder ein Vakuum, das zu Ehren seines Entdeckers das Toricellische Vakuum genannt wird.

Neigt man das Rohr, so wird dieses Vakuum kleiner, ja es kann ganz verschwinden, denn der Niveauunterschied des Quecksilbers im offenen Gefäße und in der geschlossenen Röhre ist immer derselbe.

Die Form oder Weite des mit Quecksilber gefüllten Rohres ist bei dem Versuche offenbar ganz gleichgiltig. Soll jedoch der Apparat als Barometer, d. h. als Instrument dienen, mit dem der Luftdruck gemessen werden kann, so muß er mit besonderer Sorgfalt hergestellt werden.

527.

Es ist nicht unsere Aufgabe, genauer auf die Anforderungen einzugehen, die ein gutes Barometer erfüllen muß, auch nicht auf die verschiedenen Konstruktionen der Barometer; für uns reicht vorläufig die Tatsache aus, daß der Druck der Luft und ebenso der Druck eines jeden Gases durch den hydrostatischen Druck einer Flüssigkeit gemessen werden kann.

Da jedoch der Luftdruck mit dem Zustande der Atmosphäre, d. h. mit ihrer Temperatur und ihrem Feuchtigkeitsgehalte, schwankt, auch mit der Höhe, in der man ihn misst, sich ändert, da ferner beobachtet worden ist, daß er im Meeresniveau durchschnittlich 760 mm beträgt, da endlich das Volumen des Quecksilbers sich mit der Temperatur ändert, so ist man übereingekommen, den Druck einer Quecksilbersäule von 760 mm Höhe bei 0^0 als Normaldruck anzusehen, und bezeichnet diesen Druck als den einer Atmosphäre.

Da das spezifische Gewicht des Quecksilbers 13,59 ist, so entspricht der Quecksilbersäule von der Höhe 760 mm eine Wassersäule von $76 \cdot 13{,}59$ cm $= 1033$ cm Höhe, oder es beträgt der Druck einer Atmosphäre auf 1 qcm an Gewicht

$$1033 \text{ g} = 1{,}033 \text{ kg},$$

wofür im bürgerlichen Leben rund 1 kg gewählt wird.

Dieser Atmosphärendruck wird meistens als Maßeinheit für den Druck oder die Spannung gasförmiger Körper benutzt.

528.

Höhe der Atmosphäre. Wäre das die Erde umgebende und auf ihr ruhende Luftmeer überall von gleicher Dichte, so ließe sich seine Höhe leicht berechnen. Weil nämlich bei 0^0 und 760 mm Druck das Quecksilber 10515 mal so schwer als Luft ist, so müßte die Höhe der Atmosphäre mindestens

$$0{,}76 \cdot 10515 \text{ m} = 7991{,}4 \text{ m}$$

betragen.

Auch eine obere Grenze ließe sich durch Rechnung finden, indem man fragt, in welcher Entfernung vom Erdmittelpunkte die Schwerkraft gleich der Zentrifugalkraft wäre; denn über diese Entfernung hinaus würden die Luftteilchen zerstreut werden und nicht mehr als zur Erde gehörend betrachtet werden können. Eine wirkliche Grenze der Atmosphäre gibt es also auf jeden Fall.

Aus der Dauer der astronomischen Dämmerung ergibt sich, das die Luft das Sonnenlicht noch in einer Höhe von 10 Meilen reflektiert: so weit muß sich also die Atmosphäre wenigstens erstrecken. Aus dem Aufleuchten von Sternschnuppen hat man das Vorhandensein von Luft noch in einer Höhe von 34 Meilen geschlossen. Endgiltig ist diese Frage bis jetzt nicht beantwortet.

Fünfunddreissigstes Buch.

Das Boyle-Mariottesche und das Gay-Lussacsche Gesetz.

529.

Das Boyle-Mariottesche Gesetz. Die Haupteigenschaften der gasförmigen Körper, die Ausdehnsamkeit und die Kompressibilität, legen die Frage nahe, ob und wie beide voneinander abhängig sind. Da die Ausdehnsamkeit durch den Druck gemessen wird, den ein Gas auf die Wände des Gefäßes ausübt, handelt es sich also um die Frage, welches Gesetz zwischen dem Volumen (oder der Dichtigkeit) eines Gases und seiner Spannkraft besteht. Dieses Gesetz ist zuerst von dem englischen Physiker Boyle (1662) und etwas später unabhängig von ihm von dem französischen Physiker Mariotte (1679) durch Versuche aufgefunden worden und heißt darum das Boyle-Mariottesche Gesetz. Es lautet:

Bei gleichbleibender Temperatur ist das Volumen eines Gases umgekehrt proportional dem Drucke, dem es ausgesetzt ist.

Bezeichnet also das eine Mal p den Druck und v das Volumen einer Gasmenge, ein anderes Mal p_1 und v_1 Druck

und Volumen derselben Gasmenge bei unveränderter Temperatur, so lautet das Gesetz

(1) $$p : p_1 = v_1 : v$$

oder in einer Gleichung geschrieben:

(2) $$p \cdot v = p_1 \cdot v_1 ,$$

d. h. bei gleichbleibender Temperatur ist das Produkt aus dem Volumen einer Gasmenge und dem Drucke, dem sie ausgesetzt ist, konstant.

Da die Dichte eines Gases umgekehrt proportional dem Volumen ist, so kann man auch schreiben

(3) $$p : p_1 = d : d_1$$

oder die Dichte eines Gases ist dem Drucke proportional, unter dem es steht.

Da aber weiter nach dem Gesetze von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung die Spannkraft eines Gases gleich dem von außen darauf wirkenden Drucke ist, so kann man in den drei ausgesprochenen Sätzen statt der Worte „Druck von außen" auch Spannkraft sagen, und dann lautet das Boyle-Mariottesche Gesetz:

Die Spannkraft eines Gases ist umgekehrt proportional seinem Volumen und direkt proportional seiner Dichtigkeit.

Einen einfachen Versuch, der dieses Gesetz bestätigt, findet man in jedem Lehrbuche der Physik beschrieben.

Durch die klassischen Versuche von Regnault*) (1845) ist übrigens nachgewiesen worden, daß die meisten Gase nur innerhalb enger Grenzen genau dem Boyle-Mariotteschen Gesetze folgen, daß also das Gesetz nur angenähert richtig ist. Bei gewöhnlicher Temperatur nimmt Wasserstoff schon bei geringerem Drucke ein etwas größeres Volumen, die anderen Gase ein etwas kleineres Volumen ein, als die Rechnung nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetze liefert. Wird der Druck aber größer, so nimmt bei einigen Gasen, die durch Druck verflüssigt werden können (Kohlensäure, Ammoniak), das Volumen um so rascher ab, die Dichtigkeit um so rascher

*) Mémoires de l'Académie des sciences de l'Institut de France; Tome XXI.

zu, je näher die Gase dem Verflüssigungspunkte kommen, während bei denjenigen Gasen, die sich durch Druck allein nicht verflüssigen lassen (Wasserstoff, Stickstoff, Sauerstoff), sich ein immer größer werdender Widerstand gegen das Zusammendrücken zeigt, so daß sie bei sehr hohen Drucken (1000 bis 4000 Atmosphären) sich wie flüssige Körper, d. h. nahezu inkompressibel verhalten.

530.

Manometer. Um die Spannkraft der gasförmigen Körper zu messen, hat man eigens Apparate konstruiert, die Manometer heißen. Sie sind eine Abart des Barometers und bestehen aus einer U-förmig gebogenen, teilweise mit einer Flüssigkeit (Wasser oder Quecksilber) gefüllten Röhre, deren einer Schenkel durch einen Schlauch mit dem den gasförmigen Körper enthaltenden Gefäße (Gasometer, Dampfkessel u. dergl.) verbunden ist. Je nachdem der andere Schenkel, das sogenannte Steigrohr, offen oder verschlossen ist, unterscheidet man offene und geschlossene Manometer.

Bei den ersteren treibt der Gasdruck das Quecksilber in dem Steigrohre in die Höhe; die Niveaudifferenz in beiden Schenkeln des Rohres gibt den Überschuß des Gasdruckes über den der Atmosphäre an, und dieser Überdruck läßt sich dann in Atmosphären oder Kilogrammen ausdrücken.

Da das Steigrohr bei hohem Drucke sehr groß sein müßte und ihr Gebrauch unhandlich und unbequem würde, wendet man die offenen Manometer nur bei mäßigem Drucke an. Für hohe Drucke bedient man sich der geschlossenen Manometer, bei denen im geschlossenen Steigrohre über dem Quecksilber ein Quantum atmosphärischer Luft abgesperrt ist, das durch den Gasdruck komprimiert werden muß. Wird dieses Luftquantum auf $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, usw. seines Volumens komprimiert, so hat das diese Kompression erzeugende Gas eine Spannkraft von 2, 3, usw. Atmosphären.

Hierbei ist aber noch zu berücksichtigen, daß das Gas auch noch der Quecksilbersäule das Gleichgewicht halten muß, um die das Quecksilber im geschlossenen Schenkel höher steht als im offenen.

Hat die abgesperrte Luft unter dem Barometerstande $B = 760$ mm die Höhe h, unter dem unbekannten Drucke der Gase die Höhe h', so ist der Unterschied der Quecksilberniveaus in beiden Röhren $2\,(h - h')$, wobei die Röhren als genau zylindrisch vorausgesetzt werden; nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetze hat man dann die Proportion

$$\frac{x - 2\,(h - h')}{B} = \frac{h}{h'},$$

aus der der Druck x des Gases berechnet werden kann.

Gewöhnlich gestattet eine am Steigrohre angebrachte Eichung ein einfaches Ablesen dieses Druckes.

Für sehr verdünnte Gase (Barometerprobe bei der Luftpumpe) ist das Steigrohr geschlossen und luftleer; der Niveauunterschied der Quecksilberoberflächen in beiden Röhren ist der noch vorhandene Gasdruck.

531.

Das Gay-Lussacsche Gesetz. Auf die Größe des Volumens und daher auch auf die Spannkraft der gasförmigen Körper hat die Temperatur großen Einfluß. Durch sorgfältig ausgeführte Versuche hat Gay-Lussac (1802) dadurch, daß er etwas Luft in einem thermometerartigen Gefäße durch einen Quecksilbertropfen absperrte und die Verschiebung dieses Tropfens beobachtete, während die Luft in einem Öl- oder Wasserbade erwärmt wurde, das nach ihm benannte Gesetz gefunden, daß die Ausdehnung der Gase der Temperaturzunahme proportional ist, sofern nur während der Erwärmung der Druck, dem das Gas ausgesetzt ist, unverändert bleibt, und daß der Ausdehnungskoeffizient α für alle Gase derselbe ist.

Genauere später angestellte Versuche von Regnault, Magnus und Jolly haben als Wert des Ausdehnungskoeffizienten für Luft $\alpha = 0{,}00367 = \frac{1}{273}$ ergeben, zugleich aber auch dargetan, daß das Gesetz von Gay-Lussac nicht absolut richtig ist. Es weichen nicht nur die Werte von α für die einzelnen Gase (wenn auch nur sehr wenig) von-

einander ab, sondern bei stärkerer Kompression zeigen sich noch andere Abweichungen.

Da man unter dem Ausdehnungskoeffizienten α eines Körpers denjenigen Faktor versteht, mit dem man das Volumen des Körpers bei 0^0 multiplizieren muß, um die Zunahme des Volumens bei einer Temperaturerhöhung um 1^0 C zu erhalten, so gilt, wenn v_0 das Volumen einer Gasmenge bei 0^0, v ihr Volumen bei t^0 C bezeichnet, vorausgesetzt, daß der Druck, dem das Gas ausgesetzt ist, unverändert bleibt, für alle gasförmigen Körper die Gleichung

$$(1) \qquad v = v_0\,(1 + \alpha\, t) = v_0\,(1 + 0{,}00367\, t)$$
$$= v_0\left(1 + \frac{t}{273}\right) = v_0 \cdot \frac{273 + t}{273}.$$

Ist v' das Volumen derselben Gasmenge bei t'^0, so gilt ebenso die Gleichung

$$(2) \qquad v' = v_0 \cdot \frac{273 + t'}{273}.$$

Durch Division der beiden Gleichungen erhält man

$$(3) \qquad \frac{v}{v'} = \frac{273 + t}{273 + t'}.$$

Um dieses Gesetz in einfacher Form auszusprechen, ist man übereingekommen, die um 273 vermehrten Temperaturangaben des 100teiligen Thermometers absolute Temperaturen zu nennen und mit T, T' zu bezeichnen, so daß man (3) in der Form

$$(4) \qquad \frac{v}{v'} = \frac{T}{T'}$$

schreiben und aussprechen kann:

die Volumina derselben Gasmenge verhalten sich bei ungeändertem Drucke wie ihre absoluten Temperaturen.

532.

Ist während der Temperaturänderung einer Gasmenge auch der Druck veränderlich, so hat man das Gay-Lussacsche Gesetz mit dem Boyle-Mariotteschen zu vereinigen und erhält dadurch die Beziehung zwischen Volumen, Temperatur

und Spannkraft einer Gasmenge, wenn diese Größen alle drei als veränderlich betrachtet werden.

Zu diesem Zwecke nehmen wir an, daß eine Gasmenge

bei der Temperatur t^0 das Volumen v und die Spannkraft p,
„ „ „ $t_1{}^0$ „ „ v' „ „ „ p,
„ „ „ $t_1{}^0$ „ „ v_1 „ „ „ p_1

besitze.

Für die beiden ersten Zustände der Gasmenge gibt das Gay-Lussacsche Gesetz die Gleichung

$$\frac{v}{v'} = \frac{273 + t}{273 + t_1}; \tag{1}$$

vergleicht man aber die beiden letzten Zustände der Gasmenge, so erhält man nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetze die Gleichung

$$\frac{v'}{v_1} = \frac{p_1}{p}. \tag{2}$$

Die Multiplikation der Gleichungen (1) und (2) ergibt

$$\frac{v}{v_1} = \frac{(273 + t)p_1}{(273 + t_1)p}, \tag{3}$$

wofür man auch schreiben kann

$$\frac{v \cdot p}{273 + t} = \frac{v_1 \cdot p_1}{273 + t_1} \tag{4}$$

oder unter Einführung der absoluten Temperaturen

$$\frac{v \cdot p}{T} = \frac{v_1 \cdot p_1}{T_1}. \tag{5}$$

Jede der Gleichungen (3), (4) und (5) drückt die Vereinigung des Boyle-Mariotteschen Gesetzes mit dem Gay-Lussacschen aus. Je nach der Form, die man wählt, kann man das vereinigte Gesetz in anderen Worten aussprechen, so z. B. die Gleichung (5) etwa mit den Worten:

Das Produkt aus dem Volumen und der Spannung dividiert durch die absolute Temperatur ist für eine gewisse Gasmenge immer dieselbe Zahl, die nur von der Menge und der Natur des Gases abhängt.

Schreibt man (5) in der Form

$$(6) \qquad \frac{v \cdot p}{v_1 \cdot p_1} = \frac{T}{T_1},$$

so hat man den Satz:

Bei jeder Gasmenge ist das Produkt aus dem Volumen und dem Drucke (oder der Spannkraft) der absoluten Temperatur proportional.

Es braucht wohl kaum hinzugefügt zu werden, daß das vereinigte Gesetz auch nur innerhalb derselben Grenzen gilt, innerhalb deren die Gesetze einzeln Gültigkeit haben.

Wird während der Temperaturänderung eines Gases das Volumen konstant erhalten ($v = v_1$), so folgt aus (6) die Gleichung

$$(7) \qquad \frac{p}{p_1} = \frac{T}{T_1},$$

d. h. die Spannkraft einer Gasmenge ist bei unverändertem Volumen der absoluten Temperatur proportional.

Wird aber während der Temperaturänderung der Druck konstant erhalten ($p = p_1$), so folgt aus (6) die Gleichung

$$(8) \qquad \frac{v}{v_1} = \frac{T}{T_1},$$

d. h. das Gay-Lussacsche Gesetz.

Anm. Beide Gleichungen (7) und (8) können dazu dienen, den Ausdehnungskoeffizienten α eines Gases zu bestimmen, wenn man sie in der Form

$$\frac{p}{p_1} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1} \text{ oder } \frac{v}{v_1} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1}$$

schreibt. Gewöhnlich benutzt man die erste Formel, da es verhältnismäßig leichter ist, das Volumen einer Gasmenge konstant zu erhalten und die Spannkraft des Gases zu messen als umgekehrt. Wegen der Ausführung dieser Versuche kann auf jedes Lehrbuch der Physik verwiesen werden.

533.

Sollen zwei Gasvolumina miteinander verglichen werden, so müssen sie gleichen Druck und gleiche Temperatur be-

sitzen. Man ist nun übereingekommen, zu sagen, ein Gas befinde sich in Normalumständen, wenn seine Temperatur 0° und sein Druck 760 mm ist.

Die Reduktion einer Gasmenge auf Normalumstände geschieht mittels des kombinierten Boyle-Mariotte-Gay-Lussacschen Gesetzes.

Ist v_0 das Volumen einer Gasmenge bei 0° und dem Drucke $p_0 = 760$ mm, v das Volumen derselben Gasmenge bei t^0 und unter dem Drucke p, so kann man die Gleichung (4) des vorigen Paragraphen, wenn man v_1, p_1 und t_1 durch v_0, p_0 und 0° ersetzt, schreiben

$$(1) \qquad v \cdot p = v_0 \cdot p_0 \cdot \frac{273 + t}{273}$$

oder unter Einführung der absoluten Temperatur $T = 273 + t$ in der Form

$$(2) \qquad v \cdot p = \frac{v_0 \cdot p_0}{273} \cdot T = R \cdot T,$$

worin $R = \frac{v_0 \cdot p_0}{273}$ eine Konstante, die sogenante Gaskonstante, ist.

Die Gleichung (2) heißt, da die 3 Größen p, v und t (oder T) den Zustand einer Gasmenge vollständig bestimmen, die Zustandsgleichung der Gase.

Oben (§ 521) ist angegeben, daß 1 l = 1000 ccm Luft unter Normalumständen 1,293 g wiegt, daher nimmt 1 g Luft unter denselben Umständen das Volumen

$$v_0 = \frac{1\,000}{1{,}293} \text{ ccm} = 773{,}4 \text{ ccm}$$

ein.

Der numerische Wert der Gaskonstante R hängt von den Einheiten ab, die man der Rechnung zugrunde legt. Mißt man die Spannung der Luft durch die in mm ausgedrückte Höhe einer Quecksilbersäule, so ist für Luft der numerische Wert der Konstante

$$R = \frac{773{,}4 \cdot 760}{273} = 2153;$$

mißt man aber die Spannung durch den Druck in kg auf

1 qcm Fläche, so erhält R für Luft den Wert

$$R = \frac{773,4 \,.\, 1,033}{273} = 2,9265.$$

Anm. Die Zahlen für die spezifischen Gewichte der Gase (§ 54) gelten unter der Voraussetzung, daß die Gase in Normalzuständen sind.

534.

Aufgabe. Ein Chemiker entwickelt bei 25° C und 740 mm Barometerstand 1,256 l Kohlensäure; welches Volumen nimmt diese unter Normalumständen ein, und wieviel wiegt die Gasmenge, wenn das auf Luft bezogene Gewicht der Kohlensäure 1,52 ist?

Auflösung. Aus der Formel (1) des vorigen Paragraphen ergibt sich für das gesuchte Volumen v_0 der Wert

$$v_0 = \frac{v \,.\, p \,.\, 273}{p_0\,(273 + t)}\,\mathrm{l} = \frac{1,256 \,.\, 74 \,.\, 273}{76 \,.\, 298}\,\mathrm{l} = 1,120\,\mathrm{l};$$

das Gewicht P folgt dann aus der Gleichung $P = v_0 \,.\, s$ zu

$$P = 1,120 \,.\, 1,293 \,.\, 1,52\,\mathrm{g} = 2,202\,\mathrm{g}.$$

535.

Barometrische Höhenmessung. Steigt man mit einem Barometer auf einen Berg, so ist klar, daß das Quecksilber im geschlossenen Schenkel desto mehr sinken muß, je höher man steigt, weil ja die auf den offenen Schenkel drückende Luftsäule immer kürzer und auch immer dünner wird. Um diesen aus der Viviani-Toricellischen Lehre vom Luftdrucke sich ergebenden Schluß und damit zugleich die Richtigkeit dieser Lehre überhaupt bestätigt zu finden, veranlaßte Pascal im Jahre 1648 seinen Schwager Perier in Clermont zur Besteigung des benachbarten 3000 Fuß hohen Puy-de-Dôme.

Diese Abnahme des Luftdruckes erfolgt aber keineswegs in der Weise, daß gleichen vertikalen Erhebungen über dem Erdboden gleiche Abnahmen des Barometerstandes entsprechen, weil die Dichtigkeiten und daher auch die Gewichte gleichhoher Luftschichten verschieden sind; nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetze sind die unteren schwerer als die

oberen. Doch ist wohl einleuchtend, daß das Sinken des Quecksilbers im Barometer eine bestimmte Funktion der durchlaufenen Höhe ist; diese Funktion zu finden, sei unsere Aufgabe.

Wir denken uns eine vertikale Luftsäule $A\,B$ (Fig. 219) in horizontale Schichten von je 1 m Höhe zerlegt und nehmen an, daß in der ganzen Luftsäule die Temperatur sich mit der Höhe nicht ändert, also in allen Schichten dieselbe ist, und daß wir die Dichtigkeit der Luft in jeder einzelnen der 1 m hohen Schichten als gleichförmig betrachten können.

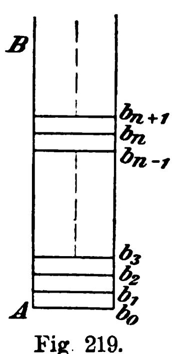


Fig. 219.

Es sei b_0 der Barometerstand auf der Erdoberfläche bei A; b_1, b_2, . . . seien die Barometerstände in 1, 2, . . . m Höhe; ferner seien d_1, d_2, . . . die Dichtigkeiten der Luft in den einzelnen Schichten.

Da nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetze die Dichtigkeit dem Drucke proportional ist und dieser durch den Barometerstand angegeben wird, so gelten die Proportionen

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{b_2}{b_1};\ \frac{d_3}{d_2} = \frac{b_3}{b_2};\ \ldots\ \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n};\ \ldots$$

Da aber das Gewicht einer Schicht direkt durch die Differenz der Barometerstände an seiner unteren und oberen Grenze gemessen wird, so gelten auch die Proportionen

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{b_1 - b_2}{b_0 - b_1};\ \frac{d_3}{d_2} = \frac{b_2 - b_3}{b_1 - b_2};\ \ldots\ \frac{d_{n+1}}{d_n} = \frac{b_n - b_{n+1}}{b_{n-1} - b_n};\ \ldots$$

Durch die Verbindung dieser beiden Proportionen erhält man

$$\frac{b_1 - b_2}{b_0 - b_1} = \frac{b_2}{b_1};\ \frac{b_2 - b_3}{b_1 - b_2} = \frac{b_3}{b_2};\ \ldots\ \frac{b_n - b_{n+1}}{b_{n-1} - b_n} = \frac{b_{n+1}}{b_n};\ \ldots,$$

aus denen leicht folgt:

$$b_1{}^2 = b_0 \,.\, b_2;\ b_2{}^2 = b_1 \,.\, b_3;\ \ldots\ b_n{}^2 = b_{n-1} \,.\, b_{n+1};\ \ldots$$

oder

$$b_0 : b_1 = b_1 : b_2 = b_2 : b_3 = \ldots = b_{n-1} : b_n = b_n : b_{n+1} = \ldots$$

Setzt man $\frac{b_1}{b_0} = k$, so kann man auch schreiben

$$b_1 = b_0 \,.\, k;\ b_2 = b_1 \,.\, k = b_0 \,.\, k^2;\ b_3 = b_2 \,.\, k = b_0 \,.\, k^3;$$
$$\ldots\ b_n = b_0 \,.\, k^n;\ \ldots$$

Es nehmen also die Barometerstände, d. i. die Luftdrucke in geometrischer Reihe ab, wenn die Höhen in arithmetischer Reihe wachsen.

Sind nun B_1 und B_2 die Barometerstände in den Höhen h_1 und h_2 und ist $h_1 < h_2$, so ist

$$B_1 = b_0 \,.\, k^{h_1}; \quad B_2 = b_0 \,.\, k^{h_2},$$

woraus durch Division

$$k^{h_2 - h_1} = \frac{B_2}{B_1}$$

folgt. Setzt man nun den Höhenunterschied $h_2 - h_1 = H$, so erhält man aus

$$k^H = \frac{B_2}{B_1}$$

$$H \log k = \log B_2 - \log B_1$$

oder

$$H = \frac{\log B_2 - \log B_1}{\log k}. \tag{1}$$

Da k ein echter Bruch ist, ist $\log k$ negativ, aber auch der Zähler ist negativ; setzt man deshalb

$$A = -\frac{1}{\log k},$$

so kann man die Formel für H schreiben:

$$H = A\,(\log B_1 - \log B_2), \tag{2}$$

woraus man erkennt, daß zur Berechnung des Höhenunterschiedes H zweier Orte, an denen die Barometerstände B_1 und B_2 beobachtet sind, nur noch die Konstante A bestimmt werden muß. Diese Bestimmung kann sowohl durch Versuche als durch Rechnung geschehen.

Durch Versuche kann A bestimmt werden, indem man die Höhendifferenz H zweier Orte, an denen die Barometerbeobachtungen B_1 und B_2 gemacht worden sind, auf anderem Wege (trigonometrisch) bestimmt und A aus den 3 bekannten Größen H, B_1 und B_2 berechnet. Man hat so gefunden, daß, wenn man sich vom Meeresniveau um 10,5 m erhebt, das Barometer von 760 mm auf 759 mm fällt, woraus der Wert $A = 18421$ m folgt. Solche Messungen hat de Luc und später Ramond (1811) ausgeführt, aus dessen genaueren trigonometrischen Messungen sich $A = 18393$ m ergeben hat.

In anderer Weise findet man A wie folgt: Ist die Temperatur der Luft 0^0 und der Barometerstand auf dem Boden 760 mm, so ist die Luft 773,4 mal so leicht als Wasser und 773,4 . 13,596 = 10515 mal so leicht als Quecksilber; es muß daher das Barometer um $\frac{1}{10515}$ m = 0,095 mm fallen, wenn man sich um 1 m erhebt; man hat daher

$$k = \frac{b_1}{b_0} = \frac{759{,}905}{760} \text{ und } \log k = -0{,}0000535,$$

woraus $A = 18402$ m folgt.

Als Mittelwert aus diesen Beobachtungen und Rechnungen pflegt man $A = 18400$ m zu setzen, so daß die Formel (2) in

$$H = 18400 \text{ m} \,.\, (\log B_1 - \log B_2) \tag{3}$$

übergeht.

Diese Formel gilt aber nur für eine mittlere geographische Breite von 45^0 und für 0^0 Temperatur. So genaue Resultate wie direkte trigonometrische Messungen kann sie schon deshalb nicht geben, weil die Voraussetzung, daß die ganze Luftsäule gleich trocken und von gleicher Temperatur sei, in der Wirklichkeit nie zutrifft. Es müßte also die Feuchtigkeit und die Temperaturänderung der Luft, aber auch die durch die geographische Breite bedingte Abnahme der Schwerkraft berücksichtigt werden. Für diese geforderte Genauigkeit haben Laplace und Gauß Formeln entwickelt und die Rechnung erleichternde Tafeln entworfen.

Die bedeutendste Korrektur rührt von der Temperatur her, und diese wollen wir noch anbringen.

Die in Formel (3) als trocken vorausgesetzte Luft dehnt sich für jeden Zentesimalgrad Wärme um $\frac{1}{273} = 0{,}00367$ ihres Volumens aus; nimmt man wegen der in der Luft nie fehlenden spezifisch leichteren Wasserdämpfe statt des Koeffizienten 0,00367 abgerundet 0,004 an, und nimmt man als durchschnittliche Temperatur der Luft das arithmetische Mittel aus den Temperaturen t_1 und t_2 der Beobachtungs-

stationen an, so hat man jene 10,5 m, die A ergaben, also auch A selbst mit dem Faktor

$$1 + 0{,}004 \, . \, \frac{t_1 + t_2}{2} = 1 + 0{,}002 \, (t_1 + t_2)$$

zu multiplizieren, so daß die genauere Formel lautet

(4) $H = 18400 \cdot (1 + 0{,}002 \, (t_1 + t_2)) \cdot (\log B_1 - \log B_2)$ m.

Will man auch noch die geographische Breite φ berücksichtigen, so ist die Formel

(5) $$H = 18400 \, . \, (1 + 0{,}002 \, (t_1 + t_2)) \cdot (\log B_1 - \log B_2) \cdot (1 + 0{,}0026 \cdot \cos 2\,\varphi) \text{ m}$$

anzuwenden.

Beispiel 1. Zur Bestimmung der Höhe des Herzberges bei Ilfeld wurden gleichzeitig beobachtet

$$B_1 = 736{,}5 \text{ mm}; \quad t_1 = 7^0{,}8;$$
$$B_2 = 717{,}0 \text{ mm}; \quad t_2 = 6^0{,}2;$$

man hat, da $1 + 0{,}002 \, . \, 14 = 1{,}028$ ist, folgende Rechnung

$$\begin{aligned} \log B_1 &= 2{,}86721 \\ \log B_2 &= 2{,}85548 \\ \hline \log B_1 - \log B_2 &= 0{,}01173 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \log 18400 &= 4{,}26482 \\ \log 1{,}028 &= 0{,}01199 \\ \log 0{,}01173 &= 0{,}06930 - 2 \\ \hline \log H &= 2{,}34611 \\ H &= 221{,}8 \text{ m.} \end{aligned}$$

Gauß findet mit Berücksichtigung aller Umstände, namentlich auch der geographischen Breite des Herzberges ($51^0 \, 34'$) diese Höhe zu 220,76 m.

Beispiel 2. Saussure beobachtete 1 m unter dem Gipfel des Montblanc $B_2 = 434{,}2$ mm und $t_2 = -2^0{,}87$; gleichzeitig wurde 35 m über dem Genfer See $B_1 = 738{,}5$ mm und $t_1 = 28^0{,}25$ beobachtet. Hieraus ergibt sich die Höhe des Montblanc zu 4443 m; Laplace findet mit Berücksichtigung aller kleinen Korrekturen 4447 m. Coraboeuf fand durch genaue trigonometrische Messungen 4436 m. Man sieht, daß die Formel (4) für mittlere Breiten die Höhe ziemlich genau gibt.

Anm. 1. Man kann auch umgekehrt aus der Formel (3) die mittleren Barometerstände B_2 für bekannte Höhen be-

rechnen. So findet man für den Brocken (1140 m) $B_2 = 659$ mm; für die Schneekoppe (1600 m) $B_2 = 622$ mm; für den Chimborazo (6300 m) $B_2 = 345$ mm; für den Dhawalagiri (8200 m) $B_2 = 272$ mm.

Anm. 2. Fragt man, in welcher Höhe die Luft noch einer Quecksilbersäule $B_2 = 0{,}01$ mm das Gleichgewicht halten würde, so findet man

$$H = 18400 \,.\, (2{,}880 + 2) \text{ m} = 89800 \text{ m},$$

so daß also in einer Höhe von 90 km der Luftdruck noch merklich wäre (vgl. § 528).

536.

Auftrieb der Luft. Es ist bereits hervorgehoben worden, (§ 521), daß bei den gasförmigen Körpern gerade so wie bei den tropfbar flüssigen Körpern das Archimedische Prinzip gilt, daß nämlich ein in einem Gase sich befindlicher Körper soviel an seinem Gewichte verliert, als die von ihm verdrängte Gasmenge wiegt.

Es wird daher jeder in der atmosphärischen Luft befindliche Körper einen Gewichtsverlust erleiden, der gleich dem Gewichte der von ihm verdrängten Luftmenge ist. Es wird also genau wie bei den Flüssigkeiten ein Körper in der Luft schweben, steigen oder sinken, je nachdem sein eigenes Gewicht gleich der von ihm verdrängten Luftmenge oder kleiner oder größer als diese ist.

Daher können die gewöhnlichen Wägungen der Körper nicht ihr genaues Gewicht angeben; denn das Gewicht eines Körpers wird um so mehr durch seinen Auftrieb in der Luft verringert, je größer sein Volumen ist. Will man daher bei wissenschaftlichen Untersuchungen, bei denen große Genauigkeit verlangt wird, möglichst einwandfreie Resultate haben, so müssen Wägungen im luftleeren Raume vorgenommen oder auf den luftleeren Raum reduziert werden.

537.

Reduktion des Gewichtes auf den leeren Raum. Ist P das gesuchte Gewicht eines Körpers, P' das gegebene der

Gewichtsstücke im leeren Raume, V das Volumen des Körpers, V' das der Gewichtsstücke und s das spezifische Gewicht der Luft, in der die Wägung vorgenommen wird, so ist die Wage im Gleichgewichte, wenn

$$P - V \cdot s = P' - V' \cdot s$$

ist; es ist also

$$P = P' + (V - V') \cdot s. \tag{1}$$

Es ist daher P nur dann gleich P', wenn $V = V'$; ist $V > V'$, so ist $P > P'$, und ist $V < V'$, so ist $P < P'$.

Führt man in der Formel (1) statt der Volumina, deren Feststellung wieder eine besondere Untersuchung oder Rechnung nötig macht, die spezifischen Gewichte s_1 des zu wiegenden Körpers, s_2 der Gewichtsstücke durch die Formeln

$$P = V \cdot s_1 \text{ und } P' = V' \cdot s_2$$

ein, so erhält man aus

$$P - P \cdot \frac{s}{s_1} = P' - P' \cdot \frac{s}{s_2}$$

leicht die Gleichung

$$P = P' \cdot \frac{s_1 (s_2 - s)}{s_2 (s_1 - s)}. \tag{2}$$

538.

Der Luftballon. Auf dem Archimedischen Prinzipe für die atmosphärische Luft beruht die Aeronautik oder Luftschiffahrt.

Im Jahre 1783 fertigten die Gebrüder Montgolfier aus gefirnißter Leinwand einen großen Ballon, der etwa 11,5 m im Durchmesser und unten eine große Öffnung hatte. Die Luft im Ballon wurde durch Strohfeuer so stark erwärmt, daß wegen der durch die Wärme bedingten Ausdehnung ein Drittel der Luft durch die Öffnung aus dem Ballon austrat und dadurch der Auftrieb größer wurde als das Gewicht der Hülle und der in ihr enthaltenen wärmeren Luft: der Ballon stieg in die Höhe. Noch in demselben Jahre stiegen zwei Personen in einem solchen Ballon auf.

Auch noch im Jahre 1783 füllte Charles in Paris einen Ballon mit Wasserstoffgas, das 14 mal so leicht als Luft ist; heute werden die Luftballons nach dem Vorschlage von

Green meistens mit dem billigeren und leichter zu beschaffenden Leuchtgase (spez. Gewicht 0,4 bis 0,5) gefüllt. Je nach der Art der Füllung (heiße Luft, Wasserstoffgas, Leuchtgas) unterscheidet man die Ballons als Montgolfièren, Charlièren und Greenièren.

Im Jahre 1804 unternahmen Gay-Lussac und Biot eine Auffahrt und kamen bis 4000 m Höhe, Gay-Lussac allein noch in demselben Jahre nahe bis 7000 m Höhe. Besonders berühmt sind auch die Fahrten von Glaisher im Jahre 1862, bei deren einer die Höhe von 8500 m erreicht wurde, und in der neueren Zeit die Fahrten von Berson, der im Jahre 1895 bis zu 9300 m Höhe gelangte, wo der Barometerstand nur noch 231 mm betrug. Die Lenkbarkeit der Luftschiffe ist ein bis heute noch unvollständig gelöstes Problem, zu dessen Lösung aber immer neue Versuche gemacht werden.

Um die Steigkraft und die Steighöhe eines Luftballons zu berechnen, bezeichnen wir

mit V den Rauminhalt des Ballons in cbm,

mit P_0 das Gewicht eines cbm Luft beim herrschenden Barometerstande B_0,

mit s das spezifische Gewicht des den Ballon füllenden Gases, bezogen auf Luft,

mit P das Gewicht der Ballonhülle, der Belastung, Bemannung usw.

Alsdann ist $V \cdot P_0$ das Gewicht der vom Ballon verdrängten Luft, $V . P_0 . s$ das Gewicht des den Ballon füllenden Gases, $V \cdot P_0 (1 - s)$ der Unterschied beider und die Steigkraft S des Ballons

$$S = V \cdot P_0 (1 - s) - P. \tag{1}$$

Das Gewicht P_0 ist hierin nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetze zu berechnen

$$P_0 = \frac{B_0}{760} \cdot 1{,}293 \text{ kg.}$$

Beim Aufstiege kommt der Ballon in immer dünnere Luftschichten; das Gewicht der von ihm verdrängten Luftmenge wird dadurch immer kleiner, die Steigkraft des Ballons

also geringer. Das Steigen hört auf, wenn die Steigkraft Null wird, wenn also das Gesamtgewicht des Ballons gleich dem Gewichte der verdrängten Luftmenge wird.

Ist B_1 der Barometerstand in der Höhe H, bis zu der der Ballon steigt, P_1 das Gewicht des cbm Luft in jener Höhe, so wird die Steigkraft 0, wenn

$$V \cdot P_1 \cdot (1 - s) = P$$

ist. Nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetze gilt aber

$$\frac{P_1}{P_0} = \frac{B_1}{B_0},$$

so daß man die Gleichung

$$V \cdot P_0 \cdot \frac{B_1}{B_0} (1 - s) = P$$

hat, aus der

$$B_1 = \frac{P \cdot B_0}{V \cdot P_0 (1 - s)} \tag{2}$$

folgt. Aus B_1 findet man nunmehr die Steighöhe aus

$$H = 18400 \,.\, (\log B_0 - \log B_1) \text{ m.} \tag{3}$$

539.

Aufgabe. Wie groß ist die Steigkraft einer Greenière von $V = 1000$ cbm Inhalt und einem Gewichte (einschließlich der Belastung) $P = 500$ kg, wenn der Barometerstand $B_0 = 760$ mm ist?

Wieviel Mann von je 50 kg Zugkraft sind mindestens nötig, um den Ballon festzuhalten, und bis zu welcher Höhe kann der losgelassene Ballon steigen?

Das spezifische Gewicht des zur Füllung verwandten Leuchtgases sei $s = 0{,}4$.

Auflösung. Da $P_0 = 1{,}293$ kg, so findet man für die Steigkraft den Wert

$$S = (1000 \cdot 1{,}293 \cdot 0{,}6 - 500) \text{ kg} = 275{,}8 \text{ kg},$$

so daß also mindestens 6 Mann den Ballon halten müssen.

Ferner ergibt sich

$$log\ B_1 = log\ \frac{500 \cdot 760}{1000 \cdot 1{,}293 \cdot 0{,}6} = 2{,}69003$$

und hieraus

$$H = 18400 \cdot (2{,}88081 - 2{,}69003)\ \mathrm{m} \sim 3510\ \mathrm{m}.$$

Aufgaben.

319. Eine Luftmenge nimmt bei 760 mm Druck 1 cbm ein; welchen Raum nimmt sie a) bei 320 mm; b) bei 840 mm; c) bei 1000 mm Druck ein?

Antw.: a) 2,375 cbm; b) 0,905 cbm; c) 0,760 cbm.

320. Ein Liter Luft unter dem Drucke 760 mm wird komprimiert und nimmt nur noch 650 ccm ein; durch welchen Druck findet die Kompression statt?

Antw.: 1170 mm.

321. Unter welchem Drucke steht ein Gas, das einen Raum von 2,5 l füllt, wenn es bei 760 mm Druck gerade 1 l einnimmt?

Antw.: 304 mm.

322. Atmosphärische Luft wird durch eine Quecksilbersäule von 30 cm Höhe komprimiert; wie verhält sich ihre neue Dichte zu frühern?

Antw.: 53 : 38.

323. In dem Steigrohre eines offenen U förmigen Manometers steht das Quecksilber 950 mm höher als im andern Rohre; wie groß ist die Spannung des Gases, die diesen Unterschied erzeugt?

Antw.: $2^1/_4$ Atm.

324. Wie lang muß das Steigrohr eines offenen Manometers sein, wenn es zum Messen von Überdrücken bis zu $^1/_2$ Atm. dienen soll?

Antw.: 45 bis 50 cm.

325. In einem geschlossenen Manometer von genau zylindrischer Form hat die abgesperrte Luftmenge bei $B = 760$ mm Druck die Höhe $h = 40$ cm; wie hoch steigt bei einem Drucke von $n = 4$ Atm. das Quecksilber im Steigrohre?

Antw.: 28,26 cm.

326. In dem Steigrohre eines geschlossenen luftleeren Manometers von genau zylindrischer Form steht das Quecksilber 10 cm über dem

Niveau des anderen Schenkels; welche Spannung hat das Gas, das auf dieses Manometer drückt?

Antw.: 0,13 Atm.

327. Welches Volumen nimmt 1 l Luft ein, wenn es bei unverändertem Drucke um 100° erwärmt wird?

Antw.: 1366,5 ccm.

328. 1 cbm Luft wiegt bei 15° C und 720 mm Druck 1161,2 g; wieviel wiegt 1 cbm Luft bei 0° C und 760 mm Druck?

Antw.: 1293 g.

329. Wieviel wiegen $n = 12$ l atmosphärische Luft bei $t = 100^0$ C und dem Drucke $B = 740$ mm?

Antw.: 11,057 g.

330. Wie groß ist das Normalvolumen von a) 3,5 l atmosphärischer Luft bei 730 mm Druck und 20° C; b) 18 l Wasserstoff bei 780 mm Druck und 10° C?

Antw.: a) 3,132 l; b) 17,82 l.

331. An zwei Orten sind gleichzeitig die Barometerstände $B_1 =$ 740 mm und $B_2 = 680$ mm beobachtet worden; wie groß ist der Höhenunterschied der beiden Orte?

Antw.: 675,5 m.

332. Auf dem Chimborazo beobachtete Humboldt den Barometerstand $B = 377$ mm und die Temperatur — 2° C; unten war der Barometerstand 762 mm und 25° C Temperatur; wie hoch war Humboldt gestiegen?

Antw.: 5882 m.

333. Wie groß ist der mittlere Barometerstand auf dem Gipfel des Montblanc, wenn seine Erhebung über das Meeresniveau 4810 m beträgt?

Antw.: 416 mm.

334. Ein Bleistück ($s = 11,4$) wiegt in der Luft 1 kg; wieviel wiegt es im leeren Raume?

Antw.: 1000,113 g.

335. Ein Glaswürfel vom spezifischen Gewichte $s_1 = 2,5$ wiegt 200 g; das spezifische Gewicht der aus Messing bestehenden Gewichtsstücke ist $s_2 = 8,2$; wieviel wiegt der Glaswürfel im leeren Raume?

Antw.: 200,072 g.

336. Eine Holz- und eine Eisenkugel haben in Luft ($s = 0,001293$) das gleiche Gewicht 240 g; wie groß ist ihr Gewichtsunterschied im luft-

leeren Raume, wenn das spezifische Gewicht des Holzes $s_1 = 0{,}8$ und das des Eisens $s_2 = 7{,}5$ ist?

Antw.: 0,3465 g.

337. Wie groß ist die Steigkraft eines Luftballons von 1000 cbm Inhalt, wenn er mit Leuchtgas ($s = 0{,}4$) gefüllt ist und das Gewicht der Hülle und Belastung 300 kg beträgt? (Barometerstand 760 mm.) Wie hoch steigt der Ballon?

Antw.: 475,8 kg; 7592 m.

338. Wie groß müßte der Durchmesser eines kugelförmigen Luftballons sein, der mit Wasserstoff ($s = 0{,}069$) gefüllt bei einer Belastung $P = 200$ kg bis zu einer Höhe steigen sollte, in der der Barometerstand $B_1 = 550$ mm beträgt, wenn der Barometerstand am Auflaßorte $B = 750$ mm ist?

Antw.: 7,6 m.

Sechsunddreissigstes Buch.

Anwendungen des Luftdruckes und des Boyle-Mariotteschen Gesetzes.

540.

Der Heber. Ein umgebogenes, an beiden Enden offenes Rohr, dessen einer Schenkel gewöhnlich etwas länger ist, heißt ein Heber oder, zum Unterschiede von einem andern nachher zu bestimmenden Apparate, genauer ein Saugheber. Er dient dazu, vermittels des Luftdruckes Flüssigkeit aus einem höher gelegenen Gefäße in ein anderes, tiefer liegendes überzuführen.

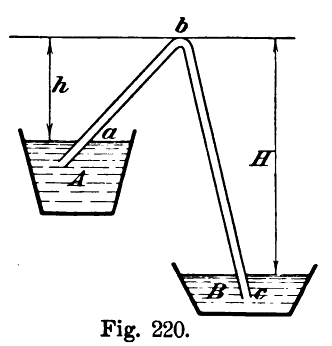


Fig. 220.

Wird nämlich der Heber mit der aus A nach B (Fig. 220) überzuleitenden Flüssigkeit ganz gefüllt — was dadurch geschieht, daß man entweder den kürzeren Schenkel in die Flüssigkeit A taucht und bei c saugt, oder in das Heberrohr

in aufgerichtetem Zustande Flüssigkeit gießt, beide Enden mit den Fingern verschließt, das eine Ende in die Flüssigkeit A taucht und dann die Finger wegnimmt —, so fließt die Flüssigkeit aus dem Gefäße A durch den Heber in das Gefäß B.

Um diese Erscheinung zu erklären, denken wir uns an der höchsten Stelle b des Heberrohres eine beide Teile des Hebers trennende Klappe angebracht; jeder der beiden Schenkel des Rohres stellt dann ein Barometer dar. In beiden Rohren würde die Flüssigkeit vermöge der Schwerkraft ausfließen, im linken Schenkel unter der Druckhöhe h, im rechten unter der Druckhöhe H, wenn keine andere Kraft wirkte. Nun wirkt aber an beiden Öffnungen a und c der Luftdruck, der dem Gewichte einer Wassersäule von 10,33 m Höhe oder dem einer Quecksilbersäule von 76 cm Höhe gleichkommt, und der in jedem der beiden Schenkel Wasser bis 10,33 m oder Quecksilber bis 76 cm Höhe emportreiben könnte. Bezeichnen wir die Höhe dieser Flüssigkeitssäule mit L, so drückt auf die bei b gedachte Klappe von links ein Druck von der Größe $L - h$, von rechts her aber ein Druck von der Größe $L - H$. Ist nun $H > h$, so ist

$$L - h > L - H,$$

d. h. der Druck an der Stelle b ist von links her größer als von rechts, weshalb sich die Flüssigkeit in der Richtung des größeren Druckes bewegt und mit einer der Druckhöhe $H - h$ entsprechenden Geschwindigkeit bei c ausfließt.

Mit dem Ausfließen sinkt das Niveau der Flüssigkeit im Gefäße A, während es in B steigt; dadurch wird der Überdruck von links nach rechts immer kleiner, bis er schließlich, sobald $h = H$ geworden ist, gleich 0 wird, worauf das Ausfließen aus der Öffnung bei c aufhört.

Anm. Soll die Erscheinung wirklich eintreten, so darf, da der Luftdruck die Flüssigkeitssäule h zu tragen hat, diese Höhe für Wasser nicht größer als 10 m, für Quecksilber nicht größer als 76 cm sein.

541.

Der Stechheber ist eine mäßig weite, häufig mit einem Henkel versehene Glasröhre, die man oben mit dem Daumen

verschließen kann, und die am andern Ende in eine enge Spitze ausgezogen ist, die das gegenseitige Ausweichen von Luft und Wasser nicht gestatten soll. Der Stechheber dient dazu, kleine Flüssigkeitsmengen aus einem Gefäße zu entnehmen. Gewöhnlich ist er mit einer bauchigen zylinder-, birnen- oder kugelförmigen Erweiterung versehen, damit das Instrument größere Mengen Flüssigkeit fassen kann. (Pipette ist der Name für eine besondere Form des Stechhebers.)

Taucht man den offenen Heber in die Flüssigkeit, so füllt er sich (durch Ansaugen etwas beschleunigt) nach dem Gesetze der kommunizierenden Gefäße so weit mit der Flüssigkeit, bis sie in ihm gerade so hoch wie außen steht. Schließt man jetzt das obere Ende mit dem Daumen und hebt das Instrument aus der Flüssigkeit, so fließt zwar während des Heraushebens ein kleiner Teil der Flüssigkeit aus, der größere Teil aber bleibt im Heber zurück. Über der bleibenden Flüssigkeit entsteht nämlich durch das Herausfließen von etwas Flüssigkeit ein luftverdünnter Raum, so daß der äußere Luftdruck auf die untere Öffnung des Hebers größer ist als der innere Druck und deshalb das weitere Ausfließen der Flüssigkeit verhindert.

Nimmt man nun den Daumen weg, so fließt die Flüssigkeit vollständig aus, da jetzt der Luftdruck beiderseits wieder gleich ist.

542.

Nehmen wir an, der Stechheber sei rein zylindrisch, habe die Länge h cm und werde h_1 cm tief in Wasser getaucht, dann oben verschlossen und aus dem Wasser gehoben, so kann die Größe x, um die das Wasser im Heber während des Heraushebens sinkt, in folgender Weise berechnet werden:

Nach dem vorigen Paragraphen muß der Luftdruck im Innern des Hebers plus dem Wasserdrucke gleich dem Drucke der äußeren Luft sein. Letzterer kann durch eine Wassersäule von 1033 cm ersetzt werden. Die Spannkraft der eingeschlossenen Luft ist, da sie sich vom Volumen $h - h_1$

auf $h - h_1 + x$ ausdehnt, nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetze gleich dem Drucke einer Wassersäule von

$$\frac{h - h_1}{h - h_1 + x} \cdot 1033 \text{ cm}$$

Höhe; die Gleichung zur Bestimmung von x lautet also

$$1033 \cdot \frac{h - h_1}{h - h_1 + x} + h_1 - x = 1033;$$

sie kann durch leichte Rechnungen auf die Form

$$x^2 + (1033 + h - 2\,h_1) \cdot x - h_1\,(h - h_1) = 0$$

gebracht werden, aus der für x der Wert

$$x = \frac{-(1033 + h - 2\,h_1) \pm \sqrt{(1033 + h - h_1)^2 + 4\,h_1\,(h - h_1)}}{2}$$

folgt. Da x positiv sein muß, ist das + Zeichen vor der Wurzel zu wählen; der Ausdruck unter der Wurzel kann ferner leicht etwas vereinfacht werden, so daß man schließlich erhält

$$x = \frac{-(1033 + h - 2\,h_1) + \sqrt{(1033 + h)^2 - 4\,h_1 \cdot 1033}}{2}.$$

Ist z. B.

$$h = 50 \text{ cm}; \; h_1 = 30 \text{ cm},$$

so findet man

$$x = 0{,}585 \text{ cm} = 5{,}85 \text{ mm}.$$

543.

Der Tiefenmesser. Läßt man eine l mm lange, oben geschlossene, unten offene Glasröhre senkrecht im Wasser niedersinken, indem man sie in geringer Entfernung über einer ein Lot bildenden schweren Kugel befestigt, so dringt in die Röhre um so mehr Wasser, je tiefer sie in dasselbe hinabgelassen wird. Wird das Innere der Röhre mit einem Stoffe bekleidet, der durch das Wasser gelöst oder sonstwie sichtbar verändert wird, so kann man nach dem Herausheben der Röhre aus dem Wasser erkennen, wieweit das Wasser in die Röhre gedrungen war, und daraus die Tiefe des Wassers in folgender Weise berechnen:

Beträgt der Barometerstand B, und ist l_1 die Höhe, bis zu der das Wasser in der Röhre gestiegen war, so ist, weil

das anfängliche Luftvolumen in der Röhre von l mm Höhe auf $l - l_1$ mm zusammengedrückt worden, die Spannkraft dieser Luftmenge nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetze

$$P = \frac{l}{l - l_1} \cdot B,$$

hat also um

$$P - B = \frac{l_1}{l - l_1} \cdot B$$

zugenommen.

Diese Zunahme der Spannkraft rührt von dem hydrostatischen Drucke der Wassersäule h her, um die die Röhre eingetaucht worden war. Da dieser aber außerdem die Wassersäule von der Höhe l_1 gleichzeitig im Gleichgewichte zu halten hat, so ist

$$h = l_1 + \frac{l_1}{l - l_1} \cdot B \cdot s$$

die zu messende Tiefe des Wassers, wenn s das spezifische Gewicht des Quecksilbers in bezug auf Wasser ist.

Auf mehreren deutschen Schiffen ist dieser Apparat zur Bestimmung von Meerestiefen angewandt worden. Wenn in einem besonderen Falle

$$l = 650 \text{ mm}; \; l_1 = 620 \text{ mm}; \; B = 750 \text{ mm}$$

gemessen wurde und das spezifische Gewicht des Quecksilbers in bezug auf Meerwasser 13,3 gerechnet wird, so ergibt sich

$$h = 206{,}87 \text{ m}.$$

Dabei ist freilich auf die Verschiedenheit der Temperatur an der Oberfläche und auf dem Grunde des Meeres keine Rücksicht genommen.

Sollen die Ergebnisse möglichst genau werden, so muß die Luft in der Röhre vorher auf die Temperatur des Meerwassers gebracht werden.

544.

Die Mariottesche Flasche ist eine durch einen Kork luftdicht verschlossene Standflasche, in die durch den Kork eine beiderseits offene Glasröhre beliebig tief eingeschoben werden kann. Sie besitzt in der Nähe des Bodens eine seitliche Ausflußöffnung C (Fig. 221) und dient dazu, aus dieser Öffnung

einen Wasserstrahl unter konstantem Drucke (vergl. § 480), also mit gleichbleibender Geschwindigkeit ausfließen zu lassen.

Ist das Glasrohr bei *B* geschlossen und *C* geöffnet, so fließt kein Wasser aus der Öffnung *C*, weil bei *B* keine Luft eintreten kann und der Luftdruck auf die Flüssigkeit bei *C* ebenso groß ist, wie im Innern der Flasche auf das Niveau der Flüssigkeit. Ist *C* geschlossen und *B* geöffnet, so steht das Wasser in der Glasröhre *AB* genau so hoch wie in der Flasche. Wird jetzt *C* geöffnet, so beginnt das Wasser bei *C* auszufließen und in der Röhre *AB* sinkt das Wasser sofort bis zum untern Ende *A*. Durch den Ausfluß entsteht nämlich im Innern der Flasche eine Luftverdünnung, so daß durch die Röhre *A B* äußere Luft in die Flasche eintritt und in Blasen emporsteigt. Wenngleich sich der Wasserspiegel bei *D* senkt, so geschieht der Ausfluß aus der Öffnung *C* fortwährend mit einer der Druckhöhe $AC = h$ entsprechenden Geschwindigkeit. Es steht nämlich die durch *A* gehende Wasserschicht unter demselben Atmosphärendrucke wie die Öffnung *C*; der Druck der Atmosphäre bei *A* hält die Wassersäule *A D* und die im obern Teile der Flasche befindliche, immer noch etwas verdünnte Luft im Gleichgewichte.

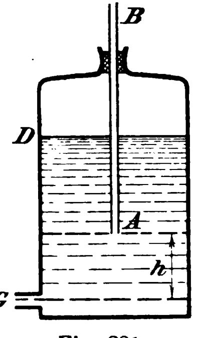


Fig. 221.

Läßt man die Glasröhre an ihrer Stelle, so bleibt die Ausflußgeschwindigkeit so lange dieselbe, immer entsprechend der Druckhöhe *A C*, als das untere Ende *A* in Wasser eintaucht, was man an der Form der Ausflußparabel erkennen kann.

Je nachdem man daher die Glasröhre aus der Flasche emporzieht oder tiefer in sie eintaucht, um so größer oder geringer wird die Druckhöhe *A C* und um so größer oder kleiner wird die Ausflußgeschwindigkeit, so daß letztere auf diese Weise reguliert werden kann. Schiebt man die Röhre *AB* so tief in die Flasche hinein, daß *A* mit *C* in einer horizontalen Ebene liegt, so fließt, trotzdem daß *B* und *C* geöffnet sind, kein Wasser mehr aus.

545.

Die Saugpumpe besteht aus dem genau zylindrischen, aus Metall oder Holz hergestellten Stiefel A (Fig. 222), in dem sich ein luftdicht schließender Kolben K (gewöhnlich vermittels eines Hebelwerkes) auf und nieder bewegen läßt, und der nach unten in ein in das Wasser tauchendes Saugrohr B übergeht. Der Stiefel ist am untern Ende durch das Bodenventil v_1 geschlossen; der Kolben ist durchbohrt und mit dem Kolbenventile v_2 versehen. Beide Ventile öffnen sich nach oben. Außerdem ist der Stiefel oben mit dem Abflußrohre C versehen.

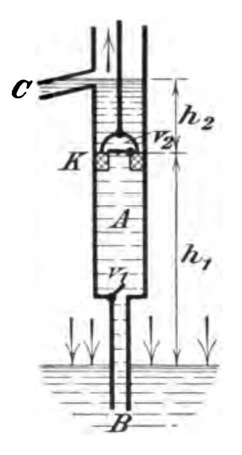


Fig. 222.

Die Wirkung der Saugpumpe ist die folgende: Zieht man den Kolben in die Höhe, so entsteht unter ihm ein luftverdünnter Raum, weshalb der äußere Luftdruck Wasser in dem Saugrohre in die Höhe treibt und Luft durch das Bodenventil in den Stiefel tritt. Geht der Kolben wieder abwärts, so schließt der sich gleichmäßig fortpflanzende Druck das Bodenventil v_1 und die Luft im Stiefel entweicht durch das Kolbenventil v_2; bei weiteren Kolbenzügen steigt das Wasser in den Stiefel über das Bodenventil und dann durch das Kolbenventil über den Kolben, wird mit diesem in die Höhe gehoben und fließt nun durch die Abflußröhre bei C aus.

Um die Kraft P zu berechnen, die zum Aufziehen des Kolbens und zum Heben des Wassers von B nach C nötig ist, bezeichnen wir mit L den Luftdruck, gemessen durch eine Wassersäule ($L = 10{,}33$ m), mit h_2 die Wasserhöhe KC über dem Kolben bei einer beliebigen Stellung desselben, mit h_1 die Wasserhöhe vom Niveau des Wasserbassins B bis zum Kolben, mit h die Gesamthöhe BC, so daß $h = h_1 + h_2$ ist, mit F den Querschnitt des Kolbens, ferner mit P_2 den Druck der Luft und des Wassers von oben nach unten, mit P_1 den Druck der Luft und des Wassers von unten nach oben, endlich mit γ das Eigengewicht des Wassers. Dann ist

$$P_2 = F\,.(L + h_2)\,.\,\gamma;\ P_1 = F\,.\,(L - h_1)\,.\,\gamma;$$

da P die Differenz $P_2 - P_1$ ist, so erhält man

$$P = F \,.\, (h_1 + h_2) \,.\, \gamma = F \,.\, h \,.\, \gamma;$$

d. h. die Kraft zum Aufziehen des Kolbens ist konstant, sie ist unabhängig vom Kolbenstande und dem äußeren Luftdrucke und dem Gewichte einer Wassersäule gleich, deren Grundfläche der Kolbenquerschnitt und deren Höhe die Gesamthöhe vom Niveau des Wasserbassins bis zum Ausflußrohre ist.

Die Pumpe kann übrigens nur so lange wirken, als $h < L$, also $h < 10{,}33$ m ist.

Beispiel. Ist $h = 6$ m; der Durchmesser d des Kolbens $d = 140$ mm und das Gewicht eines cbm Wasser $\gamma = 1000$ kg, so erhält man für P, wenn man von der geringen Reibung, dem Gewichte des Kolbens und der Kolbenstange etc. absieht, den Wert

$$P = \frac{1}{4}\,\pi\, d^2 \,.\, h \,.\, \gamma = \frac{1}{4}\,\pi \,.\, 0{,}14^2 \,.\, 6 \,.\, 1000 \text{ kg}$$

$$= 92{,}364 \text{ kg}.$$

546.

Die Druckpumpe unterscheidet sich dadurch von der Saugpumpe, daß der Kolben massiv ist, daß das Abflußrohr am oberen Teile des Stiefels fehlt, dafür in den unteren Teil des Stiefels ein nach oben gebogenes Rohr einmündet, das vom Stiefel durch ein sich nach außen öffnendes Ventil getrennt ist (Fig. 223).

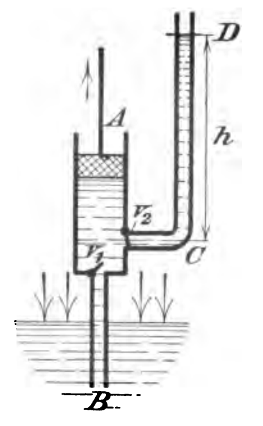


Fig. 223.

Sobald das Wasser durch das Emporziehen des Kolbens über das Saug- oder Bodenventil v_1 getreten ist, wird es beim Niedergange des Kolbens in das seitliche Steigrohr durch das Ventil v_2 gepreßt, und kann wegen dieses Ventilverschlusses nicht wieder zurück.

Durch wiederholtes Kolbenspiel kann das Wasser in dem Steigrohre bis zu einer beliebigen Höhe $CD = h$ emporgetrieben werden. Von

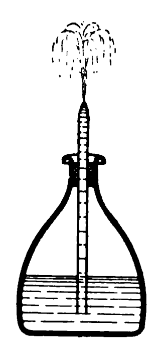
der Reibung abgesehen, hat man für die Kraft P, die das Wasser im Steigrohre $h = 13$ m hoch treibt, wenn der Kolbendurchmesser $d = 140$ mm ist (vergleiche § 466), den Wert

$$P = \frac{1}{4} \pi d^2 . h . \gamma = \frac{\pi}{4} . 0{,}14^2 . 13 . 1000 \text{ kg}$$

$$= 200{,}120 \text{ kg}.$$

547.

Der Heronsball ist ein teilweise (etwa bis zur Hälfte) mit Wasser gefülltes Glasgefäß, in das luftdicht eine beiderseits offene Glasröhre ragt, deren unteres Ende bis nahe dem Boden des Gefäßes unter das Wasser taucht, während das obere in eine Spitze ausgezogen ist (Fig. 224).


Fig. 224.

Bläst man Luft in die Glasröhre durch den Behälter, so verdichtet sich die bereits im Inneren über dem Wasser befindliche Luft und treibt das Wasser durch die Röhre in einem Strahle heraus.

Beträgt z. B. der Druck im Innern des Gefäßes 800 mm, während der äußere Luftdruck 760 mm ist, so ist der Überdruck 40 mm, d. h. Quecksilber würde von der Reibung und der Wirkung der Schwere abgesehen im ersten Augenblicke 40 mm, Wasser also 40 . 13,6 mm = 54,4 cm hoch getrieben werden.

Anm. Beim Heronsbrunnen wird die Verdichtung der Luft nicht durch Blasen, sondern durch den Druck einer Wassersäule erzeugt. Die Feuerspritze ist die Verbindung einer Druckpumpe mit einem Heronsballe, der hier Windkessel genannt wird.

548.

Der Gedanke, daß ein bestimmtes Quantum Luft, wenn es den dazu nötigen Raum hätte, sich immerfort **ausdehnen**, also verdünnen würde, führte Otto von Guericke 1650 (also vor Boyle und Mariotte) auf die Erfindung der **Luftpumpe**, womit er mehrere die Unkundigen in Staunen

setzende Naturerscheinungen hervorbringen konnte, deren notwendiges Eintreten er selbst aber als einfache Folgerungen aus der Toricellischen Lehre vom Luftdrucke voraussagen konnte.

Die Einrichtung der Luftpumpe, die in jedem Lehrbuche der Physik in ihren verschiedenen Formen beschrieben ist, ebenso die mannigfachen mit ihr anstellbaren Versuche und deren Erklärung übergehen wir hier, indem wir nur die Frage nach dem Grade der Verdünnung beantworten wollen.

549.

Aufgabe. Der Inhalt des Rezipienten einer Luftpumpe samt dem des zum Stiefel führenden Rohres sei V, der Inhalt des Stiefels v; welche Dichtigkeit wird nach n Kolbenzügen die Luft noch im Rezipienten haben, wenn die anfängliche Dichtigkeit d ist und vom schädlichen Raume abgesehen wird?

Auflösung. Da sich nach dem ersten Kolbenzuge die in dem Raume V enthaltene Luft in den Raum $V+v$ ausbreitet, und die Dichtigkeit umgekehrt proportional dem Volumen ist, so ist die Dichtigkeit d_1 nach dem ersten Kolbenzuge

$$d_1 = \frac{V}{V+v} \cdot d.$$

Nach dem zweiten Kolbenzuge ergibt sich ebenso

$$d_2 = \frac{V}{V+v} \cdot d_1 = \left(\frac{V}{V+v}\right)^2 \cdot d,$$

und durch Wiederholung dieser Schlußweise erhält man

$$d_n = \left(\frac{V}{V+v}\right)^n \cdot d = \frac{1}{\left(1+\frac{v}{V}\right)^n} \cdot d.$$

Wäre z. B.

$$V = 2000 \text{ ccm}; \quad v = 160 \text{ ccm}; \quad n = 50,$$

so hätte man

$$d_{50} = \left(\frac{2000}{2160}\right)^{50} \cdot d = 0{,}02133\, d.$$

Entspräche also der ursprünglichen Dichte d ein Druck von 1 $\frac{\text{kg}}{\text{qcm}}$, so wäre jetzt der Druck nur 21,33 $\frac{\text{g}}{\text{qcm}}$.

Die Verdünnung der Luft wird durch die Barometerprobe (§ 530) gemessen. In dem berechneten Beispiele müßte, wenn der der Dichtigkeit d entsprechende Barometerstand 760 mm wäre, die Barometerprobe noch einen Druck von 16,2 mm anzeigen. Die Abweichung der Rechnung von der Beobachtung gibt eine Vorstellung von der Güte der Luftpumpe und von der Wirkung des schädlichen Raumes.

550.

Um den Einfluß des schädlichen Raumes, der immer wieder mit atmosphärischer Luft von der Dichte d gefüllt ist, in Rechnung zu ziehen, nehmen wir an, sein Inhalt sei s, während sonst die Bezeichnungen des vorigen Paragraphen beibehalten werden sollen.

Der Raum V des Rezipienten enthalte nach $(n-1)$ Kolbenzügen Luft von der Dichte d_{n-1}; wird er mit dem schädlichen Raume s verbunden, der Luft von der Dichte d enthält, so hat die in dem Raume $V+s$ befindliche Luft die Dichte

$$\delta_{n-1} = \frac{V \cdot d_{n-1} + s \cdot d}{V+s}.$$

Wird jetzt der Kolben wieder ausgezogen, so breitet sich die im Raume $V+s$ vorhandene Luft in den Raum $V+v+s$ aus und hat die Dichte

$$d_n = \frac{V+s}{V+v+s} \cdot \delta_{n-1},$$

woraus leicht der Wert

$$d_n = \frac{V}{V+v+s} \cdot d_{n-1} + \frac{s}{V+v+s} \cdot d$$

folgt.

Setzt man in dieser Formel der Reihe nach $n = 1, 2, 3, \ldots n$, so erhält man die Gleichungen

$$d_1 = \left(\frac{V}{V+v+s} + \frac{s}{V+v+s}\right) \cdot d;$$

$$d_2 = \left[\frac{V}{V+v+s}\left(\frac{V}{V+v+s} + \frac{s}{V+v+s}\right) + \frac{s}{V+v+s}\right] . d$$

$$= \left[\left(\frac{V}{V+v+s}\right)^2 + \left(\frac{V}{V+v+s} + 1\right) \cdot \frac{s}{V+v+s}\right] . d;$$

$$d_3 = \left\{\frac{V}{V+v+s}\left[\left(\frac{V}{V+v+s}\right)^2 + \left(\frac{V}{V+v+s} + 1\right) \cdot \frac{s}{V+v+s}\right] + \frac{s}{V+v+s}\right\} . d$$

$$= \left[\left(\frac{V}{V+v+s}\right)^3 + \left(\left(\frac{V}{V+v+s}\right)^2 + \frac{V}{V+v+s} + 1\right) \cdot \frac{s}{V+v+s}\right] . d;$$

. . . .

$$d_n = \left[\left(\frac{V}{V+v+s}\right)^n + \left(\left(\frac{V}{V+v+s}\right)^{n-1} + \left(\frac{V}{V+v+s}\right)^{n-2} + \ldots + \frac{V}{V+v+s} + 1\right) \cdot \frac{s}{V+v+s}\right] . d.$$

Die Summe

$$1 + \frac{V}{V+v+s} + \left(\frac{V}{V+v+s}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{V}{V+v+s}\right)^{n-1}$$

kann berechnet werden; sie ist nämlich die Summe einer geometrischen Reihe mit dem Anfangsgliede 1 und dem Quotienten $\frac{V}{V+v+s}$, hat also den Wert

$$\frac{1 - \left(\frac{V}{V+v+s}\right)^n}{1 - \frac{V}{V+v+s}} = \frac{(V+v+s).\left(1 - \left(\frac{V}{V+v+s}\right)^n\right)}{v+s}$$

Dadurch erhält man

$$d_n = \left[\left(\frac{V}{V+v+s}\right)^n + \frac{s}{v+s}\left(1-\left(\frac{V}{V+v+s}\right)^n\right)\right] . d,$$

woraus leicht der Wert

$$d_n = \left(\frac{s}{v+s} + \frac{v}{v+s} \cdot \left(\frac{V}{V+v+s}\right)^n\right) . d$$

folgt. Für wachsendes n wird, da $\frac{V}{V+v+s}$ ein echter Bruch ist, die Klammer $\left(\frac{V}{V+v+s}\right)^n$ immer kleiner, so daß für $n = \infty$

$$\lim d_n = \frac{s}{v+s} . d$$

der höchste Grad der Verdünnung ist, der überhaupt erreicht werden kann.

551.

Aufgabe. Bei einer Kompressionspumpe hat der Rezipient den Inhalt V, der Stiefel den Inhalt v; wie groß ist nach n Kolbenspielen die Dichtigkeit der Luft im Rezipienten, wenn sie ursprünglich d war?

Auflösung. Da bei jedem Kolbenstoße die Luftmenge v in den Rezipienten getrieben wird, so enthält der Rezipient nach n Kolbenstößen diejenige Luftmenge, die ursprünglich in dem Raume $V + n . v$ enthalten war und auf den Raum V zusammengepreßt wurde; daher ist ihre Dichtigkeit

$$d_n = \frac{V + n \cdot v}{V} . d.$$

Für das Zahlenbeispiel

$$V = 2000 \text{ ccm}; \; v = 160 \text{ ccm}; \; n = 50$$

ergibt sich

$$d_{50} = \frac{2000 + 8000}{2000} d = 5 d;$$

die Luft würde also auf die Wände des Rezipienten, wenn ihrer anfänglichen Dichtigkeit d ein Atmosphärendruck entspricht, mit 5 Atmosphären drücken.

Aufgaben.

339. Mit welcher Geschwindigkeit fließt das Wasser aus einem Heber, dessen Schenkel vertikal gerichtet sind, wenn der freie Schenkel $h = 15$ cm länger ist als der andere?

Antw.: $v = \sqrt{2\,g\,h} = 1{,}72\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

340. Wieviel fließt durch diesen Heber in 1 Minute aus, wenn das Niveau im Gefäße A konstant erhalten wird und der Querschnitt des Heberrohres $q = 2{,}5$ qcm ist?

Antw.: $M = q\,.\,\sqrt{2\,g\,h}\,.\,60 = 25{,}7$ l.

341. Wieviel muß der freie Schenkel eines Hebers von 20 mm Durchmesser länger sein als der andere, wenn bei konstantem Niveau in 1 Minute 30 l ausfließen sollen?

Antw.: 12,9 cm.

342. Wie groß muß der Kolbendurchmesser einer Saugpumpe sein, damit Wasser durch eine Kraft von 100 kg auf die Höhe $h = 5$ m gehoben wird?

Antw.: $d = 2\sqrt{\frac{P}{\pi\,h\,.\,\gamma}} = 160$ mm.

343. Wie hoch wird vermittelst einer Druckpumpe, deren Kolben den Durchmesser $d = 200$ mm hat, Wasser durch eine Kraft $P = 180$ kg gehoben?

Antw.: $h = \frac{4\,P}{\pi\,d^2\,.\,\gamma} = 5{,}73$ m.

344. Der Rezipient einer Luftpumpe hat den Inhalt $V = 2{,}4$ cdm; der Stiefel den Inhalt $v = 1$ cdm; wie groß ist, abgesehen vom schädlichen Raume, die Dichtigkeit der Luft nach $n = 20$ Kolbenzügen?

Antw.: $d_{20} = 0{,}009432\ d$.

345. Wenn der Inhalt des Rezipienten einer Luftpumpe $V = 3$ l, der des Stiefels $v = 1$ l ist, nach wieviel Kolbenzügen beträgt die Dichtigkeit der Luft $^1/_{25}$ der ursprünglichen?

Antw.: $n = 12$.

346. Der Inhalt des Stiefels einer Luftpumpe sei $\frac{1}{m}$ des Inhaltes des Rezipienten; welche Dichtigkeit hat die Luft nach n Kolbenzügen? ($m = 8$; $n = 10$).

Antw.: $d_n = \left(\frac{m}{m+1}\right)^n . \, d = 0{,}308\ d \backsim {}^3/_{10}\ d$.

347. Wie groß ist die Dichtigkeit der Luft im Rezipienten einer Kompressionspumpe, dessen Inhalt $V = 2{,}5$ l ist, wenn der Inhalt des Stiefels $v = 0{,}5$ l beträgt und $n = 10$ Kolbenstöße gemacht werden?

Antw.: $d_{10} = 3\,d$.

348. Wieviel Pumpenstöße sind nötig, um die Luft im Rezipienten einer Kompressionspumpe auf die 7 fache Dichte zu bringen, wenn $V = 2$ cdm; $v = 3$ cdm Inhalt des Rezipienten und des Stiefels sind?

Antw.: $n = 4$.

Siebenunddreissigstes Buch.

Von der Bewegung gasförmiger Körper.

552.

Ausfluß gasförmiger Körper aus Gefäßen. Während das Ausfließen tropfbar flüssiger Körper aus Gefäßen in der Regel eine Folge der Schwerkraft ist, wird das Ausströmen der gasförmigen Körper aus einem Raume in einen andern durch ihre eigene Spannung veranlaßt und kann überhaupt nur stattfinden, wenn in dem ersteren Raume eine größere Spannung herrscht als im zweiten, wenn z. B. ein lufterfülltes Gefäß mit einem luftleeren verbunden ist.

Zur Berechnung der durch einen solchen Überdruck erzeugten Ausflußgeschwindigkeit eines Gases wenden wir dieselbe Schlußweise an, wie bei dem Ausflusse einer Flüssigkeit (§ 480), nur können wir uns hier in der Begründung etwas kürzer fassen.

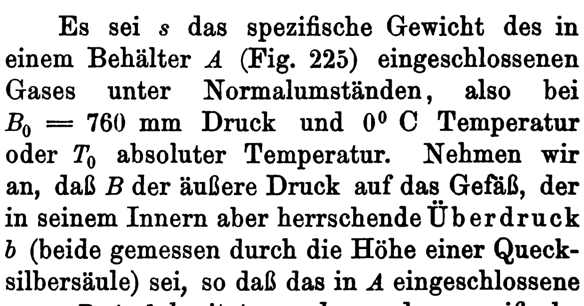


Fig. 225.

Es sei s das spezifische Gewicht des in einem Behälter A (Fig. 225) eingeschlossenen Gases unter Normalumständen, also bei $B_0 = 760$ mm Druck und 0^0 C Temperatur oder T_0 absoluter Temperatur. Nehmen wir an, daß B der äußere Druck auf das Gefäß, der in seinem Innern aber herrschende Überdruck b (beide gemessen durch die Höhe einer Quecksilbersäule) sei, so daß das in A eingeschlossene Gas die Spannung $B + b$ besitzt, so kann das spezifische

Gewicht s' des Gases nach dem Boyle-Mariotteschen Gesetze berechnet werden; aus

$$s' : s = (B + b) : B_0$$

folgt nämlich

$$(1) \qquad s' = \frac{B + b}{B_0} \cdot s.$$

Ist nun q der Querschnitt der kleinen Ausflußöffnung, h die sehr kleine Höhe der ausfließenden Gasschicht, so ist $q \cdot h \cdot s'$ das Gewicht und $\frac{q \cdot h \cdot s'}{g}$ die Masse dieser Schicht. Bezeichnet ferner s_0 das spezifische Gewicht des Quecksilbers, so hat der im Innern des Gefäßes auf den Querschnitt q wirkende Überdruck, unter dem das Gas ausströmt, wenn von einer Änderung der Temperatur vorläufig abgesehen wird, die Größe $b \cdot q \cdot s_0$ und bringt die Beschleunigung

$$(2) \qquad a = \frac{b \cdot q \cdot s_0}{\frac{q \cdot h \cdot s'}{g}} = \frac{b \cdot s_0 \cdot g}{h \cdot s'} = \frac{b \cdot s_0 \cdot g \cdot B_0}{h \cdot s\,(B + b)}$$

hervor. Nunmehr ergibt sich die Ausflußgeschwindigkeit, nachdem die Gasschicht von der Höhe h diese Strecke zurückgelegt hat, zu

$$(3) \qquad v = \sqrt{2a \cdot h} = \sqrt{\frac{2\,g \cdot B_0 \cdot s_0}{s} \cdot \frac{b}{B + b}},$$

worin

$$B_0 = 760 \text{ mm} = 0{,}76 \text{ m}; \; g = 9{,}81 \, \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}; \; s_0 = 13{,}596 \, \frac{\text{kg}}{\text{cdm}}$$

Konstanten sind. In dieser Gleichung bedeutet s das spezifische Gewicht des betreffenden Gases in bezug auf Wasser; soll aber s, wie es gebräuchlich ist, das spezifische Gewicht des Gases in bezug auf atmosphärische Luft sein, so ist für s der Wert $s_0' \cdot s$ einzusetzen, wobei $s_0' = 0{,}001293 \, \frac{\text{kg}}{\text{cdm}}$ das spezifische Gewicht der Luft auf Wasser bezogen bezeichnet. Dadurch geht die Formel (3) über in

$$(3') \qquad v = \sqrt{\frac{2\,g \cdot B_0 \cdot s_0}{s_0'} \cdot \frac{b}{B + b} \cdot \frac{1}{s}}.$$

Rechnet man hierin die Konstante

$$\sqrt{\frac{2\,g \cdot B_0 \cdot s_0}{s_0'}} = 395{,}96 \, \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

aus, so erhält man für die Ausflußgeschwindigkeit der atmosphärischen Luft ($s = 1$) die Formel

$$v = 395{,}96 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} \cdot \sqrt{\frac{b}{B + b}} \tag{4}$$

und für die eines anderen Gases den Wert

$$v = 395{,}96 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} \cdot \sqrt{\frac{b}{B + b} \cdot \frac{1}{s}}. \tag{5}$$

Es sei noch bemerkt, daß es, im Gegensatz zu den Flüssigkeiten, bei den gasförmigen Körpern gleichgiltig ist, ob sich die Ausflußöffnung im Boden oder in einer Seitenwand oder im Deckel des Gefäßes befindet, da ja der Druck nach allen Richtungen der nämliche ist.

553.

Einfluß der Temperatur. Die angegebenen Formeln sind unter der Voraussetzung abgeleitet worden, daß die Temperatur des im Gefäße A eingeschlossenen Gases 0^0 C (T_0 absolute Temperatur beträgt). Wird aber das eingeschlossene Gas auf die Temperatur t^0 gebracht, so wird seine Spannung vergrößert und kann nach dem Gay-Lussacschen Gesetze berechnet werden, wenn man die Spannung bei 0^0 mit $1 + \alpha t$ multipliziert ($\alpha = {}^1/_{273}$).

Betrachtet man aber die Ableitung der Formeln genau, so findet man, daß in den Formeln (3), (4) und (5) nur der unter dem Wurzelzeichen im Zähler stehende Druck b mit diesem Faktor zu multiplizieren ist, da der Druck $B + b$ im Nenner von der Berechnung des spezifischen Gewichtes s' aus Gleichung (1) herrührt, dieses spezifische Gewicht aber da das Gas im Gefäße A eingeschlossen ist, also keine Volumenänderung erleidet, von der durch die Wärme bewirkten Spannungsvergrößerung nicht beeinflußt werden kann.

Durch Multiplikation von b im Zähler mit $(1 + \alpha t)$ geht nunmehr die Gleichung (3′) des vorigen Paragraphen in

$$v = \sqrt{\frac{2\, g \cdot B_0 \cdot s_0}{s_0{}'} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{b}{B + b} (1 + {}^1/_{273}\, t)} \tag{6}$$

über, wofür man unter Einführung des berechneten konstanten

Zahlenwertes und der absoluten Temperatur schreiben kann

$$(7) \qquad v = 395{,}96 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} \cdot \sqrt{\frac{b}{B+b} \cdot \frac{T}{T_0}},$$

wenn das Gas atmosphärische Luft ist, und

$$(8) \qquad v = 395{,}96 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} \cdot \sqrt{\frac{b}{B+b} \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \frac{1}{s}}$$

für ein anderes Gas vom spezifischen Gewichte s (auf Luft als Einheit bezogen).

554.

Beispiele. 1. Strömt atmosphärische Luft von 0^0 aus einem Behälter in den leeren Raum, so ist in der Gleichung (4) $B = 0$, und man erhält die Ausflußgeschwindigkeit

$$v = 395{,}96 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

2. Strömt dagegen Wasserstoff, dessen spezifisches Gewicht in bezug auf Luft $s = 0{,}069$ ist, bei 0^0 in den leeren Raum, so gibt die Gleichung (5) für $B = 0$ den Wert

$$v = 395{,}96 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}} \cdot \sqrt{\frac{1}{0{,}069}} = 1507{,}5 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}.$$

3. Strömt atmosphärische Luft aus einem Behälter unter dem Überdrucke $b = 60$ mm in einen mit atmosphärischer Luft ($B = 760$ mm) gefüllten Raum, so ist die Ausflußgeschwindigkeit nach Gleichung (7) für

a) $t = 0^0 \qquad v = 107{,}11 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$;

b) $t = 10^0 \qquad v = 109{,}05 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$.

4. Strömt atmosphärische Luft aus einem Behälter in ein Vakuum ($B = 0$), und ist die Temperatur

a) $t = 10^0$, so wäre $v = 403{,}16 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$;

b) $t = -10^0$, „ „ $v = 388{,}65 \, \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$.

5. Aus einem Behälter strömt Leuchtgas (spezifisches Gewicht in bezug auf Luft $s = 0{,}5$) unter dem Überdrucke

$b = 30$ mm in atmosphärische Luft beim Barometerstande $B = 750$ mm; die Ausflußgeschwindigkeit beträgt, wenn die Temperatur des Gases 12^0 ist,

$$v = 112{,}21 \frac{\text{m}}{\text{sec}}.$$

555.

Die Ausflußmenge ist in einer Sekunde, wenn q den Querschnitt der Ausflußöffnung bezeichnet, $q \cdot v$; also beträgt die in t Sekunden ausfließende Menge

$$M = q \cdot v \cdot t, \tag{8}$$

wenn vorausgesetzt wird, daß während dieser Zeit der Überdruck, unter dem der Ausfluß erfolgt, und die Temperatur konstant erhalten bleiben. Das erstere — der konstante Überdruck — wird bei den Gasometern nahezu dadurch erreicht, daß das ausströmende Gas im Behälter durch ein entsprechendes Quantum Wasser ersetzt wird.

Im übrigen weicht auch beim Ausströmen der Gase die theoretische Ausflußmenge von der praktisch beobachteten ab; um die letztere aus der ersteren zu erhalten, muß man mit einem Ausflußkoeffizienten $\varkappa$ multiplizieren, so daß die allgemeinste Formel für die wirkliche Ausflußmenge M' lautet

$$M' = \varkappa \cdot q \cdot t \cdot 395{,}96 \cdot \sqrt{\frac{b}{B+b} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{T}{T_0}} \text{ cbm.} \tag{9}$$

Was die Größe des Koeffizienten $\varkappa$ anlangt, so sind die Angaben darüber sehr verschieden; im Mittel kann man annehmen, daß beim direkten Ausfließen aus Öffnungen in einer dünnen Wand $\varkappa = 0{,}6$, bei Anwendung von kurzen kegelförmigen Ansatzrohren $\varkappa = 0{,}9$ gesetzt werden darf. Die Verschiedenheit in den Angaben der Größe von $\varkappa$ rührt wohl davon her, daß $\varkappa$ bei Gasen sich mit der Größe des Überdruckes etwas ändert.

Die Ursache für die Verschiedenheit der theoretischen von der beobachteten Ausflußmenge rührt bei den Gasen wie bei den Flüssigkeiten von einer Zusammenziehung des ausströmenden Strahles her, die durch Beimischung von Rauch sichtbar gemacht werden kann.

556.

Entsprechend dem § 485 kann auch hier aus der aufgestellten Gleichung für M' jede der in ihr vorkommenden Größen berechnet werden, wenn die andern als bekannt vorausgesetzt werden. So findet man z. B.

$$M' = \varkappa \cdot q \cdot t \cdot 395{,}96 \cdot \sqrt{\frac{b}{B+b} \cdot \frac{1}{s} \cdot \frac{T}{T_0}};$$

$$q = \frac{M'}{\varkappa \cdot t \cdot 395{,}96} \cdot \sqrt{\frac{B+b}{b} \cdot s \cdot \frac{T_0}{T}};$$

$$s = \frac{b}{B+b} \cdot \frac{T}{T_0} \cdot \left(\frac{\varkappa \cdot q \cdot t \cdot 395{,}96}{M'}\right)^2;$$

u. s. w.

Beispiel. Für

$$B = 760 \text{ mm}; \; b = 6 \text{ mm}; \; T = 288; \; t = 1 \text{ sec};$$
$$s = 0{,}56; \; \varkappa = 0{,}65 \text{ und } q = 0{,}01 \text{ qm}$$

ist

$$M' = 0{,}312\,640 \text{ cbm}.$$

557.

Aus den aufgestellten Gleichungen ergeben sich einige sehr wichtige **Folgerungen**:

I. Ist in der Gleichung (7) für v der äußere Druck $B = 0$, strömt also das Gas aus einem Behälter in den luftleeren Raum, so erhält man

$$v = 395{,}96 \frac{\text{m}}{\text{sec}} \cdot \sqrt{\frac{1}{s} \cdot \frac{T}{T_0}}$$

d. h. die Geschwindigkeit, mit der irgend ein Gas aus einem Behälter in den luftleeren Raum ausströmt, ist unabhängig von der Spannung, die das Gas besitzt und für ein bestimmtes Gas allein abhängig von der Temperatur und zwar proportional der Quadratwurzel aus der absoluten Temperatur.

II. Wendet man die Formel (3) auf zwei verschiedene Gase an, deren spezifische Gewichte s_1 und s_2 sind, so folgt

unter sonst gleichen Umständen durch Division der beiden Gleichungen

$$\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{s_2}{s_1}} \quad \text{oder} \quad \frac{v_1{}^2}{v_2{}^2} = \frac{s_2}{s_1}$$

d. h. unter sonst gleichen Umständen verhalten sich die Quadrate der Ausflußgeschwindigkeiten zweier Gase umgekehrt wie ihre spezifischen Gewichte.

III. Aus der Gleichung (8) folgt für zwei verschiedene Gase bei der gleichen Zeit t

$$M_1 = q \cdot v_1 \cdot t; \qquad M_2 = q \cdot v_2 \cdot t,$$

woraus

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{s_2}{s_1}}$$

d. h. die in gleichen Zeiten aus gleichen Öffnungen und bei gleichen Druckverhältnissen ausgeströmten Mengen zweier verschiedenen Gase verhalten sich umgekehrt wie die Quadratwurzeln aus den spezifischen Gewichten der Gase.

IV. Soll $M_1 = M_2$ sein, so muß

$$v_1 \,.\, t_1 = v_2 \,.\, t_2$$

sein oder

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{v_2}{v_1} \quad \text{oder} \quad \frac{t_1{}^2}{t_2{}^2} = \frac{s_1}{s_2}$$

d. h. strömen aus derselben Öffnung unter gleichen Druck- und Temperaturverhältnissen gleiche Gasmengen aus, so verhalten sich die Quadrate der Ausflußzeiten wie die spezifischen Gewichte der Gase.

Anm. Von der letzten Formel hat Bunsen eine sehr sinnreiche Anwendung zur Bestimmung des spezifischen Gewichtes eines Gases gemacht, doch müssen wir darauf verzichten, seinen Apparat an dieser Stelle zu beschreiben.

558.

Erfolgt das Ausströmen eines Gases aus einer Öffnung nicht durch stetigen Überdruck, sondern stoßweise, so tritt das Gas in Form von „Wirbelringen“ aus. Überspannt man die eine Grundfläche eines Blechzylinders mit einer ela-

stischen Membrane (Gummihaut), bringt in der andern Grundfläche eine (runde oder eckige) Öffnung von etwa 2 cm Durchmesser an und füllt den Zylinder mit Tabakrauch oder Salmiakdämpfen, so tritt beim Klopfen auf die Membrane der Rauch aus der Öffnung in Form von Wirbelringen aus, in denen alle einzelnen Teilchen kreisförmige, in sich zurücklaufende Bahnen beschreiben und zwar so, daß sie vom Zylinder aus gesehen sich von außen nach innen bewegen.

In neuerer Zeit hat der englische Physiker Thomson diese Erscheinung zur Erklärung der inneren Konstitution der Atome benutzt.

559.

Wie bei den Flüssigkeiten, so treten auch beim Ausströmen von Gasen Reaktionswirkungen auf, so daß, wenn das Gas aus einer Öffnung einer Wand austritt, die gegenüberliegende Wand einen stärkeren Druck erfährt als die Wand, in der die Öffnung sich befindet.

Auf dieser Reaktionswirkung beruht z. B. der Rückschlag der Gewehre, der Rückstoß der Geschütze, das Steigen der Raketen, das Drehen der Feuerräder usw.

Ähnlich wie beim Segnerschen Wasserrad kann man die Reaktionswirkung ausströmenden Leuchtgases sichtbar machen, wobei das Gas auch noch angezündet werden kann.

560.

Fließt Luft oder ein anderes Gas in einer langen Rohrleitung, so entsteht durch die Reibung an den Rohrwänden, ebenso wie bei den Flüssigkeiten, ein Widerstand. Die Bestimmung der durch diesen Widerstand verbrauchten Druckhöhe kann nach der im § 503 angegebenen Formel für die Widerstandshöhe beim Fließen von Flüssigkeiten in Rohrleitungen geschehen. In der dort angegebenen Formel

$$h_1 = \zeta_1 \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

worin l die Länge der Leitung, d den Durchmesser der Rohre und v die Geschwindigkeit, ζ_1 aber eine Konstante (etwa 0,024 oder 0,025) bedeutet, muß nur die Wassersäule h_1 durch

eine Gassäule von demselben Gewichte ersetzt werden. Die Höhe dieser Säule würde für atmosphärische Luft

$$\frac{h_1}{0{,}001293},$$

für ein anderes Gas, dessen spezifisches Gewicht s (auf Luft bezogen) ist,

$$\frac{h_1}{0{,}001293 \cdot s}$$

sein. Setzt man diese Werte in die obige Gleichung ein, so erhält man für die Widerstandshöhe (in Metern Wasser ausgedrückt) die Gleichung

$$h_1 = \zeta_1 \cdot 0{,}001293 \cdot s \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Führt man $\zeta_1 = 0{,}024$ ein, so erhält man für atmosphärische Luft ($s = 1$)

$$h_1 = 0{,}000031 \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g},$$

für Leuchtgas ($s = 0{,}4$)

$$h_1 = 0{,}000012 \cdot \frac{l}{d} \cdot \frac{v^2}{2g}.$$

Beispiel. In einer Rohrleitung von $l = 1500$ m Länge und $d = 200$ mm Durchmesser fließt Leuchtgas mit der Geschwindigkeit $v = 4\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$; der Verlust an Druckhöhe ist dann

$$h_1 = 0{,}000012 \cdot \frac{1500}{0{,}2} \cdot \frac{4^2}{2 \cdot 9{,}81} = 0{,}073 \text{ m};$$

betrug der Überdruck am Anfange der Leitung 0,15 m Wasserhöhe, so war er am Ende der Leitung nur noch 0,077 m Wasserhöhe, so daß fast die Hälfte des Überdruckes zur Überwindung der Reibung verwandt wurde.

561.

Beim Ausströmen von Gasen aus engeren Rohren in weitere entstehen ähnliche Saugwirkungen, wie sie in § 501 für strömende Flüssigkeiten angegeben sind.

Bläst man durch ein enges Rohr ins Freie, so reißt die bewegte Luft einen Teil der benachbarten Luft mit fort.

Läßt man das enge Rohr *A* zunächst in ein weiteres *B* einmünden (Fig. 226), so entsteht an der Einmündungsstelle ein luftverdünnter Raum, was sich an dem mit einer gefärbten Flüssigkeit gefüllten Manometerrohre *C* dadurch zeigt, daß die Flüssigkeit im linken Schenkel steigt.

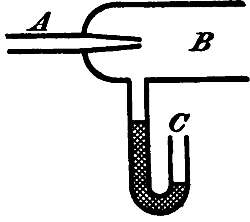


Fig. 226.

Diese Saugwirkung zeigt sich in auffälliger Weise bei dem folgenden Versuche: Bläst man in die Röhre eines Trichters, so wird ein aus Papier hergestellter, in den Trichter passender Kegelmantel (Filter) nicht, wie man zunächst erwartet, aus dem Trichter fortgeblasen, sondern vielmehr in ihn hineingezogen. Ähnlich ist der Versuch von Clement und Desormes: Bläst man durch ein Rohr, das an einem Ende eine Pappscheibe trägt, gegen eine zweite bewegliche gleich große Scheibe, so fliegt letztere an die erstere heran.

Praktische Anwendungen macht man von diesen Saugwirkungen bei dem Zerstäubungsapparate und beim Giffardschen Injektor oder der Dampfstrahlpumpe. In eine weitere Röhre *A* (Fig. 227) mündet eine in eine Spitze ausgezogene Röhre *B* und ragt mit dieser Spitze in eine zweite am Ende etwas verengerte Röhre *C* gerade bis zur Verengerung hinein. Die Röhre *A* hat ferner noch die Saugöffnung *D*, durch die ein Rohr in ein Wassergefäß führt. Die Wirkung ist die folgende: Durch *B* läßt man vom Dampfkessel aus einen Dampfstrahl gehen, der die in *A* befindliche Luft und dann das durch *D* eintretende Wasser nach *C* mit fortreißt; es findet aber keine Zerstäubung des Wassers statt, weil der Dampf bei seiner Berührung mit dem Wasser abgekühlt und kondensiert wird; das durch *C* in starkem Strahle ausfließende Wasser kann dann ohne weiteres nach dem Kesselraume geleitet werden.

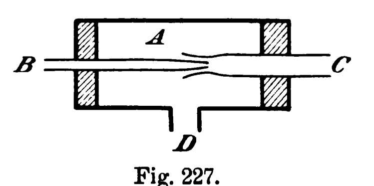


Fig. 227.

562.

Stoß und Widerstand der Luft. Wenn die bewegte Luft auf einen festen Körper trifft, so verliert sie an Geschwin-

digkeit; dieser Geschwindigkeitsverlust wird aber auf den festen Körper übertragen, so daß dieser in Bewegung gesetzt wird, wie z. B. die Flügel einer Windmühle oder ein Segelschiff. Ebenso nimmt aber auch die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers ab, wenn er sich in ruhender Luft bewegt, da er durch seinen Stoß die ruhenden Luftmassen in Bewegung zu setzen bestrebt ist.

Die Formeln für den Stoß und den Widerstand der Luft sind dieselben wie die im § 508 für den Stoß und den Widerstand des Wassers abgeleiteten. Nur ist hier noch die Bemerkung hinzuzufügen, daß, möge der Körper gegen die Luft oder die Luft gegen den Körper stoßen, diese nicht, wie das Wasser wegen seiner Inkompressibilität, gleich zur Seite ausweicht, sondern erst eine von der Geschwindigkeit abhängige Kompression erleidet, weshalb das Gewicht des Kubikmeters Luft größer als beim ruhenden Zustande genommen werden muß. Ist bei einem bestimmten Barometer- und Thermometerstande γ das Gewicht eines Kubikmeters Luft, v die Geschwindigkeit, mit der diese Luft in den leeren Raum strömen würde, c die Geschwindigkeit des in der ruhenden Luft sich bewegenden Körpers, so nimmt man an, daß die Luft im Verhältnis von c zu v dichter wird, folglich $\left(1+\frac{c}{v}\right)\gamma$ statt γ zu nehmen ist. Wäre z. B. $c = v$, so müßte 2γ statt γ, wäre $c = \frac{v}{100}$, so müßte $1{,}01\,\gamma$ statt γ gesetzt werden. Wir werden jedoch hiervon absehen und für γ den mittleren Wert 1,3 kg annehmen.

563.

Ist also $\varkappa$ ein durch Erfahrung festgestellter Koeffizient, so gilt für die Stoßkraft der bewegten Luft die Formel

$$P = \varkappa \cdot \gamma \cdot q \cdot \frac{v^2}{g},$$

worin q die Größe der gestoßenen Fläche und v die Geschwindigkeit der bewegten Luft bedeutet.

Genau dieselbe Formel gilt für den Widerstand, den ein bewegter Körper in ruhender Luft erfährt.

Über die Größe des Erfahrungskoeffizienten $\varkappa$ gilt das im § 555 Gesagte.

564.

Aufgaben. I. Ein Dampfwagen von $q = 4$ qm Vorderfläche bewegt sich in ruhender Luft mit $v = 15 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit; welchen beständigen Luftwiderstand hat er zu überwinden?

Da hier $\varkappa = 0{,}7$; $\gamma = 1{,}3$, so folgt aus der Formel

$$P = \varkappa \,.\, \gamma \,.\, q \,.\, \frac{v^2}{g} = 83{,}5 \text{ kg.}$$

II. Stößt Luft mit $v = 15 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit auf ein Segel von $q = 4$ qm Fläche, so ist der von ihr ausgeübte Druck, da hier $\varkappa = 0{,}93$ ist,

$$P = 110{,}9 \text{ kg.}$$

III. Fährt der in I. erwähnte Dampfwagen von $q = 4$ qm Vorderfläche einem Luftstrome von $v = 15 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit mit $v_1 = 15 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit entgegen, so ist für $\varkappa = 0{,}7$ nach § 511 (3′) der zu überwindende Luftwiderstand

$$P = \varkappa \,.\, \gamma \,.\, q \,.\, \frac{(v + v_1)^2}{g} = 337 \text{ kg.}$$

IV. Trifft der Luftstrom in II. das Segel unter einem Winkel $\alpha = 60^0$, so folgt aus § 512

$$P = \varkappa \cdot \gamma \cdot q \,.\, \frac{v^2 \,.\, \sin \alpha}{g} = 96{,}05 \text{ kg.}$$

565.

Aufgabe. Welche Endgeschwindigkeit erreicht ein Fallschirm beim freien Falle in der Luft, wenn sein Gewicht mit der Belastung 80 kg beträgt und für seine krumme Oberfläche eine gleichwirkende ebene horizontale Spannfläche von 10 m Durchmesser substituiert wird?

Auflösung. Aus der Formel des § 563 folgt

$$v = \sqrt{\frac{P \cdot g}{\varkappa \,.\, \gamma \,.\, q}},$$

was für $\varkappa = 0,625$ und $\gamma = 1,3$ kg den Wert

$$v \sim 3,5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

ergibt, also die Geschwindigkeit, die jemand erreicht, wenn er aus etwa 0,62 m Höhe herunterspringt.

Aufgaben.

349. Mit welcher Geschwindigkeit strömt Leuchtgas ($s = 0,4$) a) bei 0°; b) bei 15° C in den luftleeren Raum?

Antw.: a) $626,1 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; b) $643,04 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

350. Wie groß ist die Ausflußgeschwindigkeit von Wasserstoffgas ($s = 0,069$) bei 0° unter dem Überdrucke einer Wassersäule von 0,2 m Höhe, wenn der Barometerstand 760 mm beträgt?

Antw.: $207,72 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

351. Welcher Überdruck ist erforderlich, um der aus einem Behälter ausströmenden atmosphärischen Luft die Geschwindigkeit $v = 15 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ zu geben, wenn der äußere Druck 760 mm beträgt und die Temperatur nicht berücksichtigt wird?

Antw.: 1,092 mm Quecksilber.

352. Die in einem Gefäße eingeschlossene atmosphärische Luft hat eine Spannung von $1^1/_4$ Atmosphären; mit welcher Geschwindigkeit strömt sie aus, und wie groß ist die in einer Sekunde aus einer Öffnung von $q = 10$ qcm Querschnitt ausgeströmte Luftmenge ($\varkappa = 0,62$)?

Antw.: $177,08 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; 0,1098 cbm.

353. Mit welcher Geschwindigkeit strömt Wasserdampf ($s = 0,63$) von 100° Temperatur und 5 Atmosphären Spannung in die atmosphärische Luft?

Antw.: $v = 521,58 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

354. Aus einem Gasometer strömt Leuchtgas ($s = 0,5$) von 10° C Temperatur unter dem Überdrucke einer Wassersäule von 30 mm Höhe durch eine runde Öffnung von 20 mm Durchmesser aus; wie groß ist die Ausflußgeschwindigkeit und die in einer Stunde ausfließende Menge, wenn der Überdruck konstant bleibt und $\varkappa = 0,65$ gerechnet wird?

Antw.: $v = 30,676 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$; $M' = 22,55$ cbm.

355. Wie groß muß die Öffnung in einer dünnen Wand ($\varkappa = 0,62$) sein, wenn aus derselben in einer Minute unter dem konstanten Über-

drucke $b = 10$ mm Quecksilbersäule bei 0^0 C und $B = 760$ mm die Menge $M' = 4$ cbm Wasserstoffgas ($s = 0{,}069$) ausfließen soll?

Antw.: $q = 626$ qmm.

356. In einer Rohrleitung von 1000 m Länge und 150 mm Durchmesser fließt Leuchtgas ($s = 0{,}4$); der Überdruck am Anfange der Leitung betrug 0,13 m Wasserhöhe, am Ende nur noch 0,9 m Wasserhöhe; mit welcher Geschwindigkeit fließt das Gas in der Leitung?

Antw.: $v = 3{,}13 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

357. Welchen Widerstand hat ein Radfahrer zu überwinden, der in ruhiger Luft mit $v = 12 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit fährt, wenn seine Vorderfläche 0,4 qm beträgt ($\varkappa = 0{,}7$)?

Antw.: 5,3 kg.

358. Wie groß aber ist dieser Widerstand, wenn er gegen Wind, der $6 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit hat, fahren muß?

Antw.: 12 kg.

359. Eine Lokomotive, deren Vorderfläche 6 qm ist, bewegt sich mit $v = 15 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ Geschwindigkeit mit dem Winde; wie groß ist der Luftwiderstand, wenn die Geschwindigkeit des Windes $v_1 = 5 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ ist?

Antw.: 55,65 kg.

360. Wie groß darf das Gewicht und die Belastung eines Fallschirmes von 10 m Durchmesser sein, wenn seine Endgeschwindigkeit beim freien Falle in der Luft $4 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$ betragen soll?

Antw.: 104 kg.